فصل ۱

فرض‌های بنیادی فیزیک کلاسیک

فیزیک کلاسیک آشناترین نظریه‌ی علمی است. مفاهیم بنیادی آن مانند جرم، شتاب، نیرو و بقیه بخشی از اندیشه‌ی هر روزی ما شده‌اند. ازاین رو شاید به این مفهوم‌ها زیاد پرداخته نمی‌شود. بنابراین، نقد این مفهوم ها مهم‌اند و ما دراین بخش به بررسی آنها می پردازیم.

۱- ۱ فضا و زمان :

شاید بنیادی‌ترین فرض‌های فیزیک مفهوم فضا و زمان است. در فیزیک کلاسیک فرض می‌کنیم فضا و زمان پیوسته‌اند. به خاطر این فرض است که می‌توانیم بگوئیم رویدادی در یک نقطه‌ی معین و در لحظه زمانی مشخصی اتفاق افتاده است. چون معیارهای جهانی برای اندازه گیری طول و زمان وجود دارد ، مشاهده کننده‌های متفاوت در مکان های گوناگون و در زمان های مختلف می‌توانند مقایسه‌ی معنی‌داری از اندازه گیری های خود بکنند.
فراتر از این، در فیزیک کلاسیک فرض می‌کنیم که مقیاسی جهانی برای زمان وجود دارد (از این رو دو مشاهده‌گر که ساعت های خود را همزمان کرده‌اند درباره‌ی زمان رویداد همواره با هم موافق خواهند بود). فرض بنیادی دیگر در باره‌ی فضا این است که هندسه‌ی فضا اقلیدسی است و در بنیاد حدی در دقت اندازه‌گیری مکان و سرعت وجود ندارد. در مکانیک کوانتومی و نسبیت این فرض‌ها تا حدودی دگرگون شده‌اند.
منظور از اقلیدسی بودن فضا چیست ؟ دو نقطه را در نظر بگیرید. مکان این نقطه‌ها را با مختصات $x_۱, x_۲, x_۳$ و $x'_۱, x'_۲, x'_۳$ نشان دهید. این دو نقطه یک بازه می‌سازند. این بازه در فضای مختصات (چارچوب مرجع) می‌تواند جهت‌گیری‌های گوناگون داشته باشد. اختلاف مختصات دو نقطه را با $\Delta x_۳, \Delta x_۲, \Delta x_۱$ نشان دهید. فضای اقلیدسی فضایی است که فاصله‌ی دو نقطه در آن به صورت $d = \sqrt{\Delta x_۱^۲ + \Delta x_۲^۲ + \Delta x_۳^۲}$ تعریف می‌شود.

۱-۲ اصل نسبیت و چارچوب لخت

در درک ارسطو از عالم، توصیف این واقعیت که اجسام سنگین به پائین فرو می‌افتند این گونه بود: هر عنصر (زمین، هوا، آتش و آب) دارای نقطه بازگشت مخصوص به خود است و به این نقطه باز می‌گردند مگر آنکه به گونه‌ای از بازگشت آنها جلوگیری کنیم. عنصر خاک، به ویژه، می‌خواهد به مرکز عالم برگردد (در جهان ارسطو زمین مرکز عالم است). در چنین توصیفی، نقطه‌ی بازگشت نقش متمایز و مرکزی دارد و در فضا، مکان دارای مفهوم مطلق است.
ارسطو همچنین پنداشت که زمین ثابت و ساکن است و برای اثبات درستی نظر خود گفت: زمین ثابت است چون هر چه را که به بالا پرتاب کنیم به نقطه‌ی پرتاب خود فرو می‌افتد. چنانچه زمین ثابت نباشد آنگاه توپی که به بالا پرتاب می شود، باید در جایگاه دیگری فرود آید.
گالیله در رد این اثبات گفت: اگر زمین به سویی حرکت کند، توپ که نخست بر روی زمین قرار دارد در همان سوی، همراه زمین حرکت خواهد کرد. هنگامی که آن را به هوا پرتاب کنیم، علاوه بر حرکت عمودی خود، همزمان به حرکت اصلی و اولیه همراه زمین خود نیز ادامه خواهد داد. بنابراین، اگرچه در فاصله‌ای که توپ به بالا می رود و پائین می‌آید، زمین در حقیقت به

حرکت خود در سویی ادامه می‌دهد، توپ نیز در همان سوی و به همان اندازه حرکت می‌کند و در نتیجه، در همان نقطه‌ی پرتاب (در همان قسمت زمین) فرود می‌آید.

نتیجه: از آزمایش ارسطو نمی‌توان چیزی آموخت: آیا زمین تند حرکت می‌کند یا کند و یا اصلاً حرکت می‌کند؟ با دلیل ارسطو نمی توان به این پرسش ها پاسخ داد؛ چون توپ در هر حال در همان نقطه‌ی پرتاب فرود خواهد آمد. این آزمایش نمونه‌ای از یک اصل عمومی است:

با هیچ آزمایشی نمی‌توان گفت که آیا کسی در حالت سکون است یا حرکت یکنواخت دارد. گالیله این اصل را با تصور آزمایشگاهی در یک کشتی نشان داد. تا زمانی که حرکت کشتی کاملاً هموار و یکنواخت باشد، آزمایش‌های زیست شناسی و فیزیکی در آزمایشگاه درون کشتی به هیچ وجه نشانی از سرعت کشتی از خود نشان نخواهند داد. ماهی قرمز در درون شیشه‌ی آب حرکت سرگردان خود را انجام خواهد داد. چکه‌های آب که از شیر فرو می‌چکد در همان مکان همیشگی فرود خواهد آمد. پشه‌ها از جهت‌های گوناگون حمله خواهند کرد و همه‌ی اینها مستقل از حرکت کشتی انجام خواهند گرفت. اگر حرکت واقعاً یکنواخت باشد و تکان پس و پیش نداشته باشد، همین را در قطار و یا هواپیما هم می‌توان دید. در هواپیما که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، می‌بینیم که قهوه‌ای که از یک قوری ریخته می‌شود درست در درون فنجان فرو می‌ریزد و جسمی که از بالا رها می‌شود درست در پائین بر کف فرو می‌نشیند. تنها هنگامی از حرکت هواپیما آگاه می‌شویم که از پنجره به ابرها و زمین بنگریم. هیچ چیزی در درون هواپیمای در حال پرواز رفتاری متفاوت از آنچه که اگر هواپیما در حالت سکون می‌بود یا با سرعت ثابت دیگری حرکت می‌کرد از خود نشان نمی‌دهد. به بیان دیگر؛ هیچ چیزی در درون هواپیمائی که در حال سکون یا حرکت یکنواخت است بر ساکن بودن یا حرکت یکنواخت آن ویا سرعت خاص هواپیما دلالت نمی‌کند. این نه واضح است و نه چیزی است که بتوان با منطق به آن رسید. فقط یک واقعیت تجربی است که بارها درستی آن آزموده شده است.

برای مثال می‌توان پنداشت که شیمیدانی مایعی تولید کرده باشد که در آزمایشگاه وی در ۱۵۰ درجه به جوش می‌آید. اما اگر این مایع در قطاری باشد که با سرعت ۳۰ km/h حرکت می‌کند در ۱۴۰ درجه به جوش می‌آید و اگر سرعت قطار ٤۰ km/h باشد در ۱۳۰ درجه و... به جوش می‌آید. می‌توانید وجود یک چنین مایعی را تصور کنید؛ هیچ چیزی از وجود چنین مایعی جلوگیری نمی‌کند؛ با این حال، یک چنین ماده‌ای هرگز یافت نشده است. با این فرض که فشار درون قطار با فشار آزمایشگاه یکسان است، اگر مایع در آزمایشگاه در ۱۵۰ درجه به جوش بیاید در درون قطار هم در ۱۵۰ درجه خواهد جوشید و مهم نیست که سرعت قطار چقدر باشد. هرگز ماده یا وسیله‌ای ساخته نشده است که رفتارش در آزمایشگاه ساکن از رفتار آن در آزمایشگاهی که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند متفاوت باشد. رویدادها در آزمایشگاهی که حرکت یکنواخت دارد همانگونه است که در آزمایشگاه ساکن اند. اصل نسبیت بیان این ناتوانی در تمیز میان حالت سکون و حرکت یکنواخت است. می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد.

با هیچ آزمایشی نمی‌توان گفت که آیا یک فرد در حالت سکون است یا حرکت یکنواخت دارد.

بیان هم ارز دیگر به صورت زیر است:

اگر دو آزمایش در شرایط یکسان انجام گیرند، یکی در آزمایشگاه ساکن و دیگر در آزمایشگاهی با سرعت یکنواخت، هر دو آزمایش به نتایج یکسان خواهند انجامید.

اگر مجموعه‌ی نتایج همه‌ی آزمایش‌ها را قانون طبیعت بنامیم، بیان سومی از اصل نسبیت عبارت است از:

قانون‌های طبیعت در آزمایشگاه ساکن و در آزمایشگاهی با حرکت یکنواخت، یکسان اند.

اینها سه بیان هم‌ارز از قابل تمیز نبودن حالت سکون از حالت حرکت یکنواخت‌اند؛ هر سه یک چیز را می‌گویند. به اهمیت واژه‌ی "یکنواخت" که به آرامی در هر سه گزاره خزیده است توجه کنید .

اگر آزمایشگاهی، قطاری و یا یک کشتی یکنواخت حرکت نکند، آزمایش می‌تواند آن را مشخص کند . اگر کشتی یکنواخت بر سطح دریای آرامی حرکت کند، کسی که در اتاق کشتی کاملاً محبوس باشد از حرکت آن آگاه نخواهد شد. اما اگر امواج به بدنه‌ی کشتی برخورد کنند و آن را بالا و پائین ببرند، آنگاه از حرکت نایکنواخت آن آگاه می‌شوید.

همچنین اگر قطاری در خط مستقیم با سرعت یکنواخت حرکت کند، رفتار اجسام همان است که اگر قطاردر حال سکون باشد. اما اگر قطار ناگهان به سمت چپ بچرخد، اجسامی که از سقف آویخته‌اند به سوی راست مایل می‌شوند، چایی در فنجان به تلاطم می افتد و مسافر سرپا باید بخود بیاید تا تعادلش را نگهدارد. این رویدادها در قطاری که یکنواخت حرکت می‌کند روی نمی‌دهد. فقط حالت حرکت های راست خط با سرعت ثابت از حالت سکون غیر قابل تمیزند. نکته‌ی دیگری که باید توجه کرد از این قرار است: چون حالت حرکت یکنواخت را نمی‌توان از حالت سکون تمیز داد، هیچ مبنای تجربی برای نامیدن حالت سکون؛ با نام حالت سکون و حالت حرکت یکنواخت با نام حالت حرکت یکنواخت وجود ندارد. فرض کنید آزمایشگاه A در حالت سکون و آزمایشگاه B در حرکت یکنواخت باشد. نتایج همه‌ی آزمایش‌ها در هر دو آزمایشگاه یکسان است. بنابراین، اگر فردی درآزمایشگاه B ادعا کند که او در حالت سکون است و آزمایشگاه A در سوی مخالف بطور یکنواخت حرکت می‌کند؛ هیچ راهی وجود ندارد که به او نشان دهیم اشتباه می‌کند. در واقع، او اشتباه نمی‌کند. این بستگی به قرارداد یا گزینش واژه دارد. هر چه که می‌توانیم درباره‌ی آزمایش انجام گرفته در دو آزمایشگاه بگوئیم، *یکسان* است؛ چه A را در حالت سکون و B را در حالت حرکت یکنواخت بینگاریم یا B را در حالت سکون و A را در حرکتی یکنواخت در سوی مخالف و با همان سرعت فرض کنیم؛ و یا بپنداریم که A در یک سو و B در سوی دیگر با همان سرعت حرکت می‌کنند. هر بیانی با این واقعیت که فاصله‌ی میان آزمایشگاه های A و B با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد، سازگار باشد پذیرفتنی است. بحث این که کدامیک واقعاً در حال سکون است همانند وارد شدن دراین بحث است که قطب جنوب ۱۲۰۰۰ کیلومتر زیر قطب شمال است یا برعکس قطب شمال ۱۲۰۰۰ کیلومتر زیر قطب جنوب است. هر دو گزاره یکسان است و آزادیم یکی را که با قراردادهایمان سازگار باشد انتخاب کنیم؛ این گزینه دلخواه است. این آزادی در تصمیم گیری این که کدام ناظردر حال سکون است به اندازه‌ای مهم است که می‌ارزد تا اصل نسبیت را به گونه‌ی دیگری بیان کنیم تا بر این جنبه تاکید داشته باشد:

هر جسمی که نسبت به جسم دیگر بطور یکنواخت حرکت کند حق دارد خود را در حال سکون و دیگری را با حرکت یکنواخت بپندارد.

از این گزاره که با سه تای دیگر هم ارز است، نام **نسبیت** بر می‌آید. مفهوم گزاره بالا این است که چم (معنی) "در حال سکون بودن" معنی مطلق ندارد و ادعا می‌کند که وقتی می‌گوئیم چیزی در حال سکون است، باید مشخص کنیم که آن چیز نسبت به کدام یک از آزمایشگاه های بیشمار و هم ارز که حرکت یکنواخت دارند؛ در حال سکون است. اگر می‌خواهیم دقیق باشیم نمی‌توانیم بگوئیم که آقای احمدی در حال سکون است بلکه بایسته است که مثلا بگوئیم آقای احمدی یا در حال سکون است یا حرکت یکنواخت دارد؛ بسته به اینکه کدام یک از آزمایشگاه های هم ارز را برمی‌گزینیم و نسبت به آن سرعت آقای احمدی را اندازه می‌گیریم.

می‌توان به جای این جمله‌ی توصیفی کار دیگری کرد. آزمایشگاهی را که در حال سکون یا در حرکت یکنواخت است، آزمایشگاه" لَخت" یا سامانه‌ی" لَخت" و یا چارچوب" لَخت" نامید. در این صورت، به جای اینکه بگوئیم آقای احمدی در حال سکون است، می گوییم آقای احمدی در سامانه‌ی لخت است. یا آقای احمدی در چارچوب لخت است. اگر چه این گزاره گنگ

می‌نماید ولی یادآوری می‌کند که تمایز میان سکون و حرکت یکنواخت دلخواه است. واژه" لخت" یاری می‌کند تا اصل نسبیت را بطور خلاصه تر با گزاره‌ی پنجمی بیان کنیم:

سامانه‌ای که نسبت به یک سامانه‌ی لخت حرکت یکنواخت دارد، خود نیز یک سامانه‌ی لخت است .

به جای سامانه می‌توان چارچوب مرجع یا آزمایشگاه و یا اگر به شخصی می‌اندیشیم که آزمایش انجام می‌دهد، مشاهده کننده را جایگزین کرد. آقای احمدی اگر در یک سامانه‌ی لخت به دور و بر خود نگاه کند او یک مشاهده کننده‌ی لخت است. گزاره پنجم وجود مفهوم مطلق برای در حال سکون بودن را انکار می‌کند. پیش از آنکه این بحث را درباره‌ی نسبیت گالیله به پایان ببریم باید بگوئیم چرا واژه‌ی گنگ لخت برای توصیف چیزی که می‌توان آن را "در حال سکون" یا "حرکت یکنواخت نامید"، برگزیده شده است. انتخاب واژه، بازتاب موضوع هایی است که در پرسشی مانند «دقیقا حالت سکون چیست؟» ظاهر می شود. تا اینجا تنها گفتیم که اگر شخصی در حالت سکون باشد، هر شخص دیگری هم که نسبت به وی در حرکت یکنواخت است می‌تواند خود را در حالت سکون بداند . اما فرض نکردیم که همگی می‌توانیم ، دستکم، یک حالت سکون را مشخص کنیم. در پاسخ به این پرسش که چگونه می‌توان از حالت سکون یا چارچوب لخت تعریف دقیقی کرد، کافی است گفته شود: حالت سکون حالتی است که در آن قانون اول نیوتن صدق می‌کند. این قانون می‌گوید هر جسمی که نیرویی به آن وارد نشود یا حرکت نمی‌کند و یا با سرعت ثابت در جهت خاصی حرکت می‌کند . بنابراین شخصی که در چارچوب لخت قرار دارد اگر نیرویی به او وارد نشود، آن شخص یا ساکن است یا بطور یکنواخت در راستای معینی حرکت (راست خط) می‌کند. با آزمایش می‌توان گفت که آیا آزمایشگاه حرکت نایکنواخت دارد یا نه(مانند حرکت روی مسیر خمیده و یا با سرعت متغیر) اما اگر آزمایش بگوید که آزمایشگاه حرکت یکنواخت دارد، یعنی با سرعت ثابت در راستای خط راست حرکت می‌کند، دیگر آزمایشی وجود ندارد که اندازه سرعت را معین کند ؛ یعنی بین صفر، ۱ m/s یا ۵۰۰ m/s نمی توان تمایز قایل شد. چارچوب مشاهده‌کننده‌های بدون شتاب چارچوب های لخت اند.

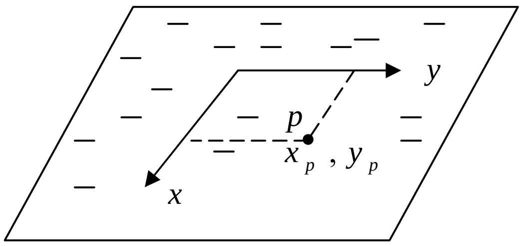
هنوز نگفته‌ایم که چگونه می‌توان گفت که مشاهده پذیر شتاب دارد یا نه. برای تمیز دادن چارچوب لخت از بقیه چارچوب ها به معیاری نیاز داریم. به طور رسمی می‌توان چارچوبی را لخت نامید که هر جسم منزوی، جسمی که بسیار دور از هر ماده‌ای باشد، نسبت به آن چارچوب با سرعت یکنواخت حرکت کند. این تعریف، البته، آرمانی است زیرا در عمل هرگز نمی‌توان بینهایت از بقیه‌ی ماده دور شد. با این وجود، برای مقاصد عملی چارچوب لخت آن چارچوبی است که جهت‌گیری آن نسبت به ستاره‌های ثابت معین باشد و در آن، خورشید با سرعت یکنواخت حرکت کند. فرض بنیادی فیزیک کلاسیک این است که یک چنین چارچوبی وجود دارد. در حقیقت این فرض و تعریف چارچوب لخت مفهوم واقعی قانون نخست نیوتن است. (یعنی ، هر جسمی که به آن نیرویی وارد نشود حرکتش یکنواخت راست خط است).

۱-۳ دستگاه های مختصات :

فیزیک علم بررسی پدیده‌هایی است که در عالم مشاهده می‌شوند. برای این که پدیده‌ها را با زبان دقیق ریاضی توصیف کنیم به دستگاه مختصات نیاز داریم. دستگاه مختصات ابزار ریاضی است که به وسیله‌ی آن موقعیت مکانی و سرعت یا پیکربندی سامانه‌ی فیزیکی را مشخص می‌کنیم. در خیلی از مسئله‌های مکانیک، باید پیکربندی سامانه‌ی مورد بررسی را به صورت تابعی از زمان بدانیم . اگر سامانه شامل بیش از یک ذره باشد؛ مسئله‌ی عمومی یافتن متغیرهای مستقل مکان و سرعت‌های همه‌ی ذره‌های سامانه بر حسب تابعی از زمان خواهد بود. با این حال، در عمل به دست آوردن همه‌ی این آگاهی‌ها لازم نیست؛ بلکه تعداد بسیارکم‌تری از آنها کافی است. مثلا اگر بخواهیم تغییر سرعت یکی از ذره‌ها را دراثر جابه‌جایی کل سامانه در فضا بدانیم، نیازی به دانستن همه‌ی متغیرهای سامانه نیست . برای حل مسئله‌هایی از این دست، نخست لازم است دستگاه مختصات

مناسبی را انتخاب کرد. در گزینش مختصات مناسب برای یک مسئله، بهتر است که کمترین تعداد مختصات لازم برای حرکت ذره در نظر گرفته شود. برای نمونه، اگر ذره‌ای آزاد باشد تا بر روی سطحی مانند سطح میز، حرکت کند روشن است که تنها دو مختصات لازم است. می‌توان صفحه‌ی روی میز را مانند شکل(۱-۱)، صفحه‌ی xy تصور کرد. اگر در لحظه‌ی معینی ذره در نقطه‌ی p باشد، مختصاتش x_p و y_p است. در این مثال، سامانه ما تنها یک ذره دارد و مسیر حرکت ذره به سطح میز محدود است. دانستن وابستگی به زمان این مختصات، وضعیت حرکتی ذره را کاملاً مشخص می‌کند. اگر سامانه از دو ذره تشکیل شود و هر دو مقید به حرکت بر روی یک سطح باشند، آنگاه برای مشخص کردن پیکربندی سامانه به چهار مختصات، یعنی x و y هر دو ذره، نیاز داریم. برداشتن قیدی که مسیر ذره را به صفحه محدود می‌کند نیازمند افزودن مختصات z هر ذره است. برای ذره‌ای که در یک بعد یا روی یک خط راست حرکت می‌کند، دانستن یک مختصات، مانند x کافی است. برای مشخص کردن حرکت این ذره، کافی است مختصات آن ذره را برحسب زمان بدانیم. پس باید توابع زیر را برای بررسی حرکت یک ذره بدانیم:

در یک بعد	$x(t)$
در دو بعد	$x(t), y(t)$
درسه بعد	$x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)$



شکل ۱-۱

بنابراین، بنیادی‌ترین مسئله‌ی مکانیک کلاسیک، پروراندن شیوه‌هایی است که توابعی از نوع بالا را برای ما تعیین کند. این توابع به نوبه‌ی خود مکان جسم را در هر لحظه‌ی زمان به دست می‌دهند. مفهوم فیزیکی توابعی مانند $x(t)$ در قاعده‌هایی نهفته است که چگونگی اندازه‌گیری مختصات x ذره را در زمان t توصیف می‌کند. هر دستگاه یا سامانه‌ی مختصات چهار جزء بنیادی دارد که عبارت اند از (۱) انتخاب مبداء، (۲) انتخاب محورها ، (۳) انتخاب جهت برای هر محور و(٤) انتخاب بردار یکه برای هر محور.

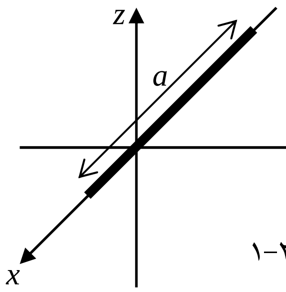
سودمندترین چارچوب های مختصات در فیزیک که بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند، دستگاه‌های مختصات کارتزی، استوانه‌ای و کروی اند. دلیل سودمندی آن‌ها در شکل توصیف عنصرهای جزء طول، سطح و حجم است که کلید انجام بسیاری از انتگرال‌گیری‌ها در مکانیک کلاسیک اند. نمونه‌هایی از آنها را در فصل ۹ و فصل ۱۰ در محاسبه‌ی مرکزجرم و گشتاور لختی خواهیم دید.

۱-۳-۱ مختصات کارتزی

این دستگاه مختصات مجموعه‌ای از محورهای متعامد است که در یک نقطه مانند O همدیگر را قطع می‌کنند. نقطه‌ی O را مبداء می‌نامند. چون ما در دنیای سه بعدی زندگی می‌کنیم، به این خاطر از سه محور استفاده خواهیم کرد. اینک ببینیم چهار جزء اصلی این سامانه را چگونه باید برگزید.

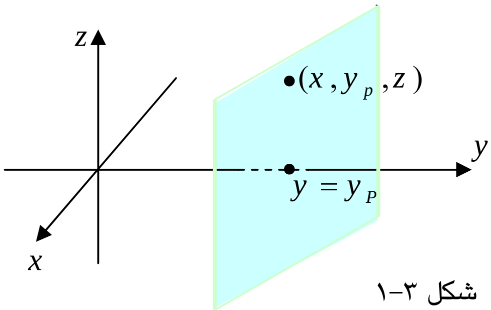
(۱) **انتخاب محور**: انتخاب مبداء مختصات کاملا اختیاری است. می‌توان آن را هر نقطه‌ای در فضا برگزید؛ چون هیچ نقطه‌ی فضای تهی به نقطه‌ی دیگر آن برتری ندارد. گزینه‌ی مبداء ممکن است نقطه‌ی خاصی در جسم مورد بررسی باشد. برای مثال، ممکن است وسط یک قطعه سیم راست را مبداء انتخاب کرد.

(۲) **انتخاب محورها**: آشناترین مجموعه‌ی محورها، محور های کارتزی اند. یعنی محور x ،محور y و محور z که برهم عمودند و در مبداء همدیگر را قطع می‌کنند. ممکن است راستای سیم راست مثال بالا را همانند شکل (۲-۱) محور x انتخاب



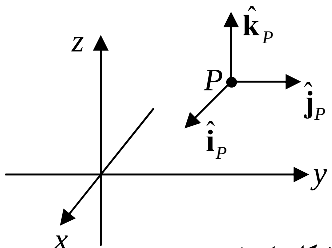
شکل ۲-۱

کنیم. روشن است که هر راستای دیگری در فضا را می‌توان محور x برگزید. با انتخاب یک محور، دو محور دیگر کاملا مشخص می‌شوند. در فضای سه بعدی دنیای ما، به هر نقطه‌ای مانند P در فضا ، سه مقدار (x_p, y_p, z_p) نسبت داده می‌شود که مختصات کارتزی نقطه‌ی P اند. دامنه‌ی این مقدارها عبارت اند از $-\infty < x_p < +\infty$ ، $-\infty < y_p < +\infty$ ، $-\infty < z_p < +\infty$. مجموعه‌ی نقاط فضای S که مختصات y آن ها برابرند سطح **هم‌تراز** می‌سازند. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط فضا با $y = y_p$ عبارت است از $S_{y_p} = \{(x, y, x) \; ; \; y = y_P\}$. این مجموعه **صفحه‌ی هم تراز** برای y_p است که همان صفحه‌ی $x-z$ است و در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. در واقع، مختصات y هر نقطه‌ای توصیف صفحه‌ی همه‌ی نقاطی است که به محور y عمود است.



شکل ۳-۱

(۳) **انتخاب جهت های مثبت**: گزینه‌ی بعدی انتخاب جهت مثبت برای هر محور است. معمولا در مختصات کارتزی صفحه‌ی $y-z$ را صفحه کاغذ انتخاب می‌کنند. محور y را محور افقی و جهت مثبت آن را از چپ به راست برمی‌گزینند. محور عمودی را محور z و جهت مثبت آن را از پایین به بالا انتخاب می‌کنند. در مسئله های فیزیک آزادیم محورها و جهت‌های مثبت را هر طور که برای مسئله مناسب باشد انتخاب کنیم.



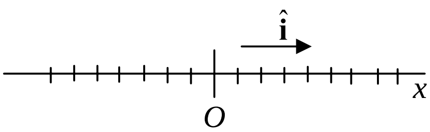
شکل ٤-۱

(۴) **انتهاب بردارهای یکه**: به هر نقطه‌ی P در فضا برابر شکل (٤-۱) سه بردار تک جهت $(\hat{\mathbf{i}}_P, \hat{\mathbf{j}}_P, \hat{\mathbf{k}}_P)$ نسبت می دهیم.

۴-۱ حرکت در یک بعد

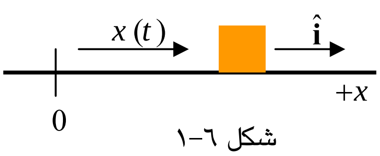
۱-۴-۱ مکان، بازه ی زمان ، جابه‌جایی

برای بررسی کمی حرکت و توصیف فضا و زمان به یک سامانه‌ی ریاضی، **چارچوب مرجع**، نیاز است. شناساندن مفهوم های فیزیکی مکان، سرعت و شتاب و توصیف ریاضی دقیق آن‌ها پس از انتخاب چارچوب مرجع شدنی است. در شکل (۵-۱) مختصات کارتزی یک بعدی با بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$ در راستای محور x نشان داده شده است.



شکل ٥-۱

مکان : جسمی را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند. می‌توان آن را به صورت یک جرم نقطه‌ای پنداشت.اگر بخواهید واقع بین باشید، مرکزجرم جسم را که یک نقطه است در نظر بگیرید. مختصات مکان آن را *نسبت به مبداء اختیاری* با $x(t)$ نشان دهید. در شکل (٦-۱) چنین جسمی نشان داده شده است. مختصات مکان، تابعی از زمان است و بسته به این که مکان جسم کجاست، می‌تواند مثبت، صفر یا منفی باشد. مکان هم جهت دارد و هم اندازه و بنابراین، یک کمیت برداری است. در یکاهای علمی ، یکای مکان متر (m) است.



شکل ٦-۱

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-۱)$$

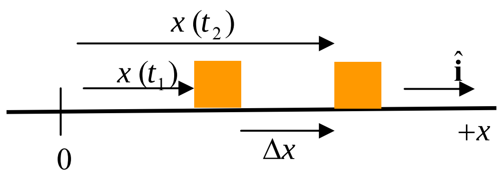
مختصات مکان جسم را در زمان $t=0$ با نماد $x_0 \equiv x(t=0)$ نشان خواهیم داد.

بازه‌ی زمان: بازه‌ی بسته‌ی $[t_1,t_2]$ را با $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ تعریف می‌کنیم و به آن بازه‌ی زمان می‌گوییم. دردستگاه یکاهای SI، یکای بازه‌ی زمان ثانیه (s) است.

جابه‌جایی: تغییر مکان جسم بین زمان های t_1 و t_2 عبارت است از

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \left(x(t_2) - x(t_1)\right)\hat{\mathbf{i}} \equiv \Delta x(t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-۲)$$

که *جابه‌جایی بین زمان های* t_1 و t_2 نامیده می شود. جابه‌جایی یک کمیت برداری است و در شکل (۷-۱) نشان داده شده است.



شکل ۷-۱

۲-۴-۱ سرعت

وقتی حرکت جسمی توصیف می‌شود، از واژه‌ی عمومی "سرعت" و گاهی هم از" تندی" استفاده می‌شود. در توصیف ریاضی حرکت باید این واژه‌ها به دقت تعریف شوند. در اینجا نخست کمیت‌های میانگین را برای بازه‌ی محدود زمان تعریف می‌کنیم و سپس وضعیتی را در نظر می‌گیریم که بازه‌ی زمانی بسیار کوچک باشد و به صفر میل کند. این کار ما را به مفهوم ریاضی سرعت رهنمون خواهد شد و خواهیم دید که مشتق مکان نسبت به زمان است.

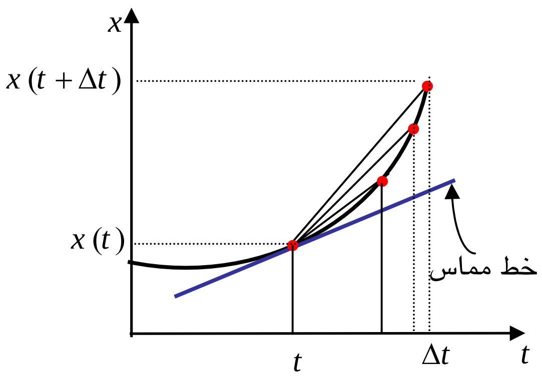
تعریف: **سرعت میانگین** مولفه‌ی سرعت میانگین، $\bar{v}_x$ ، برای بازه‌ی زمان Δt عبارت است از جابه‌جایی Δx تقسیم بر بازه‌ی زمان Δt: $\bar{v}_x \equiv \Delta x / \Delta t$. در سامانه‌ی یکاهای SI، یکای سرعت متر برثانیه $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$ است. بنابراین، بردار سرعت میانگین را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\bar{\mathbf{v}}(t) \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} = \bar{v}_x(t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-۳)$$

سرعت لحظه‌ای: جسمی را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند. مختصات مکان آن را با $x(t)$ و مکان اولیه‌ی آن را در زمان $t=0$ با x_0 نشان دهید. بازه‌ی زمانی $[t, t+\Delta t]$ را در نظر بگیرید. سرعت میانگین برای این بازه‌ی زمان Δt شیب خطی است که مکان‌های $(t, x(t))$ و $(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$ را به هم وصل می‌کند. شیب این خط تغییر مکان تقسیم بر تغییر زمان
است و داریم

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad (۱-٤)$$

اگر بازه‌ی زمان Δt را کوتاه تر کنیم سرعت میانگین چگونه تغییر خواهد کرد؟ با توجه به شکل (۸-۱) دیده می‌شودکه شیب خطی که نقاط $(t, x(t))$ و $(t, x(t+\Delta t))$ را به هم وصل می‌کند ، به شیب خط مماس به خم مسیر $x(t)$ در زمان t میل می‌کند. برای این که مقدار شیب را برای هر زمان بتوان تعریف کرد، بازه‌ی زمان $[t, t+\Delta t]$ را انتخاب می‌کنیم. به ازای هر مقدار مختلف Δt، سرعت میانگین را حساب می‌کنیم. با این کار دنباله‌ای از سرعت های میانگین خواهیم داشت. مقدار حدی این دنباله، مولفه‌ی x سرعت لحظه‌ای در زمان t است.



شکل ۸-۱

تعریف: **سرعت لحظه‌ای**: شیب خطی که در زمان t به خم مکان نسبت به زمان مماس است، *مولفه‌ی* x *سرعت لحظه‌ای* در

زمان t است :

$$v_x(t) \equiv \ell im_{\Delta t\to \circ}\bar{v}_x = \ell im_{\Delta t\to\circ}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \ell im_{\Delta t\to\circ}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad (۱-۵)$$

سرعت آهنگ تغییر مکان جسم نسبت به زمان است. بنابراین، بردار سرعت لحظه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-٦)$$

به همین ترتیب برای مولفه‌های دیگر سرعت داریم

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \qquad (۱-۷)$$

مثال ۱-۱ جسمی را در نظر بگیرید که معادله‌ی مکان آن در امتداد محور x با $x(t) = x_\circ + bt^۲/۲$ داده شد است که در آن $x_\circ$ مکان جسم در زمان $t=\circ$ است. مولفه‌ی x سرعت جسم را به دست آورید.

حل: برای محاسبه‌ی مولفه‌ی x سرعت، نخست باید مکان جسم را در زمان $t+\Delta t$ حساب کنیم. داریم

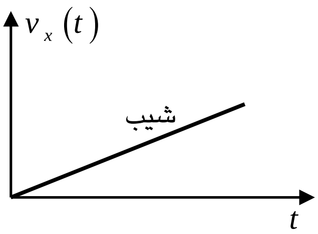
$$x(t+\Delta t) = x_\circ + \frac{۱}{۲}b(t+\Delta t)^۲ = x_\circ + \frac{۱}{۲}b(t^۲ + ۲t\,\Delta t + \Delta t^۲) \qquad (۱-۸)$$

سرعت لحظه‌ای عبارت است از

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \ell im_{\Delta t\to\circ}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \ell im_{\Delta t\to\circ}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ &= \ell im_{\Delta t\to\circ}\frac{\left(x_\circ + \frac{۱}{۲}b(t^۲+۲t\,\Delta t+\Delta t^۲)\right)-(x_\circ+\frac{۱}{۲}bt^۲)}{\Delta t} \\ &= \ell im_{\Delta t\to\circ}\left(bt + \frac{۱}{۲}b\,\Delta t\right) = bt \end{aligned} \qquad (۱-۹)$$

در شکل (۹-۱) سرعت لحظه‌ای $v_x(t)$ برحسب تابعی از زمان t رسم شده است.

۳-۴-۱ شتاب



شکل ۹-۱

تغییر سرعت نسبت به زمان شتاب است. محاسبه‌ی بالا را می‌توان برای شتاب هم تکرار کرد. نخست تغییر سرعت لحظه‌ای را در بازه‌ی زمان Δt حساب می‌کنیم و سپس حد آن را برای $\Delta t \to \circ$ به دست می‌آوریم .

شتاب میانگین: شتاب کمیتی است که تغییر سرعت در بازه‌ی زمان معینی را اندازه می‌گیرد. فرض کنید در بازه‌ی Δt سرعت جسم تغییر می‌کند: $\Delta\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)$. تغییر در مولفه‌ی x سرعت، Δv_x در بازه‌ی زمان $[t, t+\Delta t]$ عبارت است از

$$\Delta v_x = v_x(t+\Delta t) - v_x(t) \qquad (۱-۱۰)$$

تعریف: **شتاب میانگین** *مولفه‌ی x شتاب میانگین* برای بازه‌ی زمان Δt عبارت است از

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(v_x(t+\Delta t)) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (۱-۱۱)$$

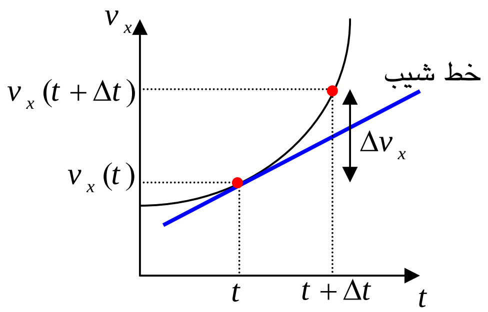
یکای شتاب در سامانه‌ی یکاهای SIمتر برمجذور ثانیه $(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$ است.

شتاب لحظه‌ای: در نمودار سرعت برحسب زمان، شتاب میانگین برای بازه‌ی زمان Δt، شیب خطی است که دو نقطه‌ی $(t, v_x(t))$ و $(t+\Delta t, v_x(t+\Delta t))$ را به هم وصل می‌کند. مانند حالت سرعت لحظه‌ای، برای تعیین مولفه‌ی x شتاب لحظه‌ای در زمان t هم از شیب خط مماس بر منحنی سرعت v_x برحسب زمان استفاده می‌کنیم.

$$a_x(t) \equiv \ell im_{\Delta t\to 0}\bar{a}_x = \ell im_{\Delta t\to 0}\frac{(v_x(t+\Delta t)-v_x(t))}{\Delta t} = \ell im_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x \qquad (۱-۱۲)$$

بنابراین ، بردار شتاب لحظه‌ای عبارت است از $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\hat{\mathbf{i}}$. در شکل (۱-۱۰) این ساختار هندسی نشان داده شده است. چون سرعت مشتق تابع مکان نسبت به زمان است، مولفه‌ی x شتاب هم مشتق دوم تابع مکان نسبت به زمان است. بنابراین،

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (۱-۱۳)$$



شکل ۱-۱۰

به همین ترتیب می‌توان مولفه‌های a_y ،a_z شتاب را تعریف کرد که آهنگ تغییر مولفه های سرعت نسبت به زمان‌اند:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x \equiv \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \dot{v}_y \equiv \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \dot{v}_z \equiv \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \qquad (۱-۱٤)$$

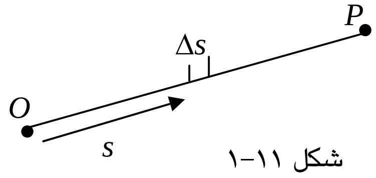
در اینجا از مختصات دکارتی یا کارتزی استفاده کردیم؛ اما برای بسیاری از مسایل، شاید مختصات دیگری مانند مختصات قطبی، کروی و استوانه‌ای سودمند باشد. هرگاه از مختصات غیر کارتزی استفاده شود روابط مربوط به مؤلفه‌های سرعت‌ها و شتاب‌ها باید حساب شوند. ما در آینده به این موضوع خواهیم پرداخت.

برای توصیف مکان ذره در دو یا سه بعد بهره‌گیری از مفهوم بردار برای نمایش مکان، سرعت و شتاب بسیار سودمند است. برای نمونه، مکان یک ذره را می‌توان با

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} = |\mathbf{r}|\,\hat{r} \qquad (۱-۱٥)$$

نشان داد که در آن $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ بردارهای یکه در راستای محورهای x ، y ، z اند و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای بردار $\mathbf{r}$ است و به صورت $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ تعریف می‌شود. توصیف جامع ویژگی‌های بردارها به فصل ۲ واگذار شده است.

نکته: ذره‌ای را در نظر بگیرید که بر روی خط راستی از نقطه‌ی O به نقطه‌ی P تغییر مکان می‌دهد. این ذره در زمان t مسافت s را از نقطه‌ی O بر روی مسیر راست خط شکل (۱-۱۱) می پیماید. در بازه‌ی زمان بعدی Δt ذره مسافت Δs را می پیماید. کمیت $\Delta s/\Delta t$ سرعت میانگین (میانگین زمانی) ذره در بازه‌ی Δt است.



شکل ۱-۱۱

گاهی مناسب‌تر است که واژه‌های سرعت میانگین و شتاب میانگین را به عنوان میانگین زمانی این کمیت‌ها، برای زمان کل T که ذره از نقطه‌ی O به نقطه‌ی P می‌رود به کار ببریم. این میانگین‌ها عبارت اند از:

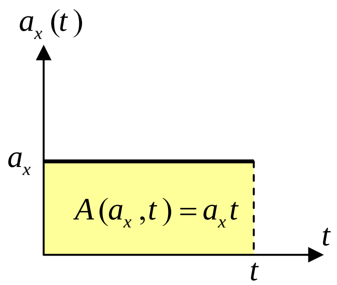
$$\bar{v}_s = \frac{OP}{T} \quad \text{و} \quad \bar{a}_s = \frac{v_P - v_0}{T} \qquad (۱-۱٦)$$

که در آنها خط تیره در بالای v_s و a_s به معنی میانگین زمانی است. $v_\circ$ سرعت در نقطه‌ی O و در راستای s (سرعت اولیه) است. v_P سرعت در نقطه‌ی P ودر راستای s است. واژه‌های سرعت یکنواخت و شتاب یکنواخت یعنی این که اندازه و جهت کمیت‌های سرعت و شتاب در تمام طول حرکت ثابت اند.

۵ ـ ۱ حرکت باشتاب ثابت در یک بعد

جسمی را در نظر بگیرید که در بازه‌ی زمان $\Delta t = [0, t]$ با شتاب ثابت حرکت می‌کند. وقتی شتاب a_x ثابت باشد، شتاب میانگین و شتاب لحظه‌ای با هم برابر می‌شوند. اگر مولفه‌ی x سرعت را در زمان $t = 0$ با $v_{x,0} \equiv v_x\ (t = t = 0)$ نشان دهیم آنگاه مولفه‌ی x شتاب عبارت است از

$$a_x = \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t) - v_{x,0}}{t} \qquad (۱-۱۷)$$



شکل ۱۲-۱

بنابراین، سرعت با تابع زیر برحسب زمان داده می‌شود

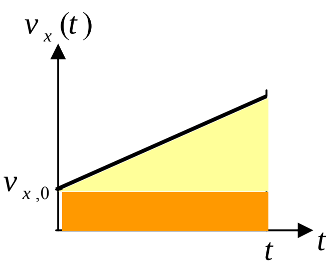
$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x t \qquad (۱-۱۸)$$

پس، اگر شتاب ثابت باشد، سرعت تابعی خطی (یعنی تابعی از مرتبه‌ی اول نسبت به زمان) از زمان است.

سرعت: سطح زیر منحنی شتاب برحسب تابعی از زمان است. در شکل (۱۲-۱) مولفه‌ی x شتاب برحسب زمان برای بازه‌ی زمان $\Delta t = t - 0$ رسم شده است. سطح زیر این خم $A(a_x, t) \equiv a_x t$ است. با استفاده از تعریف شتاب میانگین در رابطه‌ی (۱۲-۱) دیده می شود که این سطح عبارت است از $A(a_x, t) \equiv a_x t = \Delta v_x = v_x(t) - v_{x,0}$.

جابه‌جایی: سطح زیر منحنی سرعت بر حسب تابعی از زمان است. در شکل (۱۳-۱) خم سرعت بر حسب زمان رسم شده است. سطح زیر این خم در بازه‌ی زمان $[0, t]$ یک ذوذنقه‌ی نامنظم است که از یک مستطیل و یک مثلث تشکیل شده است. مساحت آن عبارت است از $A(v_x, t) = v_{x,0} t + (1/2)\left(v_x(t) - v_{x,0}\right)t$. اگر در این رابطه به جای سرعت، رابطه‌ی (۱۸-۱) را جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$A(v_x, t) = v_{x,0} t + (1/2)\left(v_{x,0} + a_x t - v_{x,0}\right)t = v_{x,0} t + (1/2) a_x t^2 \qquad (۱-۱۹)$$



شکل ۱۳-۱

از سوی دیگر، می‌توان سرعت اولیه و سرعت نهایی را باهم جمع و سپس به دو تقسیم کرد و سرعت میانگین را به دست آورد. داریم

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_x(t) + v_{x,0}) \qquad (۱-۲۰)$$

این روش تعیین سرعت میانگین با تعریف رابطه‌ی (۳-۱) فرق دارد. اما وقتی شتاب در بازه‌ی زمان معینی ثابت باشد، هر دو به یک نتیجه می‌انجامد. اگر رابطه‌ی (۱۸-۱) را به جای $v_x(t)$ در رابطه‌ی (۲۰-۱) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_x(t) + v_{x,0}) = \frac{1}{2}((v_{x,0} + a_x t) + v_{x,0}) = v_{x,0} + \frac{1}{2} a_x t \qquad (۱-۲۱)$$

حالا به یاد بیاورید که سرعت میانگین یعنی جابه‌جایی تقسیم بر زمان (توجه کنید که اینک از تعریفی برای سرعت میانگین استفاده می‌کنیم که همواره برقرار است، چه شتاب ثابت باشد و چه ثابت نباشد) است و برابر است با

$$\Delta x \equiv x(t) - x_\circ = \bar{v}_x t \qquad (۱-۲۲)$$

اگر در این رابطه، به جای $\bar{v}_x$ سمت راست رابطه‌ی (۲۱-۱) را جایگزین کنیم، جابه‌جایی به صورت زیر درمی‌آید

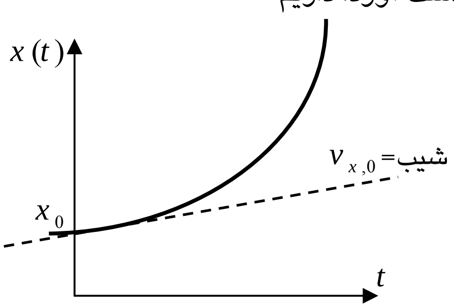
$$\Delta x \equiv x(t) - x_\circ = \bar{v}_x t = v_{x,\circ} t + \frac{۱}{۲} a_x t^۲ \qquad (۱-۲۳)$$

مقایسه‌ی این رابطه و رابطه‌ی (۱۹-۱) نشان می‌دهد که جابه‌جایی با سطح زیر منحنیِ مولفه‌ی x سرعت برحسب زمان برابر است :

$$\Delta x \equiv x(t) - x_\circ = \bar{v}_x t = v_{x,\circ} t + \frac{۱}{۲} a_x t^۲ = A(v_x, t) \qquad (۱-۲۴)$$

بنابراین ، می‌توان رابطه‌ی (۲٤-۱) را حل و مکان را به صورت تابعی از زمان به دست آورد. داریم

$$x(t) = x_\circ + v_{x,\circ} t + \frac{۱}{۲} a_x t^۲ \qquad (۱-۲۵)$$



شکل ۱٤-۱

در شکل (۱٤-۱) این تابع رسم شده است. توجه بکنید که برای تعیین تابع مکان در حرکت یک بعدی به دو ثابت $x_\circ$ و $v_{x,\circ}$ نیاز داریم. در واقع، این حالت خاصی از یک قضیه‌ی عمومی است. قضیه‌ی عمومی می‌گوید مسیر حرکت با دانستن دو ثابت برای هر درجه‌ی آزادی (یعنی تعداد مختصات لازم برای توصیف سامانه‌ی فیزیکی) کاملا و به طور یگانه مشخص می‌شود. چون ما حرکت را در یک بعد در نظر گرفتیم، مسئله‌ی ما تنها یک درجه‌ی آزادی دارد و بنابراین، دو ثابت بالا معادله‌ی مسیر یا مکان جسم را کاملا مشخص می‌کند.

گاهی هدف مسئله یافتن سرعت نهایی جسمی است که مسافت x با شتاب ثابت پیموده است. برای مثال، فرض کنید توپی از حالت سکون از بالای ساختمانی رها می‌شود. می‌خواهیم سرعت آن را پس از آنکه به اندازه‌ی x سقوط کرد، بیابیم. برای این کار می‌توان نخست از رابطه‌ی $x = v_{x,\circ} + (۱/۲) a_x t^۲$ (با $v_{x,\circ} = \circ$ در این مثال) زمان سقوط را حساب کرد و سپس آن را در $v(t) = v_{x,\circ} + a_x t$ قرار داد تا سرعت در آن زمان به دست آید. اما اگر نخواهیم زمان سقوط را بدانیم، می‌توان بین رابطه‌های (۱۸-۱) و (۲۵-۱) زمان t را حذف و رابطه‌ای بین x، v و a به دست آورد. از رابطه‌ی (۱۸-۱) داریم $t = (v_x(t) - v_{x,0})/a$ که اگر در رابطه‌ی (۲۵-۱) قرار دهیم، پس از ساده کردن آن خواهیم داشت

$$v_x^۲ = v_{x,\circ}^۲ + ۲a_x(x - x_\circ) \qquad (۱-۲۶)$$

مثال۲ -۱ اتومبیلی با سرعت ۳۰ m/s حرکت می‌کند. راننده ترمز می‌کند تا به ایستد. اگر ترمزکردن شتاب $-۵ \ \mathrm{m/s^2}$ به وجود آورد (علامت منفی یعنی اتوموبیل واشتابیده می‌شود). اتوموبیل چه مسافتی را پس از ترمز کردن می‌پیماید تا بایستد؟

حل: در این مثال جهت اولیه‌ی حرکت را جهت مثبت برگزیدیم. بنابراین، مسافتی را که اتوموبیل پس از اعمال ترمزمی‌پیماید تا بایستد، هم مثبت است؛ اما شتاب منفی است و سرعت نهایی صفر است. پس، اگر در رابطه‌ی (۲٦-۱) قرار دهیم $v_x = \circ$ و $v_{x,\circ} = ۳۰ \ \mathrm{m/s}$، خواهیم داشت: $(۳۰\,\mathrm{m/s})^۲ + ۲(-۵\,\mathrm{m/s^2})(x - x_\circ) = \circ \ \Rightarrow \ (x - x_\circ) = ۹۰\,\mathrm{m}$. توجه کنید که این مسافت چشمگیری است. عاملی که واشتابی را به وجود می‌آورد نیروی اصطکاک (فصل ۳ را ببینید) بین چرخ های اتوموبیل و جاده است. در روزهای بارانی این نیرو کمتر می‌شود و شتاب بازدارنده‌ای که ایجاد می‌شود از $۵ \ \mathrm{m/s^۲}$ هم کمتر می‌شود.

تاکنون آموختیم که اگر تابع مکان جسمی را بدانیم، می‌توان توابع سرعت و شتاب را با مشتق گیری نسبت به زمان از آن به

دست آورد. از رابطه‌ی (۵-۱) معادله‌ی سرعت به دست می‌آید و رابطه‌ی (۱۳-۱) می‌گوید اگر از تابع مکان دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم، تابع شتاب به دست خواهد آمد. همان طور که دیدید، این کار با مشتق گرفتن از تابع انجام می‌گیرد.

می‌توان از تعریف شتاب آغاز کرد و با ریاضیات مربوط به انتگرال‌گیری دوباره همه‌ی معادله‌های مربوط به حرکت را به دست آورد. می‌خواهیم شیوه‌ی این کار را نشان دهیم. انتگرال‌گیری به یافتن سطح زیر یک منحنی ارتباط دارد و به جزییات آن نخواهیم پرداخت. فرض می‌کنیم که خواننده با مقدمات انتگرال‌گیری آشناست.

رابطه‌ای که شتاب را تعریف می‌کند $a = dv/dt$ است. می‌توان دو طرف آن را در dt ضرب کرد و سپس از هر دو طرف انتگرال گرفت. خواهیم داشت

$$\int dv = \int a\,dt \quad \Rightarrow \quad v = \int a\,dt + C_۱ \qquad (۱-۲۷)$$

که در آن $C_۱$ ثابت انتگرال‌گیری است و مقدارش به شرایط اولیه‌ی مسئله بستگی دارد. در حالت خاص که شتاب مقدار ثابتی است، رابطه‌ی بالا به $v = at + C_۱$ کاهش می‌یابد. اگر شرایط اولیه‌ی مسئله چنان فراهم شود که در زمان $t = ۰$ سرعت جسم مقدار معین $v(t = ۰) = v_{۰,x}$ باشد و آن را در رابطه‌ی بالا جاگذاری کنیم، خواهیم داشت $v_{x,۰} = a(۰) + C_۱$ یا $C_۱ = v_{x,۰}$.

بنابراین ، معادله‌ی سینماتیک زیر به دست می‌آید.

$$v(t) = v_{x,۰} + at \qquad \text{(شتاب ثابت)} \qquad (۱-۲۸)$$

حال معادله‌ای را در نظر بگیرید که سرعت را تعریف می‌کند: $v = dx/dt$. دو طرف آن را در dt ضرب کنید و از هر دو طرف انتگرال بگیرید. خواهیم داشت

$$\int dx = \int v\,dt + C_۲ \qquad (۱-۲۹)$$

در اینجا هم C_2 ثابت انتگرال‌گیری است. اما $v(t) = v_{x,۰} + at$ است، اگر آن را در رابطه‌ی (۲۹-۱) قرار دهیم، رابطه‌ی (۲۹-۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$x = \int (v_{x,۰} + at)dt + C_۲ = \int v_{x,۰}dt + \int at\,dt + C_۲ \quad \Rightarrow \quad x = v_{x,۰}t + \frac{۱}{۲}at^۲ + C_۲ \qquad (۱-۳۰)$$

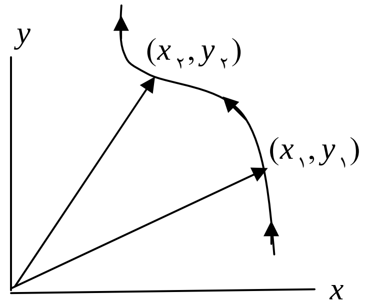
برای یافتن $C_۲$ باز هم از شرایط اولیه‌ی مسئله استفاده می‌کنیم. فرض کنید در زمان $t = ۰$ جسم در فاصله‌ی $x(t = ۰) = x_۰$ از مبداء مختصات است. آنگاه، از رابطه‌ی (۳۰-۱) خواهیم داشت $C_۲ = x_۰$ و در نتیجه رابطه‌ی (۳۰-۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$x = x_۰ + v_{x,۰}t + \frac{۱}{۲}at^۲ \qquad \text{(شتاب ثابت)} \qquad (۱-۳۱)$$

۶-۱ بردارهای مکان، سرعت و شتاب : حالت عمومی

ذره‌ای را در نظر بگیرید که در یک صفحه حرکت می‌کند. با گذشت زمان، ذره مسیری همانند شکل (۱۵-۱) را می‌پیماید. فرض کنید مختصات مکان ذره را به صورت تابعی از زمان می‌شناسیم. اگر در زمان t_1 مکان لحظه‌ای ذره $\mathbf{r}_۱ = (x_۱, y_۱)$ یا $\mathbf{r}(t_1) = [x(t_1),\ y(t_1)]$ و در زمان t_2 ذره در مکان $\mathbf{r}_۲ = (x_۲, y_۲)$ باشد. جابه‌جایی ذره در فاصله‌ی میان t_1 و t_2 عبارت است از

$$\mathbf{r}_۲ - \mathbf{r}_۱ = (x_۲ - x_۱\ ,\ y_۲ - y_۱) \qquad (۱-۳۲)$$



شکل ۱۵-۱

با در نظر گرفتن مکان ذره در زمان‌های دلخواه t و $t + \Delta t$ می‌توان رابطه‌ی (۳۲-۱)

را عمومی‌تر نوشت. جابه‌جایی ذره بین این دو زمان در شکل (۱۶-۱) نشان داده شده است و عبارت است از

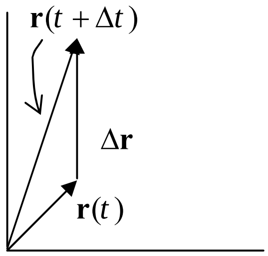
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \qquad (۱-۳۳)$$

رابطه‌ی برداری (۳۳-۱) با دو رابطه اسکالر زیر هم ارز است.

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \qquad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) \qquad (۱-۳٤)$$

بردار سرعت ذره روی این مسیر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{V} \equiv \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (۱-۳٥)$$



(شکل۱٦-۱)

که با دو معادله‌ی اسکالر زیر هم ارز است:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \qquad (۱-۳٦)$$

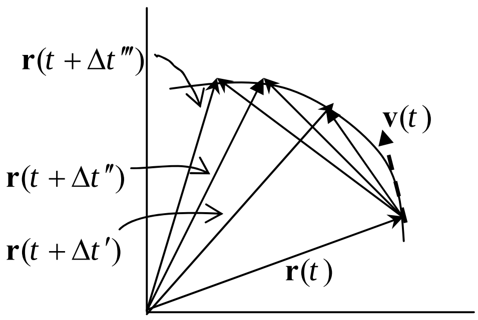
تعمیم آن به سه بعد بدیهی است. مؤلفه‌ی سوم عبارت است از:

$$v_z = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} \qquad (۱-۳۷)$$

پس، می‌بینیم که با نمادگذاری برداری می‌توان حرکت در سه بعد را با یک رابطه توصیف کرد؛ نتیجه‌ای که در پی آن بودیم. چون $\mathbf{r}$ بردار است می‌توان آن را برحسب مؤلفه‌هایش $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ نوشت و با یک مشتق گیری ساده مؤلفه‌های بردار سرعت را به دست آورد.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۳۸)$$

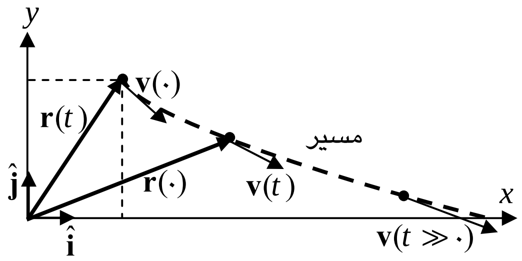
(**توجه**: چون جهت و اندازه‌ی بردارهای یکه در مختصات کارتزی تغییر نمی‌کند، $d\hat{\mathbf{i}}/dt$ و غیره را ننوشتیم. آنها صفرند. در مختصات غیر کارتزی این چنین نیست و باید تغییر بردارهای یکه را در نظر گرفت. به این موضوع خواهیم پرداخت.) فرض کنید ذره در زمان Δt به اندازه‌ی $\Delta \mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود. آنگاه برابر شکل (۱۷-۱)، $\Delta \mathbf{r}$ در حد $\Delta t \to ۰$ به مسیر مماس می‌شود. از رابطه‌ی $\Delta \mathbf{r} \approx (d\mathbf{r}/dt)\Delta t = \mathbf{v}\,\Delta t$ هم می‌توان دید که $\Delta \mathbf{r}$ در حد $\Delta t \to ۰$ به رابطه‌ی دقیق تبدیل می‌شود و نشان می‌دهد که $\mathbf{v}$ در حد $\Delta t \to ۰$ با $\Delta \mathbf{r}$ موازی و بردار سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ ذره همه جا بر مسیر آن مماس است.



شکل۱۷-۱

مثال ۳-۱ مکان ذره‌ای با $\mathbf{r} = A(e^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{i}} + e^{-\alpha t}\,\hat{\mathbf{j}})$ داده شده است. α مقدار ثابتی است. سرعت ذره را بیابید و مسیر آن را رسم کنید.

حل: داریم $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = A(\alpha e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} - \alpha e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}})$ و بنابراین $v = \sqrt{(v_x^۲ + v_y^۲)} = A\alpha\sqrt{(e^{۲\alpha t} + e^{-۲\alpha t})}$. برای رسم مسیر حرکت ذره بهتر است به حالت های حدی نگاه کنیم: در $t = ۰$ بردار سرعت $\mathbf{v}(۰) = \alpha A(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$ و بردار مکان $\mathbf{r}(۰) = A(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ اند. در حد $t \to \infty$ داریم $e^{\alpha t} \to \infty$ و $e^{-\alpha t} \to ۰$. در این حد $\mathbf{r} \to Ae^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{i}}$ برداری در راستای محور x هاست و بردار سرعت $\mathbf{v} = \alpha A\, e^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{j}}$ است. یعنی سرعت بدون محدودیت، با زمان افزایش پیدا می‌کند. شکل (۱۸-۱) این رفتار را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۸

شتاب را هم به همین روش تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}+\frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (۱-۳۹)$$

می‌توان بردارهای تازه‌ای از مشتق های بالا تر $\mathbf{r}$ ساخت، اما خواهیم دید که در بررسی دینامیک ذره‌ها $\mathbf{r}$ ، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ کافی‌اند

مثال ۴-۱ ذره‌ای از نقطه‌ی A و از حالت سکون به سوی نقطه‌ی D حرکت می‌کند. از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B (به مسافت x_1) شتاب ذره یکنواخت و برابر a_1 است. در فاصله‌ای که ذره بین نقطه‌ی B و نقطه‌ی C (به مسافت x_2) حرکت می‌کند، شتاب ندارد و در بازه‌ی سوم، بین نقطه‌ی C و نقطه‌ی D شتاب ذره یکنواخت و برابر $-a_2$ است. a_2 کمیت مثبتی است. علامت منفی یعنی شتاب ذره در جهت کاهش x است؛ یعنی ذره واشتابیده می‌شود (یعنی جهت شتاب و جهت سرعت خلاف یکدیگر است.) اندازه‌ی a_2 چنان است که ذره در نقطه‌ی D به حالت سکون می‌رسد. در چه زمان‌هایی ذره به نقاط B و C و D می‌رسد؟

حل: نخست توجه کنید که کمیت‌های داده شده‌ی مسئله عبارتند از a_1، a_2، x_1 و x_2. بنابراین، نتایج ما باید برحسب این کمیت ها بیان شوند. برای گام نخست حرکت، نقطه‌ی آغازین، x ، را در نقطه‌ی A برگزیدیم، جائی که در زمان $t=0$ ذره در آنجا جایگزین است. معادله حرکت عبارت است از:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}=a_1 \qquad (۱-۴۰)$$

اگر یک بار از این رابطه نسبت به زمان انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=a_1t+c_1 \qquad (۱-۴۱)$$

c_1 ثابت انتگرال‌گیری است و می‌توان آن را از شرایط اولیه‌ی مسئله به دست آورد. نمونه‌ای از شرایط اولیه این است که در زمان $t=0$ ذره از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد ؛ یعنی در زمان $t=0$ سرعت ذره صفر است، $\dot{x}(t=0)=0$.

$$\dot{x}(t=0)=0 \Rightarrow a_1(0)+c_1=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=0 \qquad (۱-۴۲)$$

اگراز رابطه‌ی (۱-۴۱) با $c_1=0$ برای بار دوم نسبت به زمان انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int\dot{x}\,dt=\int dx=\int(a_1t)dt \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}a_1t^2+c_2 \qquad (۱-۴۳)$$

دوباره c_2 ثابت انتگرال‌گیری است و با شرط این که در زمان $t=0$ ذره در $x=0$ است به دست می‌آید:

$$x(0)=0=(1/2)a_1(0)^2+c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2=0 \qquad (۱-۴۴)$$

بنابراین، اگر t_1 زمان لازم برای پیمودن مسافت x_1 باشد ، آنگاه t_1 عبارت است از

$$x_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2 \Rightarrow t_1=\sqrt{2x_1/a_1} \qquad (1-45)$$

سرعت ذره را در نقطه‌ی B ، یعنی $v_B=\dot{x}_B$، می‌توان از رابطه‌ی (۱-۴۱) چنین به دست آورد:

$$v_B=\dot{x}_B=a_1t_1=a_1\sqrt{2x_1/a_1}=\sqrt{2a_1x_1} \qquad (1-46)$$

ذره فاصله‌ی میان نقطه‌ی B و نقطه‌ی C را بدون شتاب می‌پیماید؛ یعنی با سرعت ثابتی که در نقطه‌ی B دارد. پس فاصله‌ی x_2 ازB تا C با سرعت $v_B=\sqrt{2a_1x_1}$ پیموده می‌شود. زمان لازم برای این پیمایش عبارت است از

$$x_2=v_Bt_2 \;\Rightarrow\; t_2=\frac{x_2}{v_B}=\frac{x_2}{\sqrt{2a_1x_1}} \qquad (1-47)$$

t_2 زمانی است که طول می‌کشد تا ذره از B به C برسد. پس در زمان

$$t_{AC}=t_1+t_2=\sqrt{2x_1/a_1}+\frac{x_2}{\sqrt{2a_1x_1}} \qquad (1-48)$$

ذره به نقطه‌ی C می رسد. در گام سوم حرکت، یعنی ازنقطه‌ی C تا نقطه‌ی D معادله‌ی حرکت

$$\ddot{x}=-a_3 \qquad (1-49)$$

است. با گزینش مبداء جدیدی برای x و t ، از اینجا داریم

$$\dot{x}=-a_3t+\dot{x}_B=-a_3t+\sqrt{2a_1x_1} \qquad (1-50)$$

اگر زمان لازم برای پیمودن فاصله ی بین نقاط C و D را با t_3 نشان دهیم، یعنی اگر جسم در لحظه‌ی t_3 به نقطه‌ی D برسد، جائی که در آن جا سرعت ذره صفر می‌شود (ذره به حال سکون در می‌آید) می‌توان نوشت

$$\dot{x}(t_3)=0=-a_3t^{3}+\sqrt{2a_1x_1} \quad\Rightarrow\quad t_3=\frac{\sqrt{2a_1x_1}}{a_3} \qquad (1-51)$$

پس، زمان لازم برای پیمایش مسافت از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی D عبارت است از:

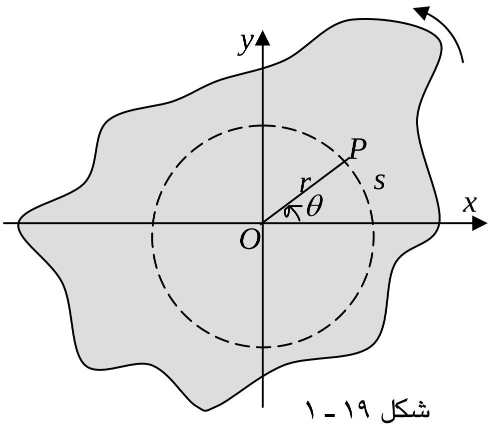
$$t_{AD}=t_1+t_2+t_3=\sqrt{2x_1/a_1}+\frac{x_2}{\sqrt{2a_1x_1}}+\sqrt{2a_1x_1/a_3} \qquad (1-52)$$

سقوط آزاد نمونه‌ی دیگری از حرکت با شتاب ثابت است. در نزدیکی سطح زمین اندازه شتاب سقوط $g=9.81\,\mathrm{m/s^2}$ و جهت آن رو به سوی مرکز زمین است. اندازه‌ی g با ارتفاع از سطح زمین تغییر می‌کند. چون این تغییرات برای ارتفاع‌های نه چندان زیاد چشمگیر نیست، همواره آن را مقدار ثابتی فرض خواهیم کرد. شتاب گرانش g با عرض جغرافیایی هم تغییر می‌کند. مقدار آن در استوا و در تهران یکی نیست. دلیل آن چرخش زمین حول محورش است. به بیان دیگر، زمین یک چارچوب لخت واقعی نیست، بلکه چارچوبی شتاب‌دار است. در فصل ۱۲ به این موضوع خواهیم پرداخت.

۱-۷ سرعت و شتاب زاویه‌ای

شکل (۱۹-۱) جسم تختی با شکل دلخواه را نشان می‌دهد. این جسم در صفحه‌ی xy قرار دارد و حول محور ثابتی می‌چرخد

که از نقطه‌ی O می‌گذرد و بر صفحه‌ی جسم عمود است. روی این جسم، نقطه‌ی P را به فاصله‌ی ثابت r از مبداء، در نظر بگیرید. چون فاصله‌ی نقطه‌ی P از مبداء O ثابت فرض شده است، با چرخش جسم، این نقطه روی دایره‌ای به شعاع r حول O خواهد گشت. درواقع، **هر نقطه‌ی** جسم، حول نقطه‌ی O مسیری دایره‌ای خواهد داشت. مکان نقطه‌ی P را می‌توان با



شکل ۱۹ ـ ۱

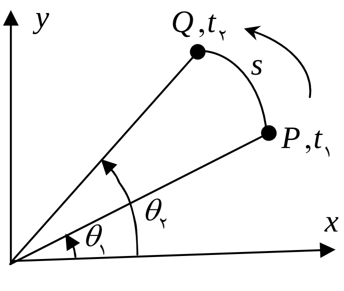
مختصات x و y آن مشخص کرد؛ اما برای حرکت چرخشی، بهتر است به جای مختصات کارتزی x و y از مختصات قطبی (r,θ) استفاده کنیم. در اینجا، تنها زاویه‌ی θ با زمان تغییر می‌کند؛ چون r را ثابت فرض کردیم (در مختصات کارتزی هر دوی x و y با زمان تغییر می‌کنند.) اگر ذره از محور xها $(\theta=\circ)$ حرکت کند وبه نقطه‌ی P برود، کمانی به طول s را روی مسیر دایره می‌پیماید. طول s با رابطه‌ی زیر به زاویه θ مربوط است.

$$\theta = s/r \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad s = r\theta \quad (\text{الف}) \qquad (۱-۵۳)$$

توجه کنید که یکای θ با رابطه‌ی (۵۳-۱ ب) تعریف شده است. زاویه‌ی θ نسبت طول کمان به شعاع دایره و در نتیجه یک عدد است، با این حال ما θ را معمولاً با یکای **رادیان** (rad) اندازه می‌گیریم:

یک رادیان زاویه‌ای است که طول کمان متناظر با آن با شعاع کمان برابر است.

چون پیرامون دایره $۲\pi r$ است، نتیجه می‌گیریم که ۳۶۰° برابر با $۲\pi r/r$ یا ۲π رادیان (یک دور) است. پس، داریم $۱rad = ۳۶۰^\circ/۲\pi = ۵۷,۳^\circ$. برای تبدیل زاویه از درجه به رادیان از برابری $۲\pi\,(\text{rad.}) = ۳۶۰^\circ$ می‌توان استفاده کرد: $\theta(rad) = (\pi/۱۸۰^\circ)\,\theta(deg)$. رابطه‌های (۵۳- ۱) می‌گویند جابه‌جایی را می‌توان برحسب کمان پیموده شده و یا برحسب زاویه‌ی متناظر با آن کمان بیان کرد. این دو هم‌ارز اند. فرض کنید در زمان $t_۱$ ذره در نقطه‌ی P با زاویه‌ی $\theta_۱$ است و پس از سپری شدن زمان Δt در زمان $t_۲$ ($t_۲ = t_۱ + \Delta t$) به نقطه‌ی Q با زاویه‌ی $\theta_۲$ می‌رسد (شکل ۲۰- ۱). در بازه‌ی زمانی Δt، بردار شعاع زاویه‌ی $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$ را جارو می‌کند که **جابه‌جایی زاویه‌ای** ذره است. حال می‌توان سرعت زاویه‌ای میانگین، $\bar{\omega}$، را تعریف کرد که نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای به بازه‌ی زمانی، Δt، است:



شکل ۲۰-۱

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_۲ - \theta_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۱-۵۴)$$

مثل سرعت خطی، سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای، ω، هم با حد رابطه‌ی (۵۴- ۱) وقتی Δt به سوی صفر میل کند، تعریف می‌شود

$$\omega \equiv \ell im_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad (۱-۵۵)$$

یکای سرعت زاویه‌ای rad/s یا $\text{s}^{-۱}$ است؛ چون رادیان بعد ندارد. اگر محور z را محور چرخش بنامیم آنگاه اگر θ افزایشی باشد (پاد ساعتگرد) ω را مثبت و اگر θ کاهشی باشد (ساعتگرد) ω را منفی تعریف خواهیم کرد. اگر سرعت زاویه‌ای جسم در

بازه‌ی زمانی Δt از ω_1 به ω_2 تغییر کند؛ گوئیم جسم دارای شتاب زاویه‌ای است. **شتاب زاویه‌ای میانگین** عبارت است از نسبت تغییر سرعت زاویه‌ای به بازه‌ی زمانی و به صورت زیر می‌توان آن را تعریف کرد

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (۱-۵۶)$$

مانند شتاب خطی، شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای را هم به صورت حد $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\omega/\Delta t$ تعریف می‌کنیم .

$$\alpha = \ell\text{im}_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\,\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \qquad (۱-۵۷)$$

یکای شتاب زاویه‌ای rad/s^2 یا s^{-2} است. توجه کنید که اگر اندازه‌ی ω با زمان افزایش یابد α مثبت و اگر اندازه ω با زمان کاهش پیدا کند، α منفی است.

برای حالتی که جسم حول یک ثابت محور می‌چرخد، می‌بینیم که سرعت زاویه‌ای، ω، و شتاب زاویه‌ای، α، همه‌ی ذرات تشکیل دهنده‌ی جسم، یکسان اند. یعنی کمیت‌های ω و α سرشت حرکت چرخشی جسم دارای بعد را مشخص می‌کنند. توجه کنید که جابه‌جایی زاویه‌ای، (θ)، سرعت زاویه‌ای، (ω)، و شتاب زاویه‌ای (α) همانندهای جابه‌جایی خطی (x)، سرعت خطی، (v) و شتاب خطی (a) درحرکت یک بعدی اند که در بخش قبلی از آنها سخن گفتیم. متغیرهای θ، ω و α تنها با یک ضریب طول از x و v و a متمایزند.

ما به علامت‌های ω و α اشاره کردیم و گفتیم که چگونه آنها را مشخص می‌کنیم؛ اما برای آنها جهتی را در فضا معین نکردیم. درواقع، هر دوی ω و α کمیت‌های برداری اند و لازم است جهت آنها مشخص شود. در چرخش حول محور ثابت، تنها جهتی که در فضا حرکت چرخشی را مشخص می‌کند، جهت در راستای محور چرخش است. با وجود این، باید سوی این کمیت‌ها را تعیین کنیم، یعنی این که آیا جهت این کمیت‌ها بیرون از و یا به سوی صفحه‌ی شکل (۱۹-۱) اند. جهت ω همواره در راستای محور چرخش است و بنا به قرارداد، اگر چرخش پاد ساعتگرد باشد، جهت ω را **بیرون از صفحه** و اگر چرخش ساعتگرد باشد، جهت ω را **به سوی صفحه** انتخاب می‌کنیم. این **قاعده دست راست** است. جهت α از تعریف آن، $\alpha \equiv d\,\omega/dt$، به دست می‌آید. اگر ω با زمان افزایش پیدا کند آنگاه α با ω همسو است و اگر ω با زمان کاهش یابد جهت α پادموازی با ω است. همان گونه که در بررسی حرکت شتاب‌دار خطی دیدیم، ساده‌ترین حرکت شتاب‌دار، حرکت با شتاب ثابت است. در حرکت چرخشی حول محور ثابت هم ساده‌ترین حرکت شتاب‌دار، حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت است. بنابراین، به پروراندن روابط سینماتیکی حرکت چرخشی با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌پردازیم. اگر رابطه‌ی (۱-۵۶) را به صورت $d\omega = \alpha\, dt$ بنویسیم و در زمان $t_0 = 0$ اجازه دهیم $\omega = \omega_0$ باشد، آنگاه از این رابطه می‌توان به صورت زیر انتگرال گرفت:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\,\omega = \int_0^t \alpha \quad dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t = \text{ثابت} \qquad (۱-۵۸)$$

اگر رابطه‌ی (۱-۵۸) را در (۱-۵۵) قرار دهیم و دوباره انتگرال بگیریم (فرض کنید در $t_0 = 0$ ، $\theta = \theta_0$ است) خواهیم داشت:

$$\omega dt = d\,\theta \Rightarrow \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\,\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (۱-۵۹)$$

اگر بین رابطه‌های (۵۹-۱) و (۵۸- ۱) ، t را حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (۱-۶۰)$$

توجه کنید که این رابطه‌های سینماتیکی برای حرکت چرخشی با شتاب ثابت، همانند رابطه‌های سینماتیکی برای حرکت خطی با شتاب ثابت اند که $x \to \theta$ ، $v \to \omega$ و $a \to \alpha$ تبدیل شده‌اند. جدول ۱- ۱ این مقایسه را نشان می‌دهد.

جدول ۱ ـ ۱ مقایسه‌ی رابطه‌های سینماتیکی میان حرکت چرخشی وحرکت خطی با شتابهای ثابت	
حرکت چرخشی با شتاب ثابت a	**حرکت چرخشی با شتاب ثابت** α
$v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

مثال ۵-۱ چرخی با شتاب زاویه‌ای ثابت $۳{,}۵\ \mathrm{rad/s^2}$ می‌چرخد. اگر در زمان $t_0 = 0$ سرعت زاویه‌ای چرخ $۲\ \mathrm{rad./s}$ باشد. **(الف)**: چرخ در دو ثانیه چه زاویه‌ای خواهد چرخید. **(ب)**: در لحظه‌ی $t = ۲\mathrm{s}$ سرعت زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ **(پ)**: در بازه‌ی بین $t = ۲\mathrm{s}$ و $t = ۳\mathrm{s}$، چرخ چه زاویه‌ای را چرخیده است؟

حل: (الف)

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$= \left(۲{,}۰\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)(۲\mathrm{s}) + \frac{1}{2}\left(۳{,}۵\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)(۲\mathrm{s})^2 = ۱۱\mathrm{rad} = ۶۳۰^\circ = ۱{,}۷۵\ \mathrm{rev.} \qquad (۱-۶۱)$$

(ب):

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = ۲{,}۰\frac{rad}{s} + \left(۳{,}۵\frac{rad}{s}\right)(۲S) = ۹{,}۰\frac{rad}{s} \qquad (۱-۶۲)$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطه‌ی (۶۰-۱) و پاسخ قسمت (الف) هم به دست آوریم. انجام دهید.

(پ): زاویه‌ی چرخیده شده در مدت $t = ۳\mathrm{s}$ عبارت است از:

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \left(۲{,}۰\frac{rad}{s}\right)(۳s) + \frac{1}{2}\left(۳{,}۵\frac{rad}{s^2}\right)(۳s)^2 = ۲۱{,}۷۵rad \qquad (۱-۶۳)$$

زاویه‌ی چرخیده شده در زمان $t = ۲\mathrm{s}$ را در بخش(الف) حساب کردیم. اگر این دو را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$(۲۱{,}۷۵\ rad) - (۱۱\ \ rad) = ۱۰{,}۷۵\ rad$$

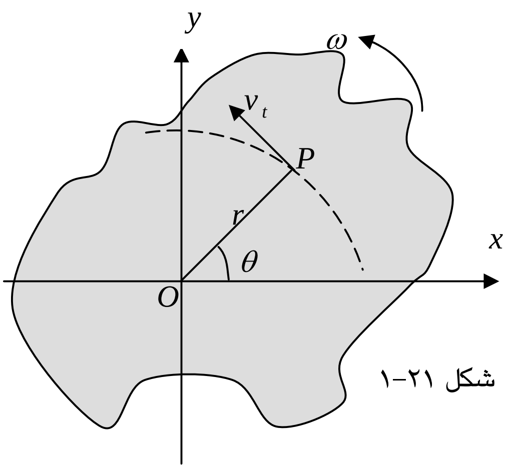
۸-۱ رابطه‌ی میان کمیت های زاویه‌ای و خطی

در اینجا خواهیم کوشید تا برخی رابطه‌های سودمند میان سرعت و شتاب زاویه‌ای و همانندهای خطی آن‌ها را پیدا کنیم. برای این کار باید به یاد داشته باشیم که وقتی یک جسم حول محور ثابتی می‌چرخد، **هر ذره‌ی جسم** روی دایره‌ای می‌چرخد که

مرکز آن محور چرخش است. نخست رابطه‌ی میان سرعت زاویه‌ای جسم چرخنده‌ی شکل (۲۱- ۱) و سرعت مماسی، v_t، نقطه ای مانند P را روی جسم بررسی می‌کنیم. چون نقطه‌ی P روی دایره حرکت می‌کند، بردار سرعت خطی همواره بر مسیر دایره‌ای آن مماس است. واژه‌ی **سرعت مماسی** را به این خاطر به کار بردیم. اندازه‌ی سرعت مماسی نقطه‌ی P، بنا به **تعریف** عبارت است از ds/dt که در آن s طول کمانی است که این نقطه روی مسیر دایره‌ای پیموده است. به یاد بیاوریم که $s = r\theta$ و r مقدار ثابتی است. بنابراین داریم $v_t = ds/dt = d(r\theta)/dt = r\left(d\theta/dt\right) = r\omega$. پس:

$$v_t = r\omega \qquad (۱-٦٤)$$

یعنی سرعت مماسی نقطه‌ای روی جسم چرخان، یا سرعت مماسی نقطه‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، برابر است با فاصله‌ی نقطه از محور چرخش ضربدر سرعت زاویه‌ای چرخش. اگرچه همه‌ی نقاط روی جسم **سرعت زاویه‌ای** یکسان دارند، اما **سرعت خطی** همه‌ی نقاط یکی نیست. درواقع، رابطه‌ی (٦٤-۱) نشان می‌دهد که سرعت خطی نقطه‌ای روی جسم چرخان با افزایش فاصله‌ی نقطه از محور چرخش، افزایش پیدا می‌کند. اینک می‌توان رابطه‌ی میان شتاب زاویه‌ای یک جسم چرخان و شتاب مماسی نقطه‌ی P را بدست آورد. کافی است که از v_t مشتق گرفت



شکل ۲۱-۱

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\omega\right) = r\frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega} = r\alpha \qquad (۱-٦٥)$$

پس:

$$a_t = r\alpha \qquad (۱-٦٦)$$

بنابراین، شتاب مماسی نقطه‌ای که به فاصله‌ی r از محور چرخش روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد، برابر است با فاصله‌ی نقطه از محور چرخش ضربدر شتاب زاویه‌ای چرخش.

۹- ۱ حرکت دایره‌ای یکنواخت

ذره‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت خطی ثابت v روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. بیشتر وقت‌ها برای دانشجویان شگفت آور است که **اگرچه جسم با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، با این حال شتاب دارد**. برای این که ببینیم چرا این چنین است به تعریف شتاب میانگین $\bar{\mathbf{a}} \equiv \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ توجه کنید.

توجه داشته باشید که شتاب به **تغییر بردار سرعت** بستگی دارد. چون سرعت کمیت برداری است؛ پس شتاب می‌تواند به دو شیوه به وجود بیاید: (الف) تغییر**اندازه‌ی** بردار سرعت و (ب) تغییر در **راستای** بردار سرعت. درحرکت دایره‌ای یکنواخت که جسم با سرعت ثابت روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، جهت بردار سرعت از لحظه‌ای به لحظه‌ی بعدی تغییر می‌کند. در نتیجه، بردار شتاب همواره بر مسیر عمود و به سوی مرکز دایره است. شتابی با این سرشت را **شتاب مرکزگرا** می‌نامند. چون این شتاب همواره در راستای شعاع (یا بردار مکان) است ما آن را با نماد a_r نشان می‌دهیم. مقدار آن عبارت است از

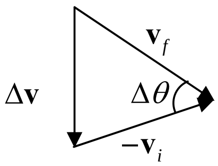
$$a_r = \frac{v^{۲}}{r} \qquad (۱-۶۷)$$

اینک، رابطه‌ی بالا را اثبات می‌کنیم. برای این کار شکل (۲۲-۱ الف) را در نظر بگیرید؛ در این شکل جسمی نشان داده شده است که در زمان t_i در نقطه‌ی P سرعتش $\mathbf{v}_i$ است و در زمان t_f با سرعت $\mathbf{v}_f$ به نقطه‌ی Q می‌رسد. فرض کنید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_f$ تنها از نظر راستا با یکدیگر متفاوتند؛ یعنی حرکت یکنواخت است و اندازه‌ی سرعت در دو نقطه با هم برابر است، ($v_f = v_i = v$).

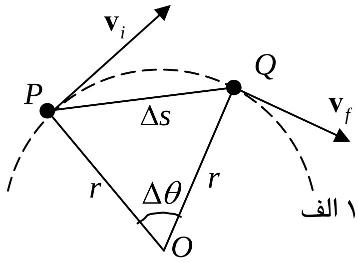
برای محاسبه‌ی شتاب، از تعریف شتاب میانگین آغاز می‌کنیم.

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۱-۶۸)$$

این رابطه نشان می‌دهد که باید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_f$ را به طور برداری از یکدیگر کم کنیم. $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$ تغییر بردار سرعت است،



شکل۲۲-۱ب



شکل ۲۲- ۱ الف

یعنی $\Delta\mathbf{v}$ با افزودن $\mathbf{v}_f$ به بردار $-\mathbf{v}_i$ به دست می‌آید که در شکل (۲۲- ۱ب) نشان داده شده است. توجه کنید که اگر Δt خیلی کوچک باشد، Δs و $\Delta\theta$ نیز بسیار کوچک خواهند بود. در این صورت $\mathbf{v}_f$ تقریباً با $\mathbf{v}_i$ موازی می‌شود و بردار $\Delta\mathbf{v}$ به تقریب بر هر دوی آنها عمود و جهتش به سوی مرکز دایره می‌شود. حالا مثلث شکل (۲۲- ۱الف) را نگاه کنید که ضلع‌های آن r و Δs است. این مثلث و مثلث شکل (۲۲- ۱ب) متشابه‌اند (چرا؟) و می‌توان نسبت طول ضلع‌های آنها را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} \qquad (۱-۶۹)$$

و از این رابطه می‌توان Δv را حساب کرد

$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta s \qquad (۱-۷۰)$$

اگر دو طرف را به Δt تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (۱-۷۱)$$

سمت چپ این رابطه تعریف شتاب میانگین است، $v \equiv \Delta s/\Delta t$. پس:

$$\bar{a} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} = \frac{v^{۲}}{r} \qquad (۱-۷۲)$$

حال اگر نقطه‌های P و Q در شکل (۲۲- ۱الف) خیلی به یکدیگر نزدیک باشند، آنگاه $\Delta\mathbf{v}$ به سوی مرکز دایره خواهد شد؛ چون شتاب با $\Delta\mathbf{v}$ هم سوست. جهت آن هم به سوی مرکز خواهد شد. افزون بر این، با نزدیک شدن نقطه‌های P و Q به یکدیگر، Δt

به صفر می‌گراید و کسر $\Delta s/\Delta t$ به سرعت v میل می‌کند. بنابراین، در حد $\Delta t \to ۰$ شتاب برابر $a_r = v^۲/r$ می‌شود.

نتیجه: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب به سوی مرکز دایره است و اندازه‌ی آن $v^۲/r$ است.

در بخش ۸- ۱ دیدیم که اگر ذره‌ای بر روی مسیر دایره‌ای حرکت کند و اندازه‌ی سرعت آن تغییر کند آنگاه، ذره شتاب مماسی هم خواهد داشت. بنابراین، اگر ذره‌ای بر روی خمی با بردار سرعت متغیر حرکت کند، هم شتاب شعاعی مرکزگرا و هم شتاب مماسی خواهد داشت. این وضعیت را اینک بررسی می‌کنیم.

فرض کنید ذره‌ای بر روی مسیر خمیده همانند شکل (۲۳-۱) حرکت می‌کند. اندازه و جهت بردار سرعت ذره تغییر می‌کند. در این وضعیت، همواره سرعت ذره مماس بر مسیر است، اما بردار شتاب $\mathbf{a}$ با راستای مسیر زاویه می‌سازد. با حرکت ذره در امتداد مسیر خمیده‌ی شکل (۲۳-۱)، می‌بینیم که جهت بردار شتاب کل $\mathbf{a}$ از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. این بردار را می‌توان به دو مؤلفه تجزیه کرد: بردار شعاعی، a_r، در راستای شعاع و بردار مماسی، a_t، که بر مسیر مماس است. یعنی بردار شتاب کل، $\mathbf{a}$، را می‌توان به صورت جمع برداری این دو مؤلفه نوشت:

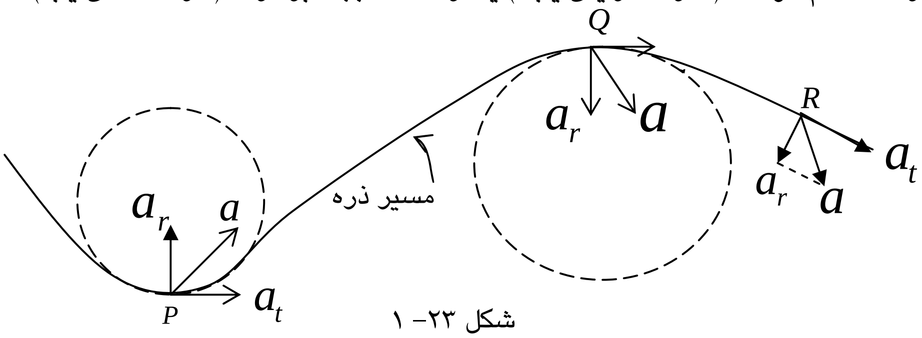
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \qquad (۷۳- ۱)$$

همانگونه که پیش‌تر هم گفتم ، مولفه‌ی شعاعی شتاب ، نتیجه‌ی تغییر جهت بردار سرعت است و اندازه‌ی آن $a_r = v^۲/r$ است.

مؤلفه‌ی مماسی شتاب در اثر تغییر اندازه‌ی بردار سرعت است؛ $a_t \equiv dv/dt$. چون a_r و a_t مؤلفه‌های عمود بر هم بردار $\mathbf{a}$ اند، در نتیجه اندازه‌ی شتاب کل برابر است با $a = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲}$.

مثل حرکت دایره‌ای یکنواخت، a_r همیشه به سوی مرکز خم است. برای سرعت معینی، اگر شعاع خم کوچک باشد، a_r بزرگ (مانند نقطه‌های P و Q در شکل ۲۳- ۱) و اگر شعاع خم بزرگ باشد a_r کوچک است (مانند نقطه‌ی R در شکل (۲۳- ۱)).

جهت a_t یا با جهت بردار سرعت $\mathbf{v}$ هم‌سوست (اگر v افزایش یابد) یا در خلاف جهت بردار $\mathbf{v}$ (اگر v کاهش یابد) است.



شکل ۲۳- ۱

توجه کنید که برای حرکت دایره‌ای یکنواخت، چون v ثابت است، $a_t = ۰$ و در نتیجه، شتاب همواره شعاعی است. این را پیشتر نیز دیدیم. افزون بر این، اگر جهت $\mathbf{v}$ تغییر نکند آنگاه شتاب شعاعی وجود نخواهد داشت و حرکت یک‌بعدی خواهد بود ($a_r = ۰$ و $a_t \neq ۰$).

مثال ۶-۱ توپی را از انتهای ریسمانی به طول ۰٫۵m آویخته‌ایم. مجموعه تحت تأثیر گرانش در صفحه‌ی عمودی تاب می‌خورد. هنگامی که ریسمان با خط عمودی زاویه‌ی $\theta = ۲۰^\circ$ می‌سازد، سرعت توپ ۱٫۵ m/s است

(الف) : مؤلفه‌ی شعاعی شتاب را بیابید.

(ب): در این لحظه شتاب مماسی توپ $a_t = g\sin ۲۰^\circ = ۳,۳۶\,\mathrm{m/s^۲}$ است. اندازه و جهت شتاب کل را به دست آورید.

حل: داریم:

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۱,۵\,\mathrm{m/s})^۲}{۰.۵\mathrm{m}} = ۴,۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲} \tag{۱-۷۴}$$

$$a = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲} = \sqrt{(۴,۵)^۲ + (۳,۳۶)^۲}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲} = ۵,۶۲\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲} \tag{۱-۷۵}$$

اگر ϕ زاویه‌ی بین **a** و ریسمان باشد آنگاه:

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{a_t}{a_r} = \tan^{-۱}\left(\frac{۳,۳۶\,\mathrm{m/s^۲}}{۴۵\,\mathrm{m/s^۲}}\right) = ۳۶,۷^\circ \tag{۱-۷۶}$$

توجه کنید که جهت و اندازه‌ی همه‌ی بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{a}_t$ و $\mathbf{a}_r$ با حرکت توپ در مسیر دایره‌ای تغییر می‌کنند. وقتی توپ در پائین‌ترین نقطه $(\theta = ۰)$ قرار دارد، $a_t = ۰$ است، زیرا در آنجا g مؤلفه‌ی مماسی ندارد و a_r **بیشینه** مقدار خود را دارد (چون در آنجا v بیشینه است). هنگامی که توپ در بالاترین نقطه $(\theta = ۱۸۰^\circ)$ باشد، باز هم a_t صفر است. اما a_r کمینه است؛ چون v کمینه مقدار خود را در آنجا دارد. و سرانجام در دو وضعیت افقی $(\theta = ۲۷۰^\circ,\ \theta = ۹۰^\circ)$ داریم $|\mathbf{a}_t| = g$ و a_r مقداری میان کمینه و بیشینه را داراست.

مثال ۷-۱ صفحه‌ی چرخانی، مانند صفحه‌ی گرام، که با آهنگ ۳۳ دور در دقیقه می‌چرخد، ۲۰s طول می‌کشد تا از چرخش بایستد. **(الف)**: اگر شتاب یکنواخت باشد، شتاب زاویه‌ای صفحه را حساب کنید. **(ب)**: صفحه چند دور می‌چرخد تا این که بایستد؟ **(پ)**: اندازه‌های مؤلفه‌های شعاعی و مماسی شتاب یک نقطه‌ی روی لبه‌ی صفحه را در زمان $t = ۰$ به دست آورید. فرض کنید شعاع صفحه ۱۴cm است. **(ت)**: سرعت خطی اولیه‌ی یک نقطه در لبه‌ی صفحه چقدر است؟

حل: **(الف)** : یک دور ۲π rad. است. پس سرعت زاویه‌ای اولیه عبارت است از:

$$\omega_\circ = (۳۳\,rev/\mathrm{min})(۲\pi\,rad/rev)\left(\frac{۱}{۶۰}\,\mathrm{min}/s\right) = ۳,۴۶\,rad/s \tag{۱-۷۷}$$

با استفاده از $\omega = \omega_\circ + \alpha t$ و این که در زمان $t = ۲۰$ s ، $\omega = ۰$ است خواهیم داشت:

$$\alpha = -\frac{\omega_\circ}{t} = -\frac{۳,۴۶\,\mathrm{rad/s}}{۲۰\mathrm{s}} = -۰,۱۷۳\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^۲} \tag{۱-۷۸}$$

علامت منها نشان می‌دهد که سامانه واشتابیده می‌شود (ω کاهش می‌یابد.)

(ب): از رابطه‌ی (۵۹-۱) استفاده کنید: مقدار جابه جایی پس از ۲۰ ثانیه برابر است با:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_\circ = \omega_\circ t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = \left[۳,۴۶(۲۰) + \frac{۱}{۲}(-۰,۱۷۳)(۲۰)^۲\right]\mathrm{rad} = ۳۴,۶\,\mathrm{rad} \tag{۱-۷۹}$$

که برابر با $۳۴,۶/۲\pi = ۵,۵۱$ دور است.

(پ):

$$a_t = r\alpha = (\text{١٤ cm})(\text{٠,١٧٣ rad/s}^{\text{٢}}) = \text{٢,٤٢ cm/s}^{\text{٢}} \qquad (\text{١-٨٠})$$

$$a_r = \frac{v^{\text{٢}}}{r} = \frac{(r\omega_\circ)^{\text{٢}}}{r} = r\omega_\circ^{\text{٢}} = (\text{١٤ cm})(\text{٣,٤٦ rad/s}^{\text{٢}}) = \text{١٦٨ cm/s}^{\text{٢}} \qquad (\text{١-٨١})$$

(ت): داریم: $v = r\omega$. پس

$$v_\circ = r\omega_\circ = (\text{١٤cm})\left(\text{٣,٤٦}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = \text{٤٨,٤٤ cm/s} \qquad (\text{١-٨٢})$$

مثال ٨-١ جسمی بر روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می کند. در زمان $t = \circ$ سرعت آن $V_\circ$ است. شرایطی را فراهم کرده‌ایم که از این لحظه به بعد، شتاب‌های مماسی و شعاعی این ذره برای همه‌ی زمان‌ها با هم برابر باشند.

(الف): سرعت جسم و مسافتی را که می پیماید به صورت تابعی از زمان بیابید.

(ب): در این مسئله زمان خاصی وجود دارد. این زمان چیست و چرا خاص است

حل: **(الف)** داریم $a_t = dV/dt$ و $a_r = V^{\text{٢}}/R$ و به ما گفته شده است که $dV/dt = \left(V^{\text{٢}}/R\right)$. از این رابطه می‌توان با جداسازی متغیرها انتگرال گرفت.

$$\int_{V_\circ}^{V}\frac{dV}{V^{\text{٢}}} = \int_\circ^t\frac{dt}{R} \Rightarrow \left(-\frac{\text{١}}{V}\right)\Bigg|_{V_\circ}^{V} = \frac{t}{R} \Rightarrow \frac{\text{١}}{V_\circ} - \frac{\text{١}}{V} = \frac{t}{R} \Rightarrow V(t) = \frac{\text{١}}{\frac{\text{١}}{V_\circ} - \frac{t}{R}} \qquad (\text{١-٨٣})$$

برای یافتن مسافت پیموده شده، x، از $V = dx/dt$ استفاده کنید

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Vdt \Rightarrow \int_\circ^x dx = \int_\circ^t Vdt \Rightarrow x = \int_\circ^t \frac{dt}{\frac{\text{١}}{V_\circ} - \frac{t}{R}} \Rightarrow x = -R\,\ell n\left(\frac{\text{١}}{V_\circ} - \frac{t}{R}\right)\Bigg|_\circ^t$$

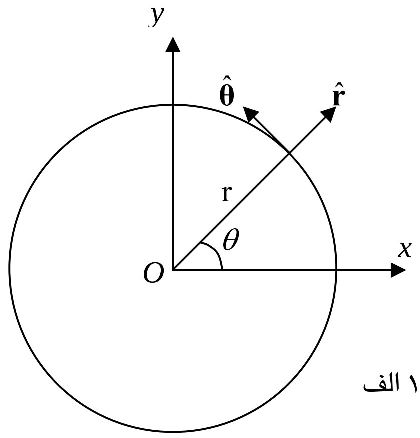
$$\Rightarrow x = -R\left[\ell n\left(\frac{\text{١}}{V_\circ} - \frac{t}{R}\right) - \ell n\left(\frac{\text{١}}{V_\circ}\right)\right] \Rightarrow x = -R\,\ell n\left[\frac{\frac{\text{١}}{V_\circ} - \frac{t}{R}}{\frac{\text{١}}{V_\circ}}\right] \Rightarrow x(t) = -R\,\ell n\left(\text{١} - \frac{V_\circ t}{R}\right) \qquad (\text{١-٨٤})$$

(ب): زمان ویژه $T = R/V_\circ$ است. در این زمان هر دوی x و V بینهایت می‌شوند. پس از این زمان، حرکت بالا دیگر ناممکن است.

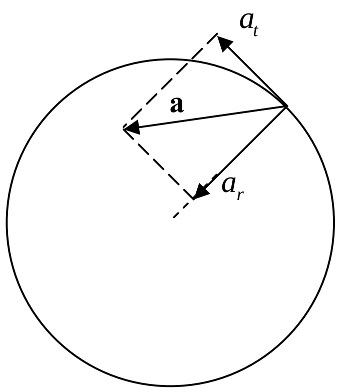
برای ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، بهتر است شتاب را برحسب بردارهای یکه بنویسیم. این کار را با تعریف کردن بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ می‌توان انجام داد. $\hat{\mathbf{r}}$ بردار **یکه‌ای در راستای شعاع و به سوی بیرون از مرکز خم است**. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار **یکه‌ی مماس بر مسیر دایره‌ای است**؛ شکل (٢٤-١ الف) را ببینید. جهت مثبت بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ درجهت افزایش زاویه‌ی θ یا پادساعتگرد است. توجه کنید که $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ به همراه ذره، جابجا می‌شوند و در نتیجه نسبت به ناظر ساکن، با زمان تغییر می‌کنند. با این نمادگذاری، می‌توان شتاب کل را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_r=\frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{v^۲}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۸۵)$$

این بردارها در شکل (۲٤-۱ب) نشان داده شده‌اند. علامت منفی برای $\mathbf{a}_r$ نشان می‌دهد که این مؤلفه‌ی شتاب همواره به سوی مرکز و در **خلاف** جهت بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ است. در بخش ۸-۱ دیدیم که شتاب مماسی ذره‌ای در فاصله‌ی r از محور چرخش



شکل ۲٤-۱ الف



شکل ۲٤-۱ ب

$a_t=r\alpha$ است . در نتیجه رابطه‌ی (۸۵-۱) را می‌توان به صورت

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_r=r\,\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{v^۲}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۸٦)$$

نوشت. پس، شتاب کل ذره عبارت است از $\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_r$ و اندازه‌ی شتاب کل آن برابر است با:

$$a=\sqrt{a_t^۲+a_r^۲}=\sqrt{r^۲\alpha^۲+\left(v^۲/r\right)^۲} \qquad (۱-۸۷)$$

از آنجائی که $v=r\omega$ است، داریم

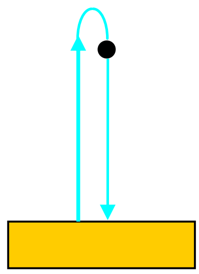
$$a=\sqrt{r^۲\alpha^۲+r^۲\omega^٤}=r\sqrt{\alpha^۲+\omega^٤} \qquad (۱-۸۸)$$

۱۰-۱ سرعت و شتاب نسبی

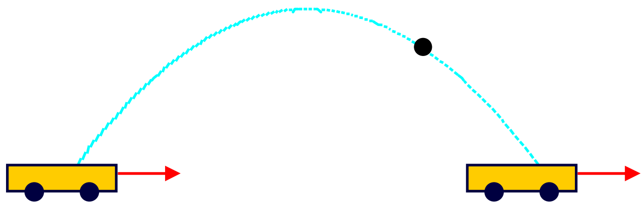
اندازه‌گیری‌های ما از مکان، سرعت و شتاب جسم، به ناظری بستگی دارد که این اندازه‌گیری‌ها را انجام می‌دهد. چه بسا، نتیجه‌هایی را که دو ناظر متفاوت از پدیده‌ای یکسان به دست می‌آورند متفاوت باشد. اما چون پدیده‌ی مورد بررسی یگانه است و رفتارش مستقل از ناظر است؛ نتایج به دست آمده توسط ناظرهای متفاوت باید به یکدیگر مربوط باشند. یعنی از نتایج اندازه‌گیری‌های یک ناظر باید بتوان به نتایجی که ناظر دیگری می‌توانست به دست آورد دسترسی پیدا کرد. در این بخش به جستجوی این رابطه میان اندازه‌گیری‌های ناظرهای متفاوت از پدیده‌ای یکسان خواهیم پرداخت. در فصل ۱۲ عمومی‌ترین حالت را بررسی خواهیم کرد. اینک حالت خاصی را در نظر می گیریم که دو ناظر نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. به بیان دیگر، حرکت جسم را از دیدگاه ناظرهای لخت که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند بررسی می‌کنیم. نخست، فرض کنید، دو اتومبیل با سرعت‌های ۵۰ km/h و ٦۰ km/h در یک جهت حرکت می‌کنند. سرنشینی که در اتومبیل کُندرو نشسته است؛ خواهد گفت که سرعت اتومبیل تُندرو نسبت به اتومبیل کندرو ۱۰ km/h است. البته، ناظر ساکنی که کنار جاده ایستاده

است، سرعت اتومبیل تندرو را ۶۰ km/h اندازه‌گیری می‌کند. این مثال نشان می‌دهد که ناظرهای متفاوت نتیجه‌های متفاوت از یک پدیده (سرعت اتومبیل تندرو) ارائه می‌دهند.

نمونه‌ی دوم: فرض کنید سرنشینی در اتومبیل در حال حرکت یکنواخت (ناظرA) توپی را به بالا پرتاب می‌کند؛ برای این سرنشین (یا در این چارچوب مرجع) توپ در مسیری عمودی به بالا می‌رود و سپس در همان مسیر به پائین برمی‌گردد (شکل ۲۵– ۱الف). ناظری که در کنار جاده ساکن ایستاده است (ناظر B) و به مسیر حرکت توپ در هوا می‌نگرد، آن را به صورت یک سهمی می‌بیند (شکل ۲۵– ۱ب). نمونه‌های فراوانی از این دست وجود دارند. نمونه‌ی ساده‌ی دیگری رهاشدن و فرو افتادن بسته‌ای از هواپیمایی است که با سرعت ثابت به موازات سطح زمین پرواز می‌کند. سرنشین هواپیما مسیر بسته را خط راستی توصیف خواهد کرد که رو به سوی زمین است. ناظر در روی زمین مسیر بسته را سهمی خواهد دید. نسبت به زمین، سرعت بسته هم مولفه‌ی عمودی دارد (که نتیجه‌ی شتاب گرانش است و مقدار آن با اندازه‌گیری سرنشین هواپیما یکسان است) وهم مولفه‌ی افقی (که حرکت هواپیما به بسته داده است). اگر هواپیما به حرکت افقی خود با همان سرعت ادامه بدهد؛ بسته در هنگام برخورد با زمین، درست در زیر هواپیما خواهد بود (اگر از اصطکاک هوا چشم‌پوشی کنیم)!

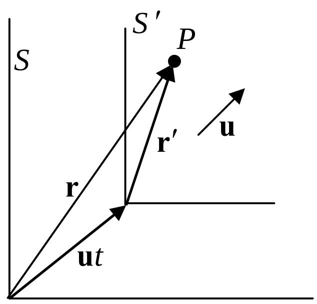


شکل ۲۵–۱ الف: چارچوب قطار در حال حرکت



شکل ۲۵–۱ ب: چارچوب ناظر روی زمین

در وضعیت عمومی‌تر، فرض کنید ذره‌ای در نقطه‌ی P قرار دارد، شکل (۲۶–۱)، و دو ناظر حرکت این ذره را توصیف می‌کنند. یکی در چارچوب S، که نسبت به زمین ساکن است؛ یعنی ناظر ایستاده در روی زمین. ناظر دوم در چارچوب S' قرار دارد که نسبت به S با سرعت ثابت $\mathbf{u}$ به سمت راست حرکت می‌کند (از دید ناظر نشسته در S'، ناظر در S با سرعت $-\mathbf{u}$ به سمت چپ می‌رود). در این وضعیت ، بردار مکان $\mathbf{r}'$ ذره در چارچوب S' و بردار مکان $\mathbf{r}$ ذره در چارچوب S به یکدیگر مربوطاند و می‌توان $\mathbf{r}'$ را برحسب $\mathbf{r}$ نوشت



شکل ۲۶–۱ دو چارچوب با سرعت نسبی $\mathbf{u}$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \qquad (۱–۸۹)$$

یعنی در زمان t چارچوب S' به اندازه‌ی $\mathbf{u}t$ نسبت به چارچوب S به سمت راست جابه جایی شده است. اگر از رابطه‌ی (۱–۸۹) نسبت به زمان مشتق بگیریم و توجه داشته باشیم که $\mathbf{u}$ ثابت است ، خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \qquad (۱–۹۰)$$

$\mathbf{v}'$ سرعت ذره از دید ناظر S' و $\mathbf{v}$ سرعت همان ذره از دید ناظر در چارچوب S است. رابطه‌های (۸۹-۱) و (۹۰-۱) **معادله های تبدیل گالیله** نام دارند و مختصات و سرعت های اندازه‌گیری شده‌ی ذره در چارچوب زمین را به مقادیر اندازه‌گیری شده در چارچوبی که نسبت به زمین حرکت یکنواخت دارد مربوط می‌کنند. این تبدیل ها فقط برای ذره‌ای درست است که سرعتش در هر دو سامانه‌ی مختصات، در مقایسه با سرعت نور کوچک باشد. اگر سرعت ذره، در هر یک از چارچوب های مرجع، با سرعت نور قابل مقایسه باشد، این تبدیل‌ها باید با تبدیل‌های لورنتس جایگزین شوند. اگرچه دو ناظر در دو چارچوب متفاوت ،سرعت‌های متفاوتی را برای یک ذره اندازه‌گیری خواهند کرد، اما اگر $\mathbf{u}$ ثابت باشد نتیجه‌ی اندازه‌گیری **شتاب** در هر دو چارچوب یکسان خواهد بود. برای اثبات آن از رابطه ی (۹۰-۱) نسبت به زمان مشتق بگیرید :

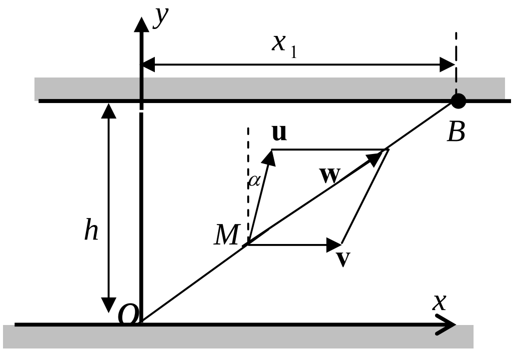
$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{d\mathbf{u}}{dt} \qquad (۱-۹۱)$$

چون $\mathbf{u}$ ثابت است پس، $d\mathbf{u}/dt=0$ است و بنابراین، $\mathbf{a}'=\mathbf{a}$ است. **یعنی نتیجه‌ی اندازه‌گیری شتاب ذره‌ای در چارچوب زمین با نتیجه‌ی اندازه‌گیری شتاب همان ذره در چارچوبی که نسبت به زمین با سرعت ثابت حرکت می‌کند، یکی است.**

مثال ۹-۱ سرعت جریان آب رودخانه‌ای v و پهنای رودخانه h است. قایقرانی می‌تواند در آب‌های بی‌حرکت قایق را با سرعت $\mathbf{u}$ براند. قایقران باید در چه راستایی در رودخانه حرکت کند تا در کوتاهترین زمان از یک ساحل به ساحل دیگر برسد؟ در چه نقطه‌ای قایق به ساحل روبرو می‌رسد؟

حل: فرض کنید قایق از نقطه‌ی O در شکل (۲۷-۱) آغاز به حرکت می‌کند. همچنین فرض کنید دماغه‌ی قایق با پهنای رودخانه (محور Oy) همواره زاویه‌ی ثابت α می‌سازد. قایق را درمکان دلخواه M از مسیرش در نظر بگیرید. $\mathbf{u}$ سرعت قایق نسبت به آب رودخانه است و $\mathbf{v}$ سرعت آب نسبت به ساحل (یعنی نسبت به ناظری که در ساحل رودخانه ایستاده است) است. از نگاه این ناظر سرعت قایق جمع برداری دو سرعت یاد شده است. آن را $\mathbf{w}$ بنامید

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v} \qquad (۱-۹۲)$$

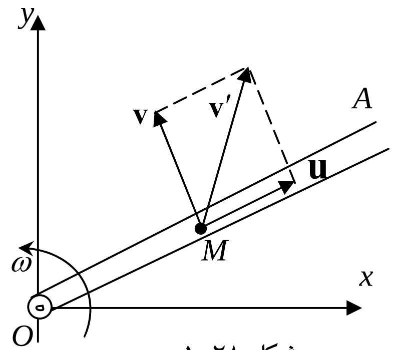


شکل ۲۷-۱

مؤلفه‌های w بر روی محورهای مختصات $w_x=u\sin\alpha+v$ و $w_y=u\cos\alpha$ اند . چون هردوی این مؤلفه‌ها مقادیر ثابتند. بنابراین جابه‌جایی قایق در راستای محورهای مختصات عبارتند از $x=(u\sin\alpha+v)t$ و $y=(u\cos\alpha)t$. هنگامی که قایق به ساحل روبرو می‌رسد، $y=h$ می شود. بنابراین، زمان پیمایش پهنای رودخانه عبارت است از $t_1=h/u\cos\alpha$. روشن است که t_1 هنگامی کمینه است که $\cos\alpha=1$؛ یعنی $\alpha=0$ باشد. پس برای پیمودن رودخانه در کوتاهترین زمان، قایقران باید همواره دماغه‌ی قایق را عمود بر ساحل نگه دارد. داریم $t_{\min}=h/u$ با فرض $\alpha=0$ و $t=t_{\min}$ می‌توان x_1 را حساب کرد- نقطه‌ای که قایق به ساحل روبرو می‌رسد. داریم $x_1=h(v/u)$

مثال ۱۰-۱ برابرشکل (۲۸-۱) جرم M در لوله‌ی OA با سرعت u حرکت راست خط دارد. لوله‌ی OA در صفحه‌ی OXY با سرعت زاویه‌ای ω پادساعتگرد می چرخد. سرعت جرم M را نسبت به مختصات OXY بر حسب فاصله اش، r ، از مبداء مختصات بیابید.

حل: در اینجا u سرعت جرم M نسبت به لوله است و $\mathbf{v}$ سرعت یک نقطه‌ی لوله نسبت به ناظر ساکن در O است. $\mathbf{v}'$ سرعت جرم M نسبت به ناظر ساکن در O است. حرکت جرم M از نگاه ناظر ساکن در O نتیجه‌ی دو حرکت است: حرکت جرم نسبت به لوله OA و حرکت همراه با OA. در اثر چرخش لوله‌ی OA حول نقطه‌ی O ، جرم M در فاصله‌ی r از مبداء مختصات، سرعتی برابر $v = r\omega$ به دست می آورد که بر OA عمود است. با توجه به بردارهای سرعت در شکل (۲۸-۱) می‌توان سرعت $\mathbf{v}'$ جرم M را نسبت به ناظر ساکن در O حساب کرد. چون u و v بر یکدیگر عمودند. اندازه‌ی v' برابر $v' = \sqrt{u^2 + r^2\omega^2}$ است.



شکل ۲۸-۱

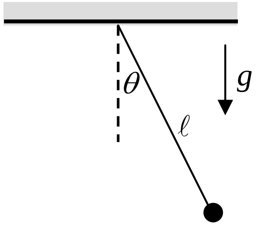
۱۱-۱ یکاها و تحلیل ابعادی

یکاها یا ابعاد هر کمیت فیزیکی توان‌هایی از جرم، طول و زمان مربوط به آن کمیت است. برای نمونه، یکای سرعت متربرثانیه است. بررسی یکاها دو سود دارد: نخست، پیش از آنکه مسئله‌ای را حل کنیم با وارسی یکاها می‌توانیم به تقریب (تا حد یک ضریب عددی) بگوییم پاسخ مسئله چگونه باید باشد. دوم، وارسی یکاها در پایان محاسبه‌ها می‌تواند بگوید که آیا پاسخ به دست آمده شانس درست بودن دارد یا نه. اگرچه به یقین نخواهد گفت که پاسخ درست است؛ اما می تواند شما را از نادرستی پاسختان مطمئن کند؛ و شما باید به حل مسئله برگردید و آن را دوباره بررسی کنید. برای نمونه، اگر هدف مسئله‌ای یافتن طولی باشد و پاسخ ما به جرم برسد، آنگاه می‌دانیم که حل مسئله نادرست است.

بگذارید موضوع را با چند نمونه روشن‌تر بیان کنیم. در سه مثال زیر من از برخی نتیجه‌ها استفاده خواهم کرد که در فصل‌های آینده آنها را اثبات خواهم کرد؛ برخی از آنها را شما می‌دانید. از نماد [ ] برای یکاها استفاده خواهیم کرد. جرم را با M، طول را با L و زمان را با T نشان خواهیم داد. پس، سرعت را به صورت $[v] = L/T$ خواهیم نوشت و ثابت گرانش را با $[G] = L^3/MT^2$ نشان خواهیم داد (با توجه به این که $G\, m_1 m_2/r^2$ بعد نیرو دارد، می‌توانید این را دریابید.)

مثال ۱۱-۱ جرم m از ریسمان بدون جرم به طول ℓ آویزان است و در صفحه‌ی عمودی برابر شکل(۲۹-۱) تاب می‌خورد. شتاب گرانش g است. در باره‌ی بسامد نوسان کوچک (θهای کوچک) این آونگ چه می‌توان گفت؟

حل: تنها کمیت های با بعد مسئله عبارت اند از $[m] = M$ ، $[\ell] = L$ و $[g] = L/T^2$. اما کمیت بی‌بُعد دیگری هم در مسئله



شکل ۲۹-۱

وجود دارد: $\theta_\circ$ که بیشتر وقت ها فراموشش می‌کنیم. می‌خواهیم بسامد را بیابیم که یکایش $1/T$ است. تنها ترکیبی از کمیت‌های دارای بعد مسئله که می‌تواند بعد $۱/T$ داشته باشد $\sqrt{g/\ell}$ است. با وجود این، نمی‌توان از وابستگی $\theta_\circ$ چشم پوشی کرد. چگونگی وابستگی بسامد به $\theta_\circ$ را هم نمی‌دانیم . پس عمومی ترین شکل بسامد عبارت است از

$$\omega = f\,(\theta_\circ)\sqrt{g/\ell} \qquad (۱-۹۳)$$

که در آن f تابع بی بعدی از متغیر بدون بعد $\theta_\circ$ است. (در اینجا بسامد را برحسب رادیان بر ثانیه اندازه‌گیری می‌کنیم و با ω نشان می‌دهیم که در حقیقت" بسامد زاویه‌ای" است. اگر آن را به ۲π تقسیم کنیم (این تقسیم کردن در یکاها اثر نمی کند) بسامد معمولی را بر حسب دور بر ثانیه (هرتز) به دست می‌آوریم که با نماد ν نشان می‌دهند).

چند نکته:

۱- در این مثال البته $f\,(\theta_\circ)$ یک است و بنابراین، بسامد $\sqrt{g/\ell}$ است. اما هیچ راهی وجود ندارد که این را با تحلیل ابعادی نشان داد. باید در واقع مسئله را حل کرد و $f\,(\theta_\circ) = ۱$ بودن را به دست آورد. برای مقادیر بزرگ $\theta_\circ$، در بسط f مرتبه‌های بالاتر مهم می‌شوند و پاسخ به صورت $f\,(\theta_\circ) = ۱ - \theta_\circ^۲/۱۶ + \cdots$ می‌شود.

۲- توجه کنید که چون تنها یک جرم در مسئله وجود دارد، هرگز بسامد (که یکای آن $1/T$ است) نمی‌تواند به $[m] = M$ بستگی داشته باشد. اگر به m وابسته می‌شد ، هیچ چیزی که یکای جرم را حذف بکند و $1/T$ بسازد در مسئله وجود ندارد.

۳- گفتیم که تنها ترکیبی از کمیت‌های دارای بعد مسئله که بتواند یکای $1/T$ ایجاد کند، $\sqrt{g/\ell}$ است. فهمیدن آن در اینجا آسان است. در مسئله‌های پیچیده‌تر حدس زدن ترکیب درست کمیت‌های دارای بُعد ساده نیست. در این حالت‌ها شیوه‌ی زیر همواره راه گشا است: ضرب عمومی کمیت‌های با بعد را با توان های دلخواه تشکیل دهید (در این مسئله $m^a \ell^b g^c$) و سپس یکاهای این ضرب را برحسب a، b و c بنویسید . اگر بخواهیم یکای $1/T$ به دست آوریم ، پس می‌خواهیم داشته باشیم

$$M^a L^b \left(\frac{L}{T^۲}\right)^c = \frac{۱}{T} \qquad (۱-۹۴)$$

از این رابطه می‌بینیم که

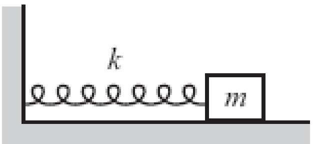
$$M:\ a = ۰,\quad L:\ b + c = ۰,\quad T:\ -۲c = -۱ \qquad (۱-۹۵)$$

و پاسخ این سه معادله عبارت اند از $a = ۰$ ، $b = -۱/۲$ و $c = ۱/۲$ و بنابراین $\sqrt{g/\ell}$.

در باره ی انرژی کل آونگ (انرژی پتانسیل را نسبت به پایین ترین نقطه‌ی مسیر حساب کنید) چه می‌توان گفت؟ در فصل ۵ در باره ی انرژی صحبت خواهیم کرد. در اینجا تنها چیزی که به آن نیاز داریم یکای انرژی است: $ML^۲/T^۲$. تنها ترکیبی از کمیت های با بعد مسئله که این یکا را تولید می‌کند $f\,(\theta_\circ) mg\,\ell$ است. با تحلیل ابعادی فراتر از این نمی‌توان رفت. البته، اگر اندکی فیزیک به آن بیفزاییم می‌توان گفت که انرژی کل برابراست با انرژی پتانسیل در بالاترین نقطه‌ی مسیر تاب خوردن که عبارت است از $mg\,\ell\left(۱-\cos\theta_\circ\right)$.از بسط تیلور $\cos\theta$ (فصل ۲) می‌بینیم که $f\,(\theta_\circ) = (\theta_\circ^۲/۲) - (\theta_\circ^۴/۲۴) + \cdots$. بنابراین، در

مقایسه با بسامد، می‌بینیم که در انرژی θ_0 نقش مهمی دارد. ♣

مثال ۱۲-۱ جرم m به انتهای فنری با ثابت k وصل شده است (شکل ۳۰-۱) . نیروی فنر عبارت است از $F(x)=-kx$ که در آن x جابه‌جایی جسم از حالت ترازمندی است. در باره‌ی بسامد نوسان سامانه چه می‌توان گفت؟



شکل ۳۰-۱

حل: کمیت‌های با بعد مسئله عبارتند از $[m]=M$ و $[k]=M/T^2$ (این یکا با توجه به این که kx بعد نیرو دارد به دست می آید) و بیشینه جابه‌جایی از حالت ترازمندی $[x_0]=L$ است (طول ترازمندی هم وجود دارد اما نیرو به آن بستگی ندارد.) می‌خواهیم بسامد با یکای $1/T$ را بیابیم. تنها ترکیب کمیت های دارای بعد که به $1/T$ می‌انجامد عبارت است از

$$\omega=c\sqrt{k/m} \qquad (۱-۹۶)$$

که دوباره در آن c یک عدد بی بعد است و در این جا برابر یک است (با فرض این که ما ω را برحسب رادیان بر ثانیه اندازه گیری می‌کنیم.) اما فقط با بررسی ابعادی نمی‌توان یک بودنش را نشان داد. در باره‌ی انرژی چه می‌توان گفت؟ بعد انرژی ML^2/T^2 است و تنها ترکیب کمیت های با بعد مسئله که بتواند این یکا را بسازد Bkx_0^2 است. B یک عدد بی بعد است. در این مسئله $B=1/2$ و در نتیجه انرژی کل برابر است با $(1/2)\ kx_0^2$.

نکته: پتانسیل فنر واقعی کاملا سهمی نیست. در حقیقت نیرو به صورت $F(x)=-kx+bx^2+\cdots$ است. اگر این سری را در جمله‌ی دوم آن قطع کنیم، آنگاه کمیت دارای بعد دیگری هم در اختیار خواهیم داشت: $[b]=M/LT^2$. در این صورت، برای این که کمیتی با بعد بسامد، $1/T$، بیابیم باید x_0 و b در ترکیب bx_0 ظاهر شود؛ زیرا این تنها راهی است که از L ها رهایی پیدا می‌کنیم. آنگاه (همان‌گونه که در نکته‌ی ۳ مثال ۱۱-۱ گفتیم) با نوشتن ضرب کمیت‌ها می‌بینیم که بسامد باید به صورت $f\ (x_0b/k)\sqrt{k/m}$ باشد که در آن f یک تابع است. در این حالت وابستگی به x_0 نیز می‌تواند وجود داشته باشد. توجه کنید که به ازای $b=0$ پاسخ باید به $c\sqrt{k/m}$ کاهش یابد. پس، f باید به صورت $f\ (y)=c+c_1y+c_2y^2+\cdots$ باشد. ♣

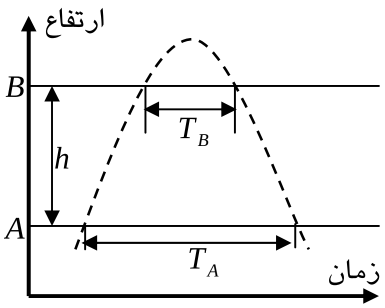
مثال ۱۳-۱ (ماهواره مدارپایین): ماهواره‌ای به جرم m درست بالای سطح زمین در مدار دایره می گردد. در باره‌ی سرعت ماهواره چه می‌توان گفت؟

حل: کمیت‌های با بعد مسئله عبارتند از $[m]=M$, $[g]=L/T^2$ و شعاع زمین $[R]=L$. خواست ما یافتن سرعت با بعد L/T است. (شاید بگویید جرم زمین، M_e و ثابت گرانش ، G ، را هم باید در نظر گرفت چون در روی زمین قانون گرانش نیوتون عبارت است از $F=G\ M_em/R^2$. چون می‌توان این نیرو را به صورت $m(G\ M_e/R^2)=mg$ نوشت، می‌توان اثر M_e و G را در g گنجاند.) تنها ترکیبی از کمیت‌های با بعد که می‌توان از آن یکای L/T ساخت عبارت است از

$$v=c\sqrt{gR} \qquad (۱-۹۷)$$

که در آن $c=1$ است.

مثال های تکمیلی



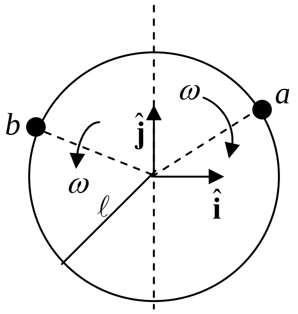
شکل ۳۰-۱

ت-۱ شتاب گرانش را می‌توان به صورت زیر اندازه گرفت: جسمی را قائم به هوا پرتاب کنید و زمان‌هایی را که جسم هم در رفت و هم در برگشت از دو نقطه‌ی معین می‌گذرد اندازه بگیرید. فرض کنید T_A زمانی است که جسم در رفت و برگشت خط A را قطع می‌کند و T_B بازه‌ی زمانی است که جسم در رفت و برگشت خط B را قطع می‌کند (شکل ۳۱-۱ را ببینید) . با فرض ثابت بودن شتاب گرانش نشان دهید که اندازه‌ی شتاب گرانش عبارت است از $g = ۸h/(T_A^۲ - T_B^۲)$. در اینجا h فاصله‌ی بین خط های A و Bاست .

ت-۲ آسانسوری از سطح زمین با سرعت ثابت به بالا می‌رود. شخصی که در آسانسور است در زمان $T_۱$ تیله‌ای را رها می-کند. تیله با شتاب ثابت $g = ۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲}$ سقوط می‌کند واز سوراخی که در کف آسانسور وجود دارد می‌گذرد و پس از $T_۲$ ثانیه با زمین برخورد می‌کند. در زمان $T_۱$ ارتفاع آسانسور ازسطح زمین چقدر بوده است؟

ت-۳ منظور از *سرعت نسبی* سرعت نسبت به چارچوب معین است. سرعت جسمی نسبت به چارچوب مختصات A برابر است با $\mathbf{v}_A$. سرعت این جسم نسبت به چارچوب مختصات B که مکانش از چارچوب A با بردار $\mathbf{R}$ داده شده است، چیست؟ ($\mathbf{R}$ می‌تواند با زمان تغییر کند.)

ت-۴ ذره های a و b در دو جهت مخالف با سرعت زاویه‌ای ω بر روی دایره‌ای به شعاع ℓ حرکت می کنند (شکل ۳۲-۱). در زمان $t = ۰$ هر دو ذره در نقطه‌ی $\mathbf{r} = \ell\hat{\mathbf{j}}$ اند. سرعت ذره‌ی a را نسبت به ذره‌ی b بیابید.



شکل ۳۲-۱

ت-۵ از پله‌ی بالایی پلکانی توپی با سرعت v به طور افقی پرتاب می‌شود. پهنا و بلندی هر پله باهم برابر و مساوی ℓ است.

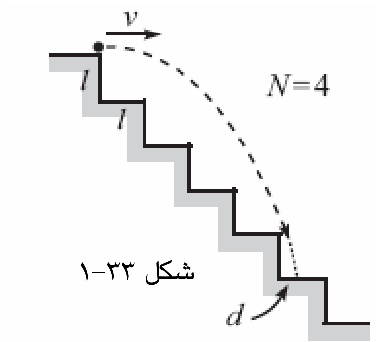
(الف): برای این که توپ بدون تماس با لبه‌ی پله‌ای که N پله در زیر پلکان‌ها قرار دارد بگذرد، سرعت v چقدر باید باشد؟ (شکل ۳۳-۲ وضعیت را با $N = ٤$ نشان می‌دهد.)

(ب): توپ در چه فاصله‌ای از انتهای پله‌ی بعدی بر روی آن برخورد خواهد کرد (فاصله‌ی d در شکل)؟

(پ): اگر $N \to \infty$ مقدار d را بیابید.

(ت): مولفه‌های سرعت توپ را در هنگامی که از کنار لبه‌ی پله می‌گذرد، به دست آورید و توضیح دهید که چرا پاسخ شما با پاسخ بخش (پ) سازگار است.

ت-۶ در زمان $t = -T$ ذره‌ای از مبداء مختصات و از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب ثابت a به حرکتش ادامه می‌دهد. ذره‌ی دیگری در زمان $t = ۰$ از مبداء مختصات و از حالت سکون حرکت می‌کند و با همان شتاب a به حرکتش ادامه می‌دهد. در زمان t فاصله‌ی این دو ذره از هم چقدر است؟ در پاسخی که به دست می‌آورید دو جمله وجود دارد، معنی فیزیکی آنها را نخست در چند جمله توضیح دهید و سپس با رسم نمودارسرعت نسبت به زمان آن را تفسیر کنید.



شکل ۳۳-۱

ت- ۷ دو قطار A و B در روی یک خط‌آهن و در یک سو حرکت می‌کنند. قطار A از نقطه‌ای به فاصله‌ی d از مبداء مختصات از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب ثابت a پیش می‌رود. قطار B حرکتش را با سرعت $v_\circ$ از مبداء مختصات شروع می‌کند و با شتاب ثابت $-a$ حرکت می‌کند. برای این که قطارها باهم برخورد نکنند، بیشینه مقدار $v_\circ$ چقدر می‌تواند باشد؟ نمودار تقریبی مکان نسبت به زمان هر دو قطار را برای حالتی رسم کنید که قطارها در آستانه‌ی برخورد قرار می‌گیرند،

ت-۸ اتوموبیل‌های A و B از نقطه‌ای یکسان و با سرعت اولیه‌ی v_0 شروع به حرکت می‌کنند. اتومبیل A با سرعت ثابت پیش می‌رود و اتومبیل B با شتاب ثابت $-a$ واشتابیده می‌شود. در لحظه‌ای که سرعت B صفر می‌شود نسبت مسافت‌های پیموده شده توسط A و B را بیابید. پاسخ شما یک عدد ساده‌ای خواهد شد که به کمیت‌های داده شده بستگی ندارد. در چند جمله توضیح دهید که چرا این عدد ساده و مستقل از کمیت‌های مسئله است. برای هر دو اتوموبیل، نمودار به نسبت دقیقی از مسافت x برحسب زمان t رسم کنید.

ت-۹ توپی را از ارتفاع h رها می‌کنیم تا به سوی زمین سقوط کند. هم‌زمان با آن و در ست در زیر آن، توپ دیگری را از سطح زمین به طور قائم با سرعت اولیه‌ی v به بالا پرتاب می‌کنیم. برای این که دو توپ در ارتفاع $h/۲$ باهم برخورد کنند، سرعت v توپ دوم چقدر باید باشد؟ در لحظه‌ی برخورد، سرعت توپ دوم چیست؟

مسئله‌ها:

۱-۱ خلبانانی که هواپیمایی را راست‌خط می‌راند، می‌داند سرعت هوایی هواپیما (سرعت نسبت به هوا) ۴۸۲,۷ کیلومتر در ساعت است. او همچنین می‌داند که باد با سرعت ۹۶,۵۴ کیلومتر در ساعت با زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به راستای حرکت هواپیما می‌وزد. خلبان چگونه می‌تواند سرعت هواپیما را نسبت به زمین حساب کند؟

۲- ۱ از فراز بامی به بلندی ۳۰ متر توپی با سرعت اولیه m/s ۵ به طور عمودی به پائین پرتاب می‌شود:

(**الف**): پس از نیم ثانیه سقوط، سرعت توپ چقدر است؟ (**ب**): مکان توپ پس از یک و نیم ثانیه کجاست؟

(**پ**): هنگام برخورد توپ با زمین، سرعت آن چقدر است؟

۳-۱ پسر بچه‌ای می‌تواند توپی را با سرعت m/s ۲۰ به طور افقی پرتاب کند. او توپ را از اتوموبیل روبازی پرتاب می‌کند که با سرعت m/s ۳۰ عمود بر جهت پرتاب توپ حرکت می‌کند. اندازه و جهت واقعی توپ نسبت به ناظر ساکن چیست؟

۴-۱ آسانسوری با شتاب $۱,۵۲۴\,\mathrm{m/s^۲}$ پائین می‌رود. جسمی از سقف آسانسور رها می‌شود. درلحظه‌ای که جسم رها می‌شود ، شخص درون آسانسور متوجه آن می‌شود و درمی‌یابد که جسم روی پای او خواهد افتاد. اگر فاصله‌ی سقف تا کف اتاقک آسانسور m ۲,۷۳۴ باشد، مسافر درون آسانسور چقدر مجال دارد تا پای خود را از سر راه جسم افتان دور کند.

۵-۱ سرعت قطاری با آهنگ ثابت A از صفر به V افزایش می‌یابد و سپس برای مدتی ثابت می‌ماند و سرانجام با آهنگ ثابت B به صفر می‌رسد. اگر S مسافت کل پیموده شده باشد، نشان دهید که زمان کل این حرکت عبارت است از

$$\frac{S}{V}=\frac{V}{۲}\left(\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}\right) \qquad (۱-۹۸)$$

۶-۱ توپی به طور عمودی رو به بالا پرتاب می‌شود و در زمان $t_۱$ توپ به ارتفاع h می‌رسد. دوباره در زمان $t_۲$ توپ به ارتفاع h می‌رسد (در هنگام سقوط) . ثابت کنید که $h = g\,t_۱t_۲/۲$ و سرعت اولیه‌ی پرتاب $v_\circ = g\,(t_۱+t_۲)/۲$ است .

۷-۱ چرخی به شعاع $r=۱۰\,\mathrm{cm}$ به گونه‌ای می‌چرخد که رابطه‌ی میان سرعت خطی و زمان برای نقاط روی لبه‌ی چرخ به صورت $v=At+Bt^۲$ است. اگر $A=۳\ \mathrm{m/s^۲}$ و $B=۱\,\mathrm{m/s^۲}$ باشد زاویه‌ای را که راستای شتاب کل با شعاع چرخ در زمان های $t=۰,۱,۲,۳,۴,۵s$ پس از آغاز حرکت می‌سازد حساب کنید.

۸-۱ چرخی با شعاع $r=۱۰\,\mathrm{cm}$ با شتاب زاویه‌ای ثابت $\alpha=۳,۱۴\,\mathrm{rad/s^۲}$ می‌چرخد. در پایان ثانیه‌ی نخست حرکت، برای ذره‌ای در لبه‌ی چرخ.

(**الف**): سرعت زاویه‌ای را حساب کنید. (**ب**): سرعت خطی را به دست آورید. (**پ**): شتاب مماسی را حساب کنید. (**ت**): شتاب شعاعی چقدر است؟ (**ج**): شتاب کل را به دست آورید. (**چ**): زاویه‌ی میان بردار شتاب کل و شعاع چرخ چقدر است؟

۹-۱ نقطه‌ای روی دایره‌ای به شعاع $r=۲۰\,\mathrm{cm}$ با شتاب مماسی ثابت $a_t=۵\,\mathrm{cm/s^۲}$ حرکت می‌کند. چه مدت پس از آغاز حرکت، شتاب شعاعی a_r با شتاب مماسی آن برابر می‌شود؟ برای این که شتاب شعاعی دو برابر شتاب مماسی باشد چقدر زمان نیاز است؟

۱۰-۱ چرخی با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌چرخد و پس از ۱۰ دور چرخیدن سرعت زاویه‌ای آن برابر $\omega=۲۰\,\mathrm{rad/s}$ می‌شود.

پشتاب زاویه‌ای چرخ را بیابید.

۱-۱۱ سرعت خطی چرخش یک نقطه در سطح زمین و در عرض جغرافیایی $^\circ$۶۰ را بیابید.

۱-۱۲ سرعت زاویه‌ای اجسام زیر را بیابید.

(**الف**): چرخش روزانه‌ی زمین (**ب**): عقربه‌ی ساعت شمار یک ساعت (**پ**): عقربه‌ی دقیقه شمار یک ساعت (**ت**): ماهواره‌ای که در مدار دایره‌ای با دوره‌ی $T = ۸۸$ دقیقه حول زمین می‌گردد. (**ج**): اگر این ماهواره در فاصله‌ی ۲۰۰ کیلومتری از سطح زمین باشد، سرعت خطی آن را حساب کنید.

۱-۱۳ در یک مسابقه اتوموبیل‌رانی، اتوموبیلی با سرعت ثابت ۸۰ m/s روی دایره‌ای به شعاع ۲۰۰ m حرکت می‌کند

(**الف**): سرعت زاویه‌ای این اتوموبیل را حساب کنید. (**ب**): اندازه و جهت شتاب اتوموبیل را بیابید.

۱-۱۴ اتوموبیل مساله‌ی بالا از حالت سکون و با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند تا سرعت آن پس از ۳۰ s به ۸۰ m/s برسد

(**الف**): سرعت زاویه‌ای اتوموبیل چقدر است؟ (**ب**): شتاب زاویه‌ای اتوموبیل چقدر است؟ (**پ**): اندازه‌ی شتاب خطی اتوموبیل در زمان $t = ۱۰s$ چقدر است؟ (**ت**): چه مسافت کلی را در ۳۰ ثانیه‌ی اول پیموده است.

۱-۱۵ چرخی به قطر ۴ m با شتاب زاویه‌ای $۴\,rad/s^۲$ می‌چرخد. در زمان $t = ۰$ چرخ از حالت سکون آغاز به حرکت می‌کند. در این زمان، بردار شعاعی نقطه‌ی P در لبه‌ی چرخ با افق زاویه‌ی $^\circ$۵۷,۳ می‌سازد. در زمان $t = ۲$ s (**الف**): سرعت زاویه‌ای چرخ را بیابید. (**ب**): سرعت و شتاب خطی نقطه‌ی P را حساب کنید.(**پ**): مکان نقطه‌ی P را بیابید.

۱-۱۶ استوانه‌ای به شعاع ۱۲ cm از حالت سکون آغاز و با شتاب ثابت $۵\,rad/s^۲$ حول محورش می‌چرخد در زمان $t = ۳s$

(**الف**): سرعت زاویه‌ای آن چقدر است؟ (**ب**): سرعت خطی نقطه‌ای روی لبه‌ی استوانه را حساب کنید. (**پ**): مؤلفه‌های شعاعی و مماسی شتاب نقطه‌ای روی لبه‌ی استوانه را بیابید.

۱-۱۷ قرصی با شعاع ۶ cm با آهنگ ثابت ۱۲۰۰ دور در دقیقه حول محورش می‌چرخد.

(**الف**): سرعت زاویه‌ای قرص را حساب کنید (**ب**): سرعت خطی نقطه‌ای در فاصله‌ی ۲cm از مرکز را بیابید. (**پ**): شتاب شعاعی نقطه‌ای روی لبه‌ی قرص را حساب کنید. (**ت**): مسافت کلی را که یک نقطه در لبه‌ی قرص در ۲ s می‌پیماید چقدر است؟

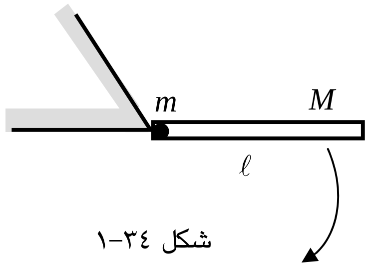
۱-۱۸ یک قایق موتوری می‌تواند با بیشینه سرعت ۱۰m/s نسبت به آب حرکت کند. جریان آب در رودخانه‌ای به پهنای ۴۰۰ متر برابر ۵ m/s است. قایقران می‌خواهد از این رودخانه در کوتاهترین زمان ممکن بگذرد و درست در نقطه‌ی مقابل به ساحل دیگر برسد. در چه جهتی باید قایق حرکت کند و زمان لازم برای پیمودن پهنای رودخانه چقدر است؟

۱-۱۹ واگنی با سرعت ۱۰m/s در مسیر راست خط حرکت می‌کند. مسافر درون واگن، توپی را به هوا پرتاب می‌کند. از دید مسافر توپ با افق زاویه‌ی $^\circ$۶۰ می‌سازد. ناظری کنار خط آهن و در روی زمین مشاهده می‌کند که توپ حرکت عمودی رو به بالا دارد. این توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۱-۲۰ قایقی برای گذشتن از رودخانه‌ای به پهنای ۱۵۰ m به دو دقیقه وقت نیاز دارد. سرعت قایق نسبت به آب ۳ m/s و سرعت جریان آب ۲ m/s است. قایق در چه نقاطی در پائین یا بالای رودخانه به ساحل روبرو می‌رسد؟

۱-۲۱ سرعت گریز در سطح یک سیاره با $v = \sqrt{۲GM/R}$ داده شده است که در آن M و R به ترتیب جرم و شعاع سیاره اند و G ثابت گرانش نیوتون است.

(الف): v را برحسب چگالی جرمی ρ بنویسید. **(ب)**: فرض کنید چگالی جرمی زمین ٤ برابر چگالی جرمی مشتری و شعاع آن ۱۱ برابر شعاع زمین است. نسبت v_j/v_e را بیابید.



شکل ۳٤-۱

۱-۲۲ لوله‌ای به جرم M و طول ℓ می تواند از یک انتها آزادانه تاب بخورد. برابر شکل (۳٤-۱) در این انتها، جرم m در درون لوله (بدون اصطکاک) قرار داده شده است. لوله را از حالت افقی رها می کنیم. اگر η کسری از طول لوله باشد که جرم m در زمانی که لوله به حالت عمودی درمی‌آید می‌پیماید، آیا η می تواند به ℓ بستگی داشته باشد؟

۱-۲۳ ستاره‌ای را در نظر بگیرید که نوسان می‌کند. بسامد (ν) آن به شعاع R و چگالی جرمی ρ ستاره بستگی دارد. وابستگی ν به R، ρ و G کدام است؟

۱-۲۴ سرعت حرکت موج در یک ریسمان به ویژگی‌های ریسمان بستگی دارد. سرعت موج در یک ریسمان چگونه به جرم M، طول ℓ و کشش ریسمان، T بستگی دارد؟

۱-۲۵ در یک قطره آب لرزان، بسامد لرزش به شعاع R قطره، چگالی جرمی ρ و کشش سطحی، S ، بستگی دارد. یکای کشش سطحی نیرو بر طول است. بسامد لرزش، ν چگونه به R، ρ و S وابسته است؟

۱-۲۶ سرعت موج در یک شاره (مایع یا گاز) به چگالی ρ محیط با بعد $[ML^{-۳}]$ و مدول کُپه‌ای B (کمیتی با یکای فشار یا نیرو بر سطح که ویژگی‌های کشسانی محیط را توصیف می‌کند) آن با بعد $[ML^{-۱}T^{-۲}]$ وابسته است. سرعت صوت را برحسب ρ و B بنویسید.

۱-۲۷ دوره‌ی آونگی در روی زمین s ۳ است. اگر نسبت شتاب گرانش ماه به زمین، $g_M/g_E \approx ۱/٦$ باشد دوره‌ی آونگ در ماه چیست؟

۱-۲۸ اندازه‌ی g در سطح زمین با رابطه‌ی $g = GM/R^۲$ داده می‌شود که در آن M و R جرم و شعاع زمین اند و G ثابت گرانش نیوتون است. اگر چگالی‌های زمین و ماه با رابطه ی $\rho_M/\rho_E = ۳/٥$ به هم مربوط باشند و $g_M/g_E = ۱/٦$ باشد، نسبت R_M/R_E را بیابید.

۱-۲۹ ذره‌ای به جرم m و سرعت اولیه‌ی V تحت تاثیر نیروی پس‌کشی وابسته به سرعت bv^n است.

(الف): برای ...۳، ۲، ۱، $n = ۰$ زمانی را که طول می کشد تا جرم از حرکت باز ایستد چگونه به m و V و b بستگی دارد؟

(ب): برای ...۳، ۲، ۱، $n = ۰$ مسافتی را که جرم می‌پیماید تا به ایستد چگونه به m و V و b بستگی دارد؟ مواظب باشید! ببینید که آیا پاسختان معنی دارد یا نه. تحلیل ابعادی پاسخ را تا حد یک ضریب عددی به دست می‌دهد. این مسئله ظریف است اما نباید شما را از به کار بردن تحلیل ابعادی دلسرد کند. بیشتر مسئله های تحلیل ابعادی سرراست اند.

حل مثال های تکمیلی

ت-۱ مسیر ذره در راستای قائم از رابطه‌ی زیر به دست می آید

$$z(t)=z_\circ+v_\circ t-\frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (۱-۹۹)$$

نقطه‌ی A را جایی در نظر بگیرید که $t=\circ$ و $z=\circ$ باشند. این فرض از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. زمان لازم برای این که جسم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برسد برابر است با T_{AB}

$$T_{AB}=\frac{T_A-T_B}{۲} \qquad (۱-۱۰۰)$$

ارتفاع h برابر است با

$$h=z_B-z_A=v_\circ T_{AB}-\frac{g}{۲}T_{AB}^۲ \qquad (۱-۱۰۱)$$

برای یافتن $v_\circ$ باید داشته باشیم

$$z(t=\circ)=z(t=T_A)=\circ \qquad (۱-۱۰۲)$$

که اگر در رابطه‌ی (۹۹-۱) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\circ=\circ+v_\circ T_A-\frac{g}{۲}T_A^۲\Rightarrow v_\circ=\frac{gT_A}{۲} \qquad (۱-۱۰۳)$$

با جاکذاری این مقدار در رابطه ی (۱۰۱-۱) به دست می‌آید

$$h=\frac{gT_A}{۲}T_{AB}-\frac{g}{۲}T_{AB}^۲=\frac{g}{۲}\left\{\frac{T_A(T_A-T_B)}{۲}-\frac{(T_A-T_B)^۲}{٤}\right\}=\frac{g}{۲}\left\{\frac{(T_A-T_B)}{۲}\frac{(T_A+T_B)}{۲}\right\} \qquad (۱-۱۰٤)$$

$$\Rightarrow \quad g=\frac{۸h}{T_A^۲-T_B^۲}$$

ت-۲ سرعت آسانسور را $v_۱$ بنامید. مکان تیله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$z(t)=h_۱+v_۱(t-T_۱)-\frac{g}{۲}(t-T_۱)^۲ \qquad (۱-۱۰۵)$$

در اینجا $h_۱$ ارتفاع آسانسور در زمان $t=T_۱$ از سطح زمین است که می‌خواهیم به دست بیاوریم. می‌دانیم که در زمان $t=T_۱+T_۲$ تیله با زمین برخورد می‌کند. بنابراین، برای تیله داریم $z(T_۱+T_۲)=\circ$ است. پس، می‌توان نوشت

$$z(T_۱+T_۲)=\circ=h_۱+v_۱T_۲-\frac{g}{۲}T_۲^۲ \qquad (۱-۱۰٦)$$

از سوی دیگر، چون آسانسور با سرعت ثابت $v_۱$ حرکت می‌کند، پس در زمان $T_۱$ ارتفاع آن باید

$$h_۱=v_۱T_۱\Rightarrow v_۱=\frac{h_۱}{T_۱} \qquad (۱-۱۰۷)$$

باشد. با قرار دادن این مقدار برای v_1 در رابطه ی(۱۰٦-۱) به دست می‌آید

$$h_1 = -\frac{h_1}{T_1}T_2 + \frac{gT_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_1\left(1+\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{gT_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{gT_1T_2^2}{2(T_1+T_2)} \qquad (۱-۱۰۸)$$

ت-۳ در چارچوب A مکان ذره را با $\mathbf{r}(t)$ و در چار چوب B آن را با $\mathbf{r}'(t)$ نشان دهید. مکان مبداء مختصات چارچوب B نسبت به چارچوب A را $\mathbf{R}(t)$ بنامید (شکل ۳۵-۱ را ببینید). داریم

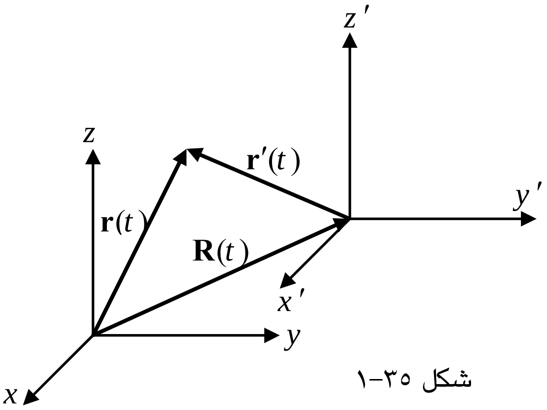
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{R}(t) \qquad (۱-۱۰۹)$$

اگر از دو طرف نسبت به زمان مستق بگیریم، داریم

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}'(t) + \dot{\mathbf{R}}(t) \qquad (۱--۱۱)$$

بنا به تعریف، $\dot{\mathbf{r}}(t)$ سرعت ذره در چارچوب A و $\dot{\mathbf{r}}'(t)$ سرعت آن در چارچوب B است. پس

$$v_B = v_A - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \qquad (۱-۱۱۱)$$



شکل ۳۵-۱

ت-۴ در چارچوب ثابت، مسیر ذره‌های a و b با رابطه‌های زیر داده می شوند. (شکل ۳۵-۱ را ببینید).

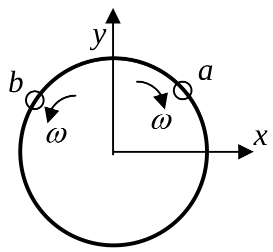
$$\mathbf{r}_a(t) = (\hat{\mathbf{i}}\sin(\omega t) + \hat{\mathbf{j}}\cos(\omega t)) \quad , \quad \mathbf{r}_b(t) = (-\hat{\mathbf{i}}\sin(\omega t) + \hat{\mathbf{j}}\cos(\omega t)) \qquad (۱-۱۱۲)$$

پس، سرعت نسبی به قرار زیر است

$$\mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_b = 2\ell\omega\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-۱۱۳)$$

ت-۵ (الف) برای این که توپ مسافت $N\ell$ را در راستای افقی بپیماید به زمان $vt = N\ell \Rightarrow t = N\ell/v$ نیاز دارد. روشن است که لبه‌ی پله‌ی N-ام در فاصله‌ی $N\ell$ از زیر تقطه‌ی پرتاب توپ قرار دارد و نیز در فاصله‌ی افقی $N\ell$ از نقطه‌ی پرتاب است. بنابراین، زمان لازم برای این که توپ مسافت $N\ell$ را در راستای y سقوط بکند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$N\ell = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (۱-۱۱٤)$$



شکل ٣٦-١

این دو زمان یکی اند و بنابراین ، داریم

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{N\ell}{v}\right)^2 = N\ell \Rightarrow \frac{N\ell g}{2} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{N\ell g}{2}} \qquad (۱-۱۱۵)$$

(ب): از $t = N\ell/v$ و رابطه‌ی (۱۰۳-۱) دیده می‌شود که زمان لازم برای این که توپ N پله در راستای y سقوط کند عبارت است از

$$t_N = \frac{N\ell}{v}\frac{N\ell}{\sqrt{\frac{N\ell g}{2}}} = \sqrt{\frac{2N\ell}{g}} \qquad (۱-۱۱٦)$$

برای این که توپ به یک پله پایین‌تر (یعنی به پله‌ی $N+1$) برسد، زمان لازم براب راست با

$$t_{N+1}=\sqrt{\frac{2(N+1)\ell}{g}} \tag{1-117}$$

بنابراین، مسافتی را که توپ در امتداد افقی در پله‌ی $N+1$ می‌پیماید، عبارت است از

$$d=v_x\Delta t=v_x\left(t_{N+1}-t_N\right)=\sqrt{\frac{N\ell g}{2}}\left(\sqrt{\frac{2(N+1)\ell}{g}}-\sqrt{\frac{2N\ell}{g}}\right)=\ell\left(\sqrt{N(N+1)}-N\right) \tag{1-118}$$

(پ): با استفاده از بسط $\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\varepsilon/2$ می‌توان d را به صورت زیر نوشت

$$d=\ell\left(\sqrt{N(N+1)}-N\right)\approx N\ell\left(\left(1+\frac{1}{2N}\right)-1\right)=\frac{\ell}{2} \tag{1-119}$$

(ت): مولفه‌ی x و y سرعت عبارت اند از

$$v_x=v=\sqrt{\frac{N\ell g}{2}}\qquad;\qquad v_y=gt_N=g\sqrt{\frac{2N\ell}{g}}=\sqrt{2N\ell g} \tag{1-120}$$

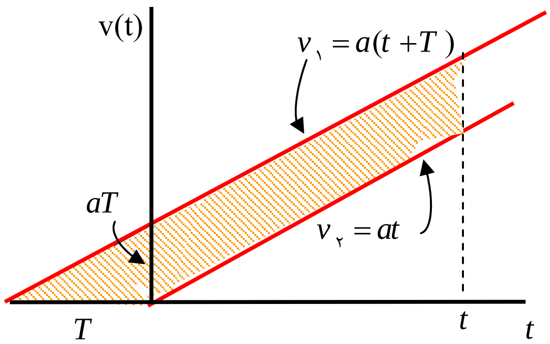
توجه کنید که یکاها درست‌اند. نسبت $v_y/v_x=2$ است و این مقدار "۲" مستقل از ℓ ، g و N است. دوشن است که به خاطر یکاها نمی‌تواند به ℓ و g وابسته باشد و به N هم نمی‌تواند وابسته باشد، چون همیشه می‌توان یک پله را به پله‌های کوچک زیادی تبدیل کرد. پاسخ $v_y/v_x=2$ با پاسخ بخش (پ) هم سازگار است؛ چون در حد Nهای بزرگ، توپ وقتی از کنار لبه‌ی پله می‌گذرد، باید بسیار تند حرکت کند و بنابراین، اساسا در هنگام رفتن به پله‌ی بعدی در امتداد خط راستی حرکت می‌کند (زمانی برای شتاب گرفتن و خم شدن مسیرش وجود ندارد) . از پاسخ بخش (پ) دیده می‌شود که وقتی توپ مسافت ℓ را به پایین می‌پیماید، مسافت $\ell/2$ در راستای افقی می‌پیماید. بنابراین، نسبت مولفه‌ی سرعت‌ها $v_y/v_x=\ell/(\ell/2)=2$ است.

ت-۶ در زمان t ذره‌ی نخست به مدت $t+T$ حرکت کرده‌است. بنابراین، مکان ذره‌ها عبارت‌اند از

$$x_1=\frac{1}{2}a\left(t+T\right)^2\quad,\quad x_2=\frac{1}{2}at^2 \tag{1-121}$$

پس ، اختلاف مکانی آنها برابر است با

$$x_1-x_2=aT\,t+\frac{1}{2}aT^2 \tag{1-122}$$



شکل ۳۷-۱

جمله‌ی دوم مسافتی است که ذره‌ی نخست در آغاز حرکت ذره‌ی دوم پیموده بود. جمله‌ی اول عبارت است از سرعت نسبی (aT) دو جسم ضربدر زمان t . این سرعت نسبی همیشه و برای همه‌ی زمان‌های t مقدار ثابت aT است؛ چون سرعت ذره‌ی اول در لحظه‌ی آغاز به حرکت ذره‌ی دوم است. از زمان $t=0$ به بعد، آهنگ افزایش سرعت هر دو یکسان و برابر a است. بنابراین، سرعت نسبی ذره‌ها همواره ثابت باقی می‌ماند. در شکل (۳۷-۱) سطح زیر خم سرعت برحسب زمان برای هر دو ذره رسم شده است. اختلاف مسافت پیموده شده سطح هاشور خورده است. این سطح هاشور خورده مجموع مساحت یک مثلث و یک

متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث $1/2(aT)T = 1/2\,aT^2$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع هم حاصل ضرب پهنای افقی و ارتفاع است: $t(aT) = aT\,t$. بنابراین، تفسیر ما از دو جمله روشن است.

ت-۷ مکان اتوموبیل‌ها عبارت‌اند از

$$x_A = v_0 t \quad , \quad x_B = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1-123)$$

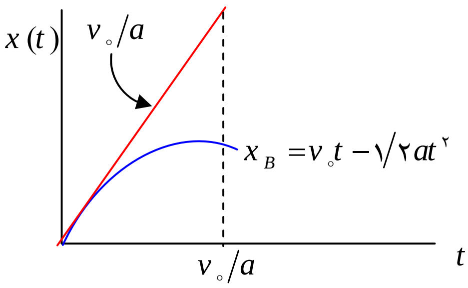
سرعت B عبارت است از $v_0 - at$ و در زمان $t = v_0/a$ به صفر می‌رسد. در این هنگام مکان ذره‌ها عبارت‌اند از

$$x_A = v_0\left(\frac{v_0}{a}\right) = \frac{v_0^2}{a} \quad , \quad x_B = v_0\left(\frac{v_0}{a}\right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} \qquad (1-124)$$

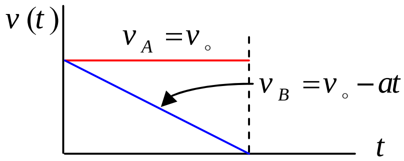
(توجه: v_0 بزرگ به اختلاف مسافت بزرگ می‌انجامد. شتاب a بزرگ به اختلاف مسافت کوچک می‌انجامد.)

نسبت مسافت‌های پیموده شده توسط اتوموبیل‌ها عبارت است از

$$\frac{x_A}{x_B} = 2 \qquad (1-125)$$



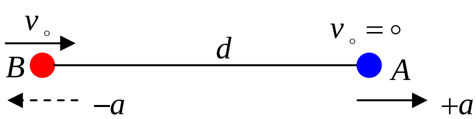
شکل ۱-۳۸



شکل ۱-۳۹

نمودارها به صورت شکل (۱-۳۸) اند. تنها کمیت‌های مسئله که این نسبت ممکن است به آنها بستگی داشته باشد، v_0 و a اند. اما نسبت یک کمیت بدون بعد است و هیچ ترکیب ساده‌ای از v_0 و a که به یک کمیت بی بعد بینجامد، وجود ندارد. بنابراین، نسبت مسافت‌ها باید یک عدد ساده‌ای مستقل از v_0 و a باشد. اگر نمودار v را نسبت به زمان رسم کنید، به سادگی می‌توان دید که چرا باید این نسبت ۲ باشد. این نمودار در شکل (۱-۳۹) نشان داده شده است. سطح زیر خم سرعت A دو برابر سطح زیر خم سرعت B است و این مساحت‌ها ، مسافت‌هایی اند که اتوموبیل‌ها پیموده‌اند.

ت-۸ وضعیت قطارها در شکل (۱-۴۰) نشان داده شده‌اند. مکان قطارها عبارتند از



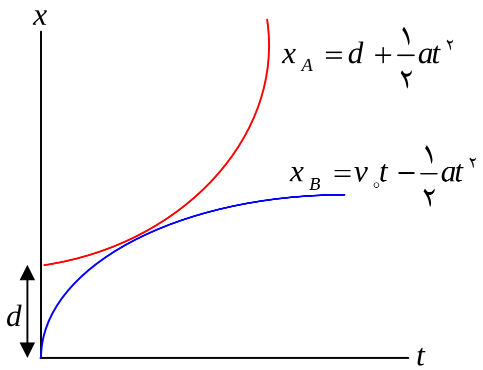
شکل ۱-۴۰

$$x_A = d + \frac{1}{2} a t^2 \quad , \quad x_B = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1-126)$$

این دو فاصله هنگامی باهم برابرند که داشته باشیم

$$d + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \;\Rightarrow\; a t^2 - v_0 t + d = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4ad}}{2a} \qquad (1-127)$$

اگر پاسخ حقیقی برای t وجود داشته باشد، قطارها باهم برخورد **می‌کنند**. یعنی اگر $v_0^2 \geq 4ad$ باشد. اگر $v_0^2 < 4ad$ باشد، رابطه‌ی (۱-۱۲۷) پاسخ حقیقی ندارد و قطارها باهم برخورد نخواهند کرد. پس، برای این که برخوردی روی ندهد باید $v_0 < 2\sqrt{ad}$ باشد. وقتی قطارها در آستانه‌ی برخورد قرار می‌گیرند که $v_0 = 2\sqrt{ad}$ باشد. نمودار تقریبی برای این حالت در



شکل ۱-٤۱

شکل (۱-٤۱) نشان داده شده است.

برای تمرین، نشان دهید که این وضعیت در مکان $3d/2$ روی می‌دهد و بیشینه مقدار x_B عبارت است از $2d$.

ت-۹ مبداء مختصات را در زمین و جهت مثبت را رو به بالا برگزینید. موقعیت مکانی توپ‌ها عبارت‌اند از

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad y_2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1-128)$$

و هنگامی با هم برابراند که

$$y_1 = y_2 \Rightarrow h - \frac{1}{2}gt^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{h}{v} \qquad (1-129)$$

پس، $t = h/v$ زمانی است که دو توپ باهم برخورد می‌کنند. می‌خواهیم ارتفاع نقطه‌ی برخورد از زمین $h/2$ باشد. بنابراین، اگر $t = h/v$ را در y_1 (یا y_2) قرار دهیم به دست می‌آید

$$\frac{h}{2} = h - \frac{1}{2}g\left(h/v\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{2} = \frac{1}{2}g\frac{h^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh} \qquad (1-130)$$

سرعت توپ دوم در زمان برخورد با توپ اول، $t = h/v$ ، برابر است با

$$v_2 = v - gt = \sqrt{gh} - g\left(h/v\right) = \sqrt{gh} - g\frac{h}{\sqrt{gh}} = 0 \qquad (1-131)$$

یعنی، تحت شرایط مسئله، در زمانی که برخورد روی می‌دهد، سرعت توپ دوم که از زمین به بالا پرتاب شده است، صفر می-شود. این نتیجه اندکی عجیب اما درست است. فرض کنید سرعت ذره‌ی دوم در هنگام برخورد صفر نمی‌بود و توپ‌ها بدون برخورد از درون یکدیگر می‌گذشتند. در این صورت توپ دوم از ارتفاع $h/2$ می‌گذشت و به بالا رفتنش ادامه می‌داد تا به نقطه‌ی اوج می‌رسید و سپس فرو می‌افتاد. در مسیر بازگشت بازهم به ارتفاع $h/2$ می‌رسید اما سرعتش **غیرصفر** می‌بود. توپ به سقوطش از ارتفاع $h/2$ به سوی زمین ادامه می‌داد. زمان لازم برای این بخش از سقوط $t = h/v$ است (چون با مسیر رو به بالا متقارن است) . این نتیجه با واقعیت این که توپ اول از **حالت سکون** مسافت $h/2$ رادر زمان $t = h/v$ سقوط می‌کند ناسازگار است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که سرعت توپ دوم در ارتفاع $h/2$ باید صفر باشد.

فصل ۲

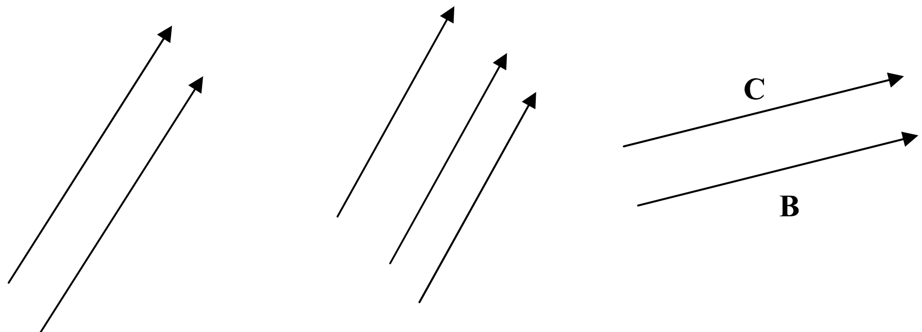
بردارها و پیش نیازهای ریاضی

۲-۱ پیشگفتار: مفهوم‌های مکانیک مانند نیرو، تکانه، تکانه‌ی زاویه‌ای و انرژی در همه‌ی گستره‌های فیزیک نقش برجسته‌ای پیدا می کنند. برای فهمیدن مفهوم‌های فیزیکی و اصول آن ناگزیر از بکارگیری زبان ریاضیات هستیم؛ چون زبان ریاضیات ما را در بیان روشن و کوتاه و دقیق توانا می‌کند و به روشنگری‌های تازه‌تر می‌انجامد. افزون بر این، ارتباط میان نظریه و آزمایش در فیزیک بر پایه‌ی پیش‌بینی‌های کیفی و اندازه‌گیری است. به این خاطر، در این فصل به پروراندن ابزار ریاضی لازم برای پی‌گیری دنباله‌ی مطلب خواهیم پرداخت.

۲-۲ بردارها: فراگیری جبر بردارها آغاز خوبی برای وارد کردن ریاضیات در فیزیک است. با استفاده از نمادهای برداری، بیشتر وقت‌ها قانون‌های فیزیکی را می‌توان ساده‌تر و کوتاهتر بیان کرد(ویلارد گیبس فیزیک‌دان دانشگاه ییل پایه‌گذار نمادهای مدرن برداری بود. او این کار را برای ساده سازی شکل معادله انجام داد). اگر چه ما از نمادهای برداری برای ساده‌تر کردن رابطه‌های فیزیکی استفاده خواهیم کرد، اما بردارها به مفهوم ژرفتری مربوط‌اند که اندیشه‌های بنیادی تقارن‌اند. از اینرو بکارگیری آنها می‌تواند به شکل های ناشناخته‌ی قانون‌ها بیانجامد.

تعریف بردار: بردارها را می‌توان از سه دیدگاه بررسی کرد: هندسی، تحلیلی، و اصول موضوعی. در اینجا ما از دیدگاه هندسی و تحلیلی به آنها خواهیم پرداخت.

از نگاه هندسی **بردار بخشی از یک خط جهت‌دار است**. آن را با نماد پر رنگ (سیاه) نشان خواهیم داد. برای توصیف یک بردار باید هم طول و هم جهت آن را مشخص کنیم. ما همچنین فرض خواهیم کرد که انتقال موازی یک بردار آن را تغییر نمی‌دهد. از این رو، پیکان های موازی درشکل(۱-۲) همگی یک بردار هستند.



شکل ۱-۲

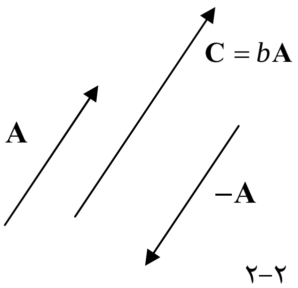
اگر طول و جهت دو بردار یکسان باشند، گوئیم آن دو با هم برابرند. بردارهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ در شکل (۱-۲) با هم برابرند: $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.
طول یک بردار را **اندازه بردار** می‌نامند. اندازه‌ی بردار $\mathbf{A}$ را با $|\mathbf{A}|$ یا A نشان می‌دهند. اگر طول $\mathbf{A}$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد آنگاه $|\mathbf{A}|=\mathbf{A}=\sqrt{۳}$. اگر طول برداری یک واحد باشد آن را بردار یکه می‌گویند و با کلاهی بالای نماد بردار نشان می‌دهند. بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{A}}$ موازی با بردار $\mathbf{A}$ موازی و عبارت است از:

$$\hat{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \qquad \text{یا} \qquad \hat{\mathbf{A}}=|\mathbf{A}|\ \hat{\mathbf{A}} \qquad (۱-۲)$$

۲-۳ جبر بردارها

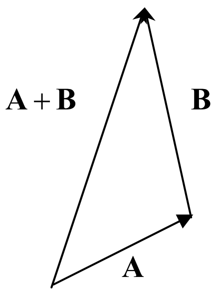
۱- ضرب بردار در یک عدد ثابت اگر بردار $\mathbf{A}$ را در عدد مثبت b ضرب کنیم بردار جدید $\mathbf{C}$ به دست می‌آید که طول آن b برابر طول بردار $\mathbf{A}$ است. در شکل (۲-۲) بردار $\mathbf{C}$ موازی بردار $\mathbf{A}$ است:

$\mathbf{C} = b\mathbf{A}$ و بنابراین $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}$ و $|\mathbf{C}| = b\,|\mathbf{A}|$. اگر بردار $\mathbf{A}$ را در عدد ۱- ضرب کنیم نتیجه بردار جدیدی است که جهت آن وارون جهت $\mathbf{A}$ است (پاد موازی). پس ضرب یک بردار در عددی منفی می‌تواند هم طول و هم جهت آن را تغییر دهد.



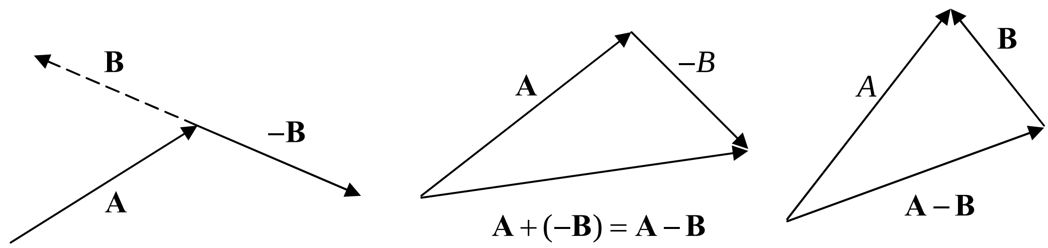
شکل ۲-۲

۲- جمع بردارها توصیف هندسی جمع دو بردار را به سادگی در شکل (۳-۲) می‌بینید. قاعده از این قرار است: برای افزودن $\mathbf{B}$ به $\mathbf{A}$ انتهای بردار $\mathbf{B}$ را در سر بردار $\mathbf{A}$ (پیکان $\mathbf{A}$) قرار دهید. حاصل برداری است از انتهای $\mathbf{A}$ به سر $\mathbf{B}$.



شکل ۳-۲

۳- تفریق دو بردار چون $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (\mathbf{-B})$ است، برای کم کردن $\mathbf{B}$ از $\mathbf{A}$ می‌توان $\mathbf{B}$ را در ۱- ضرب و سپس آن دو را با هم جمع کرد. شکل (٤-۲) این را نشان می‌دهد. شیوه‌ی دیگر ساختن $\mathbf{A - B}$ در نمودار سمت راست شکل (٤-۲) نشان داده شده است:سرِ پیکان $\mathbf{A}$ و سرِ پیکان $\mathbf{B}$ را بر هم بگذارید. در این صورت $\mathbf{A - B}$ برداری است که از انتهای $\mathbf{A}$ بسوی انتهای $\mathbf{B}$ کشیده می‌شود. اثبات هندسی قانون‌های زیر آسان است آنها را به شما واگذار می‌کنیم.



شکل ٤-۲

قانون جا به جا پذیری $\quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

قانون شرکت پذیری

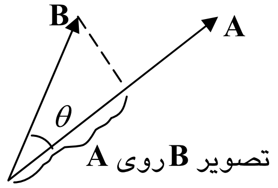
$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$
$$c(d\ \mathbf{A}) = (cd)\ \mathbf{A}$$

قانون پخش پذیری

$$(c + d)\ \mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$$
$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$

۴- ضرب داخلی (نقطه‌ای) بردارها ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را با $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ نشان می‌دهند و آن را ضرب نقطه‌ای یا

ضرب داخلی (نام دیگر: ضرب اسکالر، ضرب دکارتی) می‌نامند زیرا از ترکیب دو بردار یک کمیت عددی (اسکالر) نتیجه



شکل ۵-۲

می‌شود. ضرب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|A||B|cos\theta \qquad (۲-۲)$$

θ زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است و درشکل (۵-۲) نشان داده شده است. $|\mathbf{B}|\cos\theta$ تصویر بردار $\mathbf{B}$ روی بردار $\mathbf{A}$ است. بیان هم ارز این است که بگوییم $|\mathbf{B}|\cos\theta$ مولفه ی بردار $\mathbf{B}$ در راستای بردار $\mathbf{A}$ است. اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=۰$ باشد آنگاه یا $|\mathbf{A}|=۰$ یا $|\mathbf{B}|=۰$ و یا $\cos\theta=۰$ ($\mathbf{A}$ به $\mathbf{B}$ عمود است).

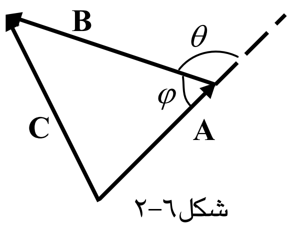
بنابراین ، ضرب داخلی دو بردار غیر صفر می تواند صفر باشد. همچنین توجه کنید که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^۲$ است. روشن است که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{B}||\mathbf{A}|\cos\theta$ و در نتیجه ضرب داخلی دو بردار جا به‌جاپذیر است. ضرب داخلی بخش‌پذیر نیز هست.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \qquad (۲-۳)$$

سودمندی ضرب داخلی را در اثبات ساده‌ی قانون کسینوس‌ها می‌توان دید

مثال ۱-۲ (قانون کسینوس‌ها): قانون سینوس ها را ثابت کنید

حل:



شکل۶-۲

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$$
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$|\mathbf{C}|^۲=|\mathbf{A}|^۲+|\mathbf{B}|^۲+۲|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

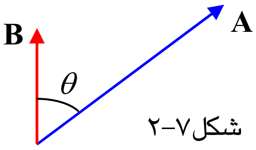
معمول این است که نتیجه‌ی بالا برحسب زاویه‌ی φ در شکل (۶-۲) بیان شود. این کار را با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos\theta=\cos(\pi-\phi)=-\cos\varphi$ می‌توان انجام داد و داریم $C^۲=A^۲+B^۲-۲AB\cos\varphi$

مثال ۲-۲ کار و ضرب داخلی یکی از مهمترین کاربردهای ضرب نقطه‌ای در بحث کار و انرژی است که در فصل‌های ٤ و ٥ به آن خواهیم پرداخت. شاید شما بدانید که کار (W) نیروی $\mathbf{F}$ روی جسمی که به اندازه‌ی d جابه‌جا شده است با حاصل ضرب جابه‌جایی d و مؤلفه‌ی $\mathbf{F}$ در راستای جابه‌جایی برابر است . اگر نیرو با راستای جابه‌جایی زاویه θ بسازد آنگاه کار نیرو با $W=(F\cos\theta)d$ برابر است. اگر بپذیرید که جابه‌جایی و نیرو هر دو بردارند آنگاه می‌توان نوشت: $W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$.

اگر بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با زمان و یا هر چیز دیگری تغییر کنند؛ یعنی هر کدام تابعی از متغیر عددی مانند t باشند مشتق حاصل‌ضرب داخلی آنها را به آسانی می‌توان به دست آورد. در اینجا ما آن را بیان می‌کنیم. در بخش‌های آینده‌ی این فصل به مشتق‌گیری از بردار خواهیم پرداخت.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\mathbf{B}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad (۲-٤)$$

٥ - ضرب برداری (خارجی) بردارها گونه‌ی دوم ضرب بردارها که به آن نیاز خواهیم داشت ضرب برداری یا خارجی دو بردار است. دراین گونه ضرب، آمیزه‌ی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردار سومی را می‌سازد. یعنی نتیجه‌ی ضرب خارجی یا برداری دو بردار خود یک بردار است و به صورت زیر تعریف می‌شود.



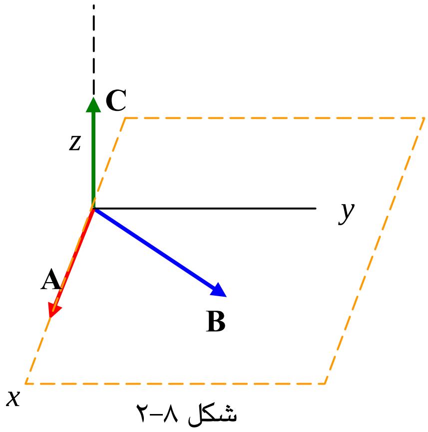
شکل۷-۲

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (۲-۵)$$

ضرب برداری پیچیده‌تر از ضرب داخلی است زیرا اینک بایدهم اندازه و هم جهت بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را مشخص کنیم. اندازه‌ی بردار $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \qquad (۲-۶)$$

در اینجا هم θ زاویه‌ی بین بردار $\mathbf{A}$ و بردار $\mathbf{B}$ در شکل (۷-۲) است. برای این که ناروشنی را از میان برداریم θ را همواره کوچکتر از π در نظر خواهیم گرفت. اگر $|\mathbf{A}|$ و $|\mathbf{B}|$ هر دو غیر صفر باشند، ضرب خارجی هنگامی صفر می شود که $\theta = 0$ ($\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی) یا $\theta = \pi$ ($\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ پاد موازی) باشد. دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در شکل (۷-۲) یک صفحه می‌سازند. حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ یعنی بردار $\mathbf{C}$ به صفحه‌ی دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است. البته دو جهت وجود دارد که به این صفحه عمود است: «بیرون» از صفحه و به«درون» صفحه. کدام یک جهت $\mathbf{C}$ را مشخص می‌کند؟ این ناروشنی را با ***قاعده‌ی دست راست*** می‌توان از میان برداشت: اگر انگشت های دست راست شما در جهت بردار اول (دراینجا $\mathbf{A}$) قرار گیرد و آنها را به سوی بردار دوم (در اینجا $\mathbf{B}$) بچرخانید (در امتداد زاویه‌ی کوچکتر θ) آنگاه انگشت شست شما جهت بردار $\mathbf{C}$ را نشان خواهد داد. در شکل (۷-۲) جهت $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ به سوی بیرون از صفحه است و جهت $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ به سوی صفحه. سه بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ یک **سه تایه‌ی دست راستی** می‌سازند. به دستگاه مختصات راست‌دست شکل (۸-۲) بیندیشید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صفحه‌ی xy قرار دارند.



شکل ۸-۲

$\mathbf{A}$ روی محور x هاست و $\mathbf{B}$ به محور y ها نزدیک است. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ یک سه تایه‌ی دست راستی بسازند،آنگاه $\mathbf{C}$ روی محور z ها قرار می‌گیرد. یک نتیجه‌ی تعریف ما از ضرب برداری این است که

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (۲-۷)$$

یعنی ترتیب نوشتن بردارها در ضرب برداری مهم است. ضرب برداری جابه‌جا پذیر نیست. تغییر ترتیب بردارها، جهت بردار حاصل‌ضرب را وارون می‌کند.

بنابراین می‌بینیم که برای هر بردار دلبخواه $\mathbf{A}$:

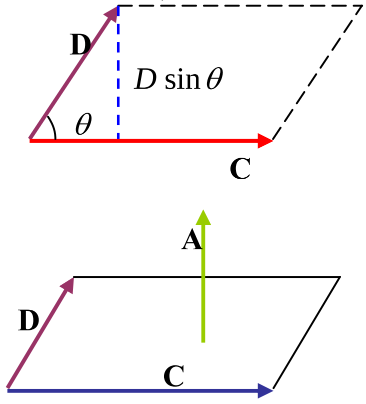
$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = ۰ \qquad (۲-۸)$$

ضرب برداری ***بخش پذیر*** است:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\times\mathbf{C}) \qquad (۲-۹)$$

از نظر هندسی، $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌سازند.

مثال ۳-۲ مساحت: به طور معمول مساحت را با مقدار آن بیان می‌کنند اما در فیزیک، بیش‌تر وقت‌ها نیازمندیم که جهت‌گیری سطح را هم مشخص کنیم. برای نمونه، اگر بخواهیم آهنگ شارش آب رودخانه به درون لوله‌ای با سطح قاعده‌ی معینی را حساب کنیم. روشن است که اگر سطح قاعده‌ی لوله به شارش عمود باشد و یا با آن موازی باشد، آهنگ وارد شدن آب به لوله فرق می‌کند (درحالت موازی البته آهنگ شارش صفر است). این کار با استفاده از ضرب برداری شدنی است: سطح چهار ضلعی شکل (۹-۲) را در نظر بگیرید که با بردارهای $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ ساخته شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع عبارت است از طول ضربدر عرض: $A = (\text{طول})\times(\text{عرض}) = CD\,\sin\theta = |\mathbf{C}\times\mathbf{D}|$. اگر به $\mathbf{A}$ همانند یک بردار نگاه کنیم، داریم $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}\times\mathbf{D}$. دیدیم که اندازه‌ی $\mathbf{A}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است و ضرب برداری جهت آن را تعریف می‌کند.

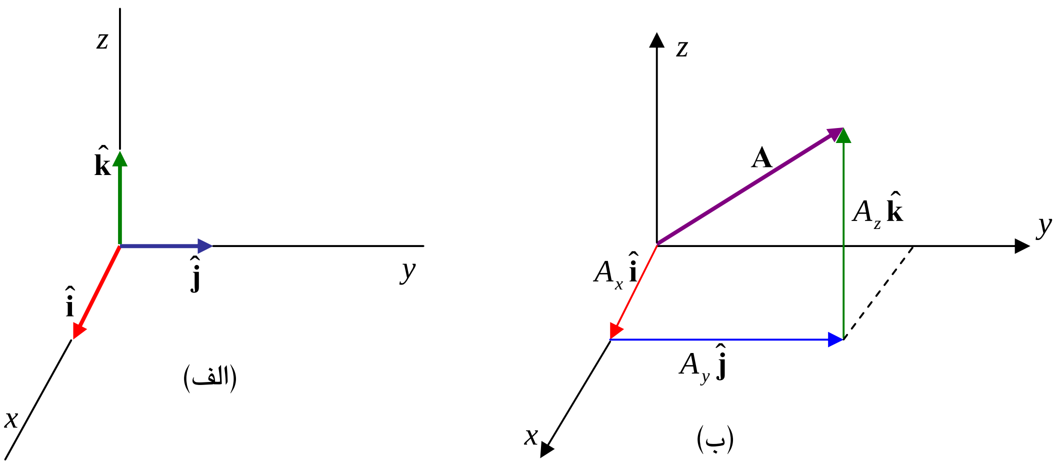


شکل ۹-۲

۲-۴ مؤلفه‌های بردار

تاکنون چهار عمل روی بردارها (جمع، تفریق، ضرب نقطه‌ای و ضرب برداری) را بدون این که دستگاه مختصات خاصی را در نظر بگیریم، بیان کردیم. این نشان می‌دهد که چرا بردارها سودمندند. عمل‌های برداری به چارچوب مختصات وابسته نیستند. اما، سرانجام ناگزیریم که نتایج خود را روشن‌تر و با عدد نشان دهیم. برای این کار باید چارچوب مختصاتی را برای کار کردن برگزینیم. مختصات کارتزی ساده‌ترین‌اند. فرض کنید $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ به ترتیب بردارهای یکه‌ی موازی با محور x و y و z در شکل (۱۰-۲ الف) باشند. هر بردار دلخواه $\mathbf{A}$ را می‌توان برابر شکل (۱۰-۲ ب) برحسب **بردارهای پایه** بسط داد:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۰)$$



شکل ۱۰-۲

کمیت‌های A_x و A_y و A_z عدد اند و **مؤلفه‌های** بردار $\mathbf{A}$ نام دارند. از نظر هندسی آنها به ترتیب تصویر بردار $\mathbf{A}$ روی محورهای x و y و z اند. اینک می‌توانیم هر یک از چهار عمل روی بردارها را برحسب مؤلفه‌ها بنویسیم:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}})+(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}})$$
$$= (A_x+B_x)\hat{\mathbf{i}}+(A_y+B_y)\hat{\mathbf{j}}+(A_z+B_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۱)$$

قاعده ۱ : برای جمع بستن بردارها، مؤلفه‌های همسان را با هم جمع کنید.

$$b\mathbf{A} = b(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}}) = (bA_x)\hat{\mathbf{i}}+(bA_y)\hat{\mathbf{j}}+(bA_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۲)$$

قاعده ۲ : در ضرب بردار با یک مقدار ثابت، هر مؤلفه را در مقدار ثابت ضرب کنید.

$\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ بردارهای یکه اند که بر هم عمودند. بنا به رابطه‌ی (۲-۲) ضرب داخلی آنها به قرار زیر است

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = ۱ \quad , \quad \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = ۰ \qquad (۲-۱۳)$$

در نتیجه

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}}) = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۲-۱۴)$$

قاعده‌ی ۳ : در محاسبه‌ی ضرب داخلی دو بردار، مؤلفه‌های همسان را در هم ضرب کنید و سپس نتیجه را با هم جمع کنید. به ویژه

$$A=|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲} \quad \text{یا} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲ \qquad (۲-۱۵)$$

(این قضیه فیثاغورث در سه بعد است.) توجه کنید که حاصل ضرب داخلی بردار $\mathbf{A}$ با هریک از بردارهای ***یکه*** با مؤلفه‌ی بردار در راستای آن بردار یکه برابر است (یعنی $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}=A_x$, $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{j}}=A_y$ و $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{k}}=A_z$).

به همین‌گونه می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲-۵) ضرب برداری بردارهای یکه را حساب کرد. در چارچوب مختصات راست دست داریم:

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}=۰,$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=-\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=-\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲-۱۶)$$

اینک می‌توان ضرب برداری دو بردار را حساب کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}})\times(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}})\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\mathbf{i}}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\mathbf{j}}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \qquad (۲-۱۷)$$

این رابطه‌ی پیچیده را می‌توان در شکل زیباتر دترمینان نوشت:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (۲-۱۸)$$

قاعده ۴: برای محاسبه‌ی ضرب برداری دترمیناتی تشکیل دهید که سطر نخست آن بردارهای یکـه، سـطر دوم آن بـردار اول (در اینجا $\mathbf{A}$) و سطر سوم آن بردار دوم (در اینجا $\mathbf{B}$) است . جمله‌های بسط دترمینان مؤلفه‌های بردار حاصل ضرب برداری $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ است.

مثال ۴-۲ بردارهای $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{i}}+۳\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ و $\mathbf{B}=۴\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+۳\hat{\mathbf{k}}$ داده شده اند بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را حساب کنید.

حل:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ ۱ & ۳ & -۱\\ ۴ & ۱ & ۳\end{vmatrix}=۱۰\hat{\mathbf{i}}-۷\hat{\mathbf{j}}-۱۱\hat{\mathbf{k}}$$

مثال ۵-۲ در مکعب **زیر**، شکل (۲-۱۱) زاویه‌ی θ را حساب کنید.

حل: طول ضلع مکعب یک است و $\mathbf{A}=۱\hat{\mathbf{i}}+۰\hat{\mathbf{j}}+۱\hat{\mathbf{k}}$ و $\mathbf{B}=۰\hat{\mathbf{i}}+۱\hat{\mathbf{j}}+۱\hat{\mathbf{k}}$ بنابراین، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(۱)(۰)+(۰)(۱)+(۱)(۱)=۱$

از سوی دیگر

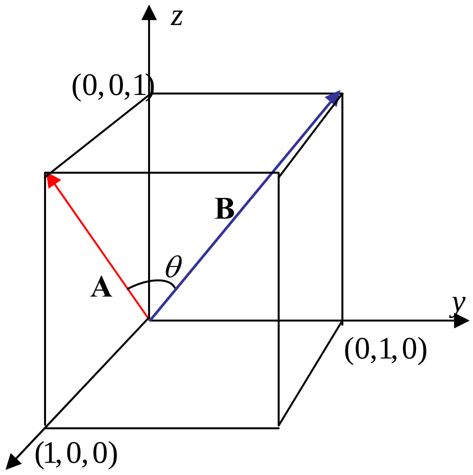
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta=\sqrt{۲}\sqrt{۲}\cos\theta=۲\cos\theta$$

$$۲\cos\theta=۱ \Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۶۰^\circ$$

ضرب سه تایی بردارها:

چون ضرب برداری دو بردار، خود یک بردار است، این بردار را می‌توان با بردار دیگری ضرب نقطه‌ای یا برداری کرد و **ضرب**

سه‌تایی بردارها را ساخت.



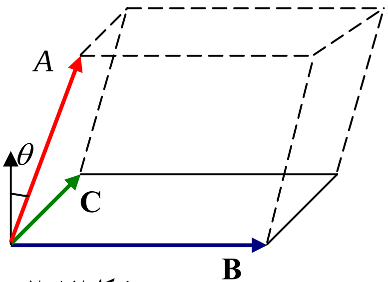
شکل ۲-۱۱

۱- **ضرب سه‌تایی نقطه‌ای** $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$: از نگاه هندسی $|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$ حجم متوازی‌السطوح شکل (۲-۱۲) است که با $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ساخته شده است؛ چون $|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|$ مساحت قاعده و $|A\cos\theta|$ ارتفاع آن است و داریم

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \qquad (۱-۱۹)$$

زیرا همه‌ی اینها مربوط به یک حجم اند. توجه کنید که ترتیب الفبایی حفظ شده است. اگر ضرب سه‌تایی بالا را برحسب مؤلفه‌های بردارها بنویسیم داریم:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۲-۲۰)$$



شکل ۲-۱۲

توجه کنید که می‌توان جای نقطه $(\cdot)$ و ضرب $(\times)$ را عوض کرد:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \qquad (۲-۲۱)$$

این رابطه از (۱-۱۹) نتیجه شده است. اما توجه کنید که پرانتزها را نمی‌توان جا به جا کرد: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ بی‌معنی است چون با یک کمیت عددی $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ نمی‌توان ضرب برداری ساخت .

۲- **ضرب سه تایی برداری:** $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ این ضرب سه تایی را می‌توان با استفاده از قاعده‌ی $BAC-CAB$ ساده کرد:

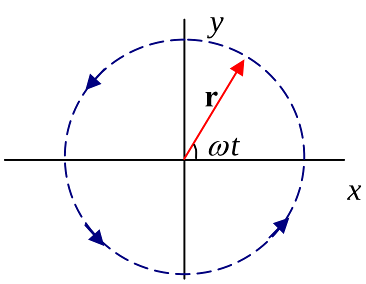
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۲-۲۲)$$

توجه کنید که $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=-\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=-\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})+\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$ بردار دیگری است. با تکرار رابطه (۲-۲۲) می‌توان ضرب بردارهای بیش از سه تا راهم ساده‌تر کرد. بنابراین، هرگز لازم نیست که بیش از یک ضرب برداری در رابطه‌ای وجود داشته باشد. برای نمونه:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}.\mathbf{D})(\mathbf{B}.\mathbf{C}) \qquad (۲-۲۳)$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}))=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}))-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) \qquad (۲-۲٤)$$

مثال ۲-۶ حرکت دایره‌ای یکنواخت: ذره‌ای برابرشکل (۲-۱۳) در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند. بردار مکان آن $\mathbf{r}=r(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}})$ است که در آن r و ω مقدار های ثابت‌اند. مسیر، سرعت و شتاب ذره را به دست آورید.



شکل ۲-۱۳

حل: داریم

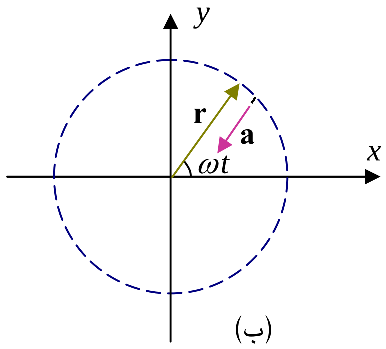
$$|\mathbf{r}|=\left(r^{۲}\cos^{۲}\omega t+r^{۲}\sin^{۲}\omega t\right)^{۱/۲}=r\left(\cos^{۲}\omega t+\sin^{۲}\omega t\right)^{۱/۲}=r \qquad (۲-۲۵)$$

که مقدار ثابتی است. پسریال مسیر دایره‌ای به شعاع r است. ذره روی دایره پاد

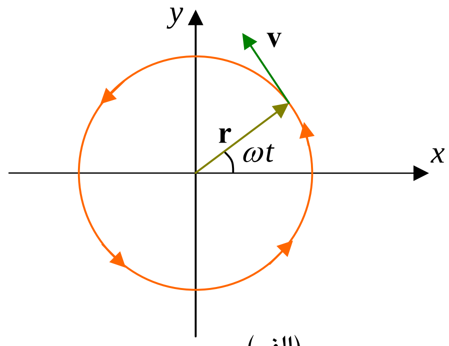
ساعتگرد می‌چرخد و در زمان $t=0$ از نقطه‌ی $(r,0)$ آغاز به حرکت می‌کند. در زمان T، ذره یک دور کامل روی دایره می‌پیماید، به طوری که $\omega T=2\pi$ شود. سرعت زاویه‌ای حرکت، ω، است. و یکای آن رادیان بر ثانیه است. T زمان یک دور چرخیدن است و به آن **دوره** حرکت می‌گویند.

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) \tag{۲-۲۶}$$

می‌توان نشان داد که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ بر هم عمودند، یعنی $\mathbf{v}$ همواره بر مسیر حرکت مماس است. این کار را با حساب کردن $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}$ انجام می‌دهیم: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}=r^{۲}\omega(-\sin\omega t\cos\omega t+\cos\omega t\sin\omega t)=۰$



شکل ۱۴-۲



چون $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{r}$ عمود است، پس $\mathbf{v}$ به دایره نیز مماس است (شکل ۱۴-۲ ب را ببینید). برای این که نشان دهیم اندازه‌ی $\mathbf{v}$ مقدار ثابت و برابر $|\mathbf{v}|=r\omega$، است ، توجه کنید که داریم.

$$|\mathbf{v}|=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{۱/۲}=\left[r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})\cdot r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})\right]^{۱/۲}=r\omega \tag{۲-۲۷}$$

شتاب ذره عبارت است از

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=r\omega^{۲}(-\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}}-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}})=-\omega^{۲}\mathbf{r} \tag{۲-۲۸}$$

شتاب در راستای شعاع و به سوی مرکز است که همان شتاب مرکز گراست و درشکل(۱۴-۲ب) نشان داده شده است

۲-۵ مشتق: فرض کنید f تابعی از یک متغیر، مانند x است: $f(x)$. مشتق df/dx یعنی چه؟ پاسخ روشن است: df/dx می‌گوید هنگامی که x به اندازه‌ی مقدار جزیی dx تغییر کند تابع f با چه آهنگی تغییر خواهد کرد

$$df=\left(\frac{df}{dx}\right)dx \tag{۲-۲۹}$$

یعنی اگر x را به اندازه‌ی dx تغییر دهیم، آنگاه f به اندازه df تغییر می‌کند. مشتق df/dx ضریب تناسب میان تغییر x و تغییر f است. از دید هندسی، مشتق df/dx شیب خم $f(x)$ است.

گرادیان : اینک فرض کنید تابعی داریم که به سه متغیر وابسته است. برای نمونه دمای اتاق را در نظر بگیرید: $T(x,y,z)$. اجازه دهید مفهوم مشتق را به توابعی مانند T که به بیش از یک متغیر وابسته‌اند ، گسترش دهیم.

خب؛ قرار است مشتق به‌ما بگوید که اگر اندکی جابه‌جا شویم آنگاه تابع با چه آهنگی تغییر می‌کند. اکنون مسئله درباره‌ی تابعی مانند T اندکی دشوارتر است، چون به جهتی که در آن سو جابه‌جا می‌شویم بستگی دارد. اگر رو به بالا برویم به احتمال زیاد تغییر دما خیلی سریع است؛ اما اگر افقی حرکت کنیم، شاید تغییر دما محسوس نباشد و اگر در جهت بینابینی حرکت کنیم تغییر

دما هم بینابینی خواهد بود. پس، پرسش این که « دمای اتاق یا تابع $T\ (x\ ,y\ ,z\ )$ با چه سرعتی تغییر می‌کند؟ » بینهایت پاسخ دارد. برای هر جهتِ جا به‌جایی یک پاسخ وجود دارد. به نظر می‌رسد که برای توصیف تغییر $T\ (x\ ,y\ ,z\ )$ به بینهایت مشتق نیاز داریم. خوشبختانه، مسئله این قدرها هم نا امید کننده نیست. قضیه‌ای در حساب پارمشتق‌ها (مشتق‌های جزیی) می‌گوید:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz \qquad (۲-۳۰)$$

این قاعده می‌گوید که با تغییر هر سه متغیر به اندازه‌ی‌های کوچک dx، dy و dz ، چگونه T تغییرمی‌کند. توجه کنید که به بینهایت مشتق‌گیری نیازی نیست؛ سه تا مشتق بسنده است: سه پارمشتق، هر کدام در راستای یک محور مختصات! بهتر است این قاعده را در شکل مناسب‌تری بنویسیم و بکوشیم دستاوردهای آن را بشناسیم. رابطه‌ی (۲-۳۰) را می‌توان به صورت ضرب داخلی دو بردار نوشت

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}\right) \equiv (\nabla\mathbf{T})\cdot(d\,\mathbf{l}) \qquad (۲-۳۱)$$

در سمت راست دو کوتاه نوشت زیر را جایگزین کردیم

$$d\,\mathbf{l} \equiv dx\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۳۲)$$

که **بردار جابه‌جایی جزیی** است، و

$$\nabla\mathbf{T} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۳۳)$$

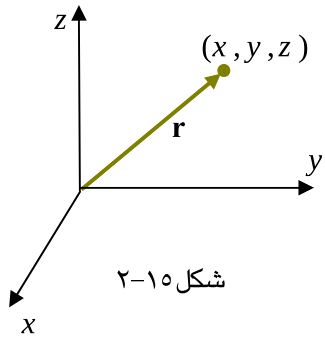
که **گرادیان** T نام دارد و یک کمیت برداری با سه مؤلفه است. رابطه‌ی (۲-۳۱) تعمیم رابطه‌ی (۲-۲۹) است که در پی آن بودیم . توصیف هندسی گرادیان دشوار نیست: مانند هر برداری، گرادیان هم اندازه و جهت دارد. برای اینکه معنی هندسی آن را بفهمیم رابطه‌ی (۲-۳۱) را به صورت زیر بنویسید.

$$dT = \nabla\mathbf{T}\cdot d\,\mathbf{l} = |\nabla\mathbf{T}|\,|d\,\mathbf{l}|\cos\theta \qquad (۲-۳٤)$$

که در آن θ زاویه‌ی بین $\nabla\mathbf{T}$ و $d\,\mathbf{l}$ است. حال اگر اندازه‌ی $|d\mathbf{l}|$ را ثابت نگهداریم و در جهت‌های گوناگون بگردیم (یعنی θ را تغییر دهیم) می‌بینیم که بزرگترین تغییر در T (یعنی dT) هنگامی پدید می‌آید که $\theta = 0$ است. یعنی به ازای $|d\mathbf{l}|$ معین؛ $d\mathbf{T}$ هنگامی بزرگترین است که در جهت $\nabla\mathbf{T}$ حرکت کنیم. پس: $\nabla\mathbf{T}$ جهت بیشترین افزایش تابع T است. فرض کنید در دامنه‌ی کوهپایه‌ای ایستاده‌اید و می‌خواهید بدانید که بیشترین شیب سربالایی کوه در کدام یال آن است. یالی که تیزترین شیب سر بالایی را دارد جهت **گرادیان** است. اندازه‌ی شیب کوه در آن یال **اندازه‌ی** گرادیان است. در اینجا تابع ارتفاع کوه و متغیرهای آن طول و عرض جغرافیایی اند و تابع فقط به دو متغیر وابسته است.

مثال ۷-۲ در شکل (۲-۱۵) فرض کنید $r = (x\ ,y\ ,z\ )$ فاصله‌ی نقطه $(x\ ,y\ ,z\ )$ از مبداء مختصات است؛ یعنی داریم: $r = \sqrt{x^{2} + y^{2} + z^{2}}$. گرادیان r را بدست آورید.

حل: در این مثال پیش از آنکه $\nabla\mathbf{r}$ را حساب کنیم، می‌توان جهت و اندازه‌ی $\nabla\mathbf{r}$ را به دست آورد: روشن است که هر چه در امتداد شعاع r از مرکز دورتر می‌شویم، r نیز با آهنگ بزرگ‌تری افزایش پیدا می‌کند. افزون براین، اگر در امتداد شعاعی به اندازه‌ی $d\,\ell$ از مبداء دور شویم، r به اندازه‌ی $d\,\ell$ افزایش پیدا می‌کند یعنی $dr = d\,\ell$. پس اندازه‌ی $|\nabla\mathbf{r}|$ برابربرابر یک است.



شکل ۲-۱۵

در اینجا $\Delta\mathbf{r}$ بردار یکه‌ای در امتداد شعاع است. بنابراین، $\Delta\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}$. اینک به محاسبه‌ی آن می‌پردازیم:

$$\nabla\mathbf{r}=\frac{\partial r}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial r}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial r}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$
$$=\frac{۱}{۲}\frac{۲x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{۱}{۲}\frac{۲y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{۱}{۲}\frac{۲z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\hat{\mathbf{k}}$$
$$=\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲-۳۵)$$

۲-۶ عملگر ∇: گرادیان $\vec{\nabla}T$ شبیه این است که برداری به نام ∇ در یک کمیت عددی مانند T ضرب شده باشد.

$$\nabla T=(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z})T \qquad (۲-۳۶)$$

(در اینجا بردارهای یکه را در سمت چپ نوشته‌ایم تا با $\partial\hat{\mathbf{i}}/\partial x$ ، $\partial\hat{\mathbf{j}}/\partial y$ و $\partial\hat{\mathbf{k}}/\partial z$ اشتباه نشود.) جمله‌ی درون پرانتز تعریف نماد ∇ است.

$$\nabla\equiv\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۲-۳۷)$$

اگرچه ∇ شکل یک بردار با مؤلفه‌های $\partial/\partial x$ ، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ را دارد اما، به مفهوم معمولی یک بردار نیست؛ بلکه یک **عملگر برداری** است. با وجود این، ∇ از هر نظر رفتار یک بردار معمولی را دارد. یک بردار معمولی را می‌توان به سه گونه ضرب کرد: (i) در یک عدد، (ii) ضرب داخلی با یک بردار دیگر و (iii) ضرب خارجی با یک بردار دیگر. همین کار را می‌توان با ∇ انجام داد.

(۱) ضرب در یک تابع عددی مانند T : در این صورت ∇T همان گرادیان است.

(۲) ضرب در یک بردار مانند $\mathbf{F}$: در این صورت $\nabla\cdot\mathbf{F}$ **دیورژانس** یا **واگرایی** $\mathbf{F}$ نامیده می‌شود.

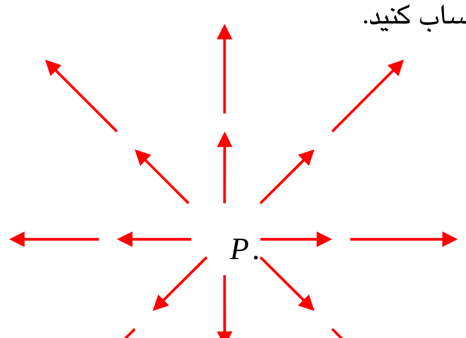
(۳) ضرب برداری در یک بردار مانند $\mathbf{F}$: در این صورت $\nabla\times\mathbf{F}$ را **تاو** تا **کرل** بردار $\mathbf{F}$ می‌نامند.

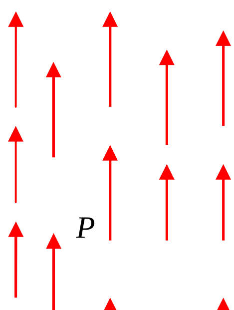
۲-۷ دیورژانس: در این کتاب ما از دیورژانس استفاده نخواهیم کرد اما برای کامل شدن موضوع در اینجا به کوتاهی به آن می‌پردازیم. از تعریف ∇ داریم:

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(F_x\hat{\mathbf{i}}+F_y\hat{\mathbf{j}}+F_z\hat{\mathbf{k}})=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (۲-۳۸)$$

روشن است که دیورژانسِ یک تابع برداری، کمیت عددی، $\nabla\cdot\mathbf{F}$، است (تابع عددی دیورژانس ندارد.) از نظر هندسی؛ دیورژانس $\mathbf{F}$ سنجه‌ی واگرایی بردار $\mathbf{F}$ در نقطه‌ی مورد نظر است. تابع برداری شکل (۲-۱٦ الف) در نقطه‌ی P واگرایی بزرگی دارد. حال آنکه دیورژانس تابع برداری شکل (۲-۱٦ب) در نقطه‌ی P صفر است.

مثال ۲-۸ دیورژانس بردارهای **(الف)**: $\mathbf{r}=x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}$ مربوط به شکل (۲-۱٦ الف) و **(ب)** $\mathbf{F}=2\hat{k}$ مربوط به شکل (۲-۱٦ب) را حساب کنید.





حل: **(الف)**

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=۱+۱+۱=۳ \qquad (۲-۳۹)$$

(ب):

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(\circ)+\frac{\partial}{\partial y}(\circ)+\frac{\partial}{\partial z}(۲)=۰+۰+۰=۰ \qquad (۲-۴۰)$$

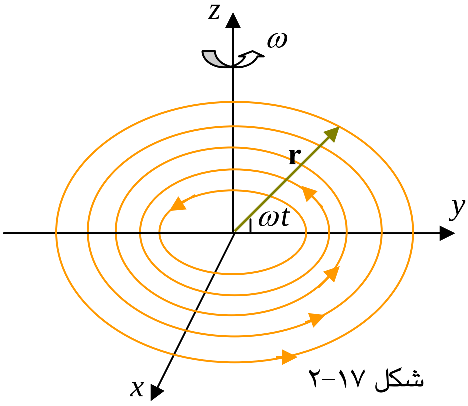
۲-۸ کرل یا تاو : همانگونه که گفتیم؛ تاو یا کرل یک تابع برداری ضرب برداری ∇ با آن بردار است. کرل یا تاو بردار $\mathbf{F}$ عبارت است از:

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{i}}(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})+\hat{\mathbf{j}}(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})+\hat{\mathbf{k}}(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}) \qquad (۲-۴۱)$$

می‌بینیم که کرل بردار $\mathbf{F}$، خود یک بردار است.

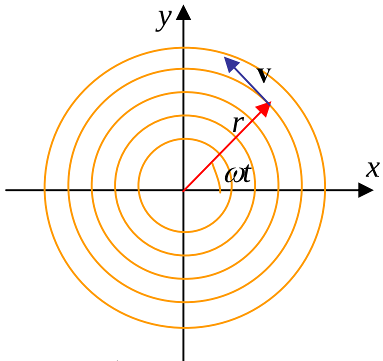
توصیف هندسی کرل یا تاو: کرل برای توصیف ویژگی‌های حرکتی شاره‌ها اختراع شد. کرل یک تابع برداری سنجه‌ای برای اندازه‌گیری چرخش آن بردار در یک نقطه است. برای این‌که ببینید چگونه کرل به چرخش مربوط می‌شود، گرداب آرمانی (شکل ۱۷-۲) را در نظر بگیرید که آب با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول مرکز می‌چرخد. سرعت آب در $\mathbf{r}$ عبارت است از $\mathbf{v}=r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار یکه‌ی مماس بر مسیر است. در شکل (۱۸-۲) بردار سرعت در یک نقطه نشان داده شده است. بردار سرعت $\mathbf{v}$ در مختصات کارتزی به صورت

$$\mathbf{v}=r\omega(-\sin\omega t\ \hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\ \hat{\mathbf{j}})=r\omega(-\frac{y}{r}\hat{\mathbf{i}}+\frac{x}{r}\hat{\mathbf{j}})=-\omega y\ \hat{\mathbf{i}}+\omega x\ \hat{\mathbf{j}}$$



شکل ۱۷-۲

است. بنابراین،



شکل ۲-۱۸

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}$$
$$=\hat{\mathbf{k}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega x)-\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right]=2\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۴۲)$$

مثال ۹-۲ نیروی گرانش میان دو جسم به صورت زیر است که در آن A مقدار ثابتی است

$$\mathbf{F}=\frac{A}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=A\frac{\mathbf{r}}{r^3}=A\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{r^3} \qquad (۲-۴۳)$$

مؤلفه‌ی x کرل $\mathbf{F}$ ، یعنی $(\nabla\times\mathbf{F})_x=(\partial F_z/\partial y)-(\partial F_y/\partial z)$ را حساب کنید.

حل: داریم

$$(\nabla\times\mathbf{F})_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Az}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ay}{r^3}\right) \qquad (۲-۴۴)$$

و چون $r^3=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ است، در نتیجه، جمله‌ی اول سمت راست رابطه‌ی (۲-۴۴) عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial y}\,Az\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}=Az\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2y)=-3A\frac{zy}{r^5} \qquad (۲-۴۵)$$

همچنین برای جمله‌ی دوم داریم $\partial/\partial z\,(Ay/r^3)=-3A\,(yz/r^5)$ و بنابراین:

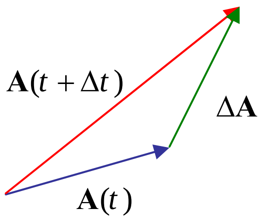
$$(\nabla\times\mathbf{F})_x=-3A\frac{zy}{r^5}+3A\frac{yz}{r^5}=0 \qquad (۲-۴۶)$$

به همین ترتیب می‌توان مؤلفه‌های دیگر $\nabla\times\mathbf{F}$ را حساب کرد. آن‌ها هم صفرند. پس، برای نیروی گرانش $\nabla\times\mathbf{F}=0$. در آینده خواهیم دید که اگر کرل نیرویی صفر باشد آن نیرو پایستار است.

۲-۹ مشتق یک بردار در شکل (۲-۱۹) بردار $\mathbf{A}(t)$ را در نظر بگیرید که تابع زمان است . تغییر بردار $\mathbf{A}$ در بازه‌ی زمانی بین t و $t+\Delta t$ عبارت است از $\Delta\mathbf{A}=\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)$. همان‌گونه که در مشتق‌گیری از بردار مکان $\mathbf{r}$ در فصل ۱ انجام دادیم در این‌جا هم مشتق زمانی $\mathbf{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t} \qquad (۲-۴۷)$$

توجه کنید که $d\mathbf{A}/dt$ بردار جدیدی است که می‌تواند بزرگ یا کوچک باشد و ممکن است در هر سویی جهت‌گیری کند. این همه به رفتار $\mathbf{A}$ بستگی دارد. یک فرق بنیادی بین $d\mathbf{A}/dt$ و مشتق یک تابع عددی وجود دارد. $\mathbf{A}$ می‌تواند هم با تغییر **اندازه** و هم با تغییر در **جهت** آن، تغییر کند؛ حال آنکه فقط اندازه‌ی تابع عددی می‌تواند تغییر کند. این تفاوت بسیار مهم است. در عمومی ترین حالت، هم جهت و هم اندازه‌ی $\mathbf{A}$، هر دو می‌توانند هم زمان تغییر کنند. در مثال ۶-۲ از حرکتی سخن گفتیم که بردار مکان با $\mathbf{r}=r(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}})$ داده شده بود. سرعت این حرکت عبارت است از $\mathbf{v}=r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})$



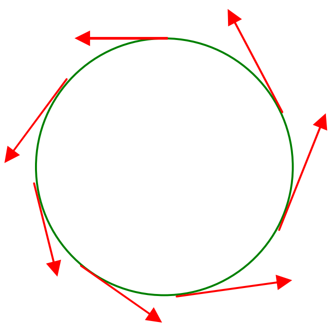
شکل ۲-۱۹

و چون داریم

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=r^{2}\omega(-\cos\omega t\,\sin\omega t+\sin\omega t\,\cos\omega t)=0 \qquad (۲-۴۸)$$

پس می‌بینیم که $\mathbf{v}\equiv d\,\mathbf{r}/dt$ به بردار $\mathbf{r}$ عمود است. نتیجه آنکه اندازه‌ی $\mathbf{r}$ ثابت و بنابراین، تنها راه ممکن برای تغییر $\mathbf{r}$ تغییر جهت آن است. یعنی $\mathbf{r}$ می‌چرخد. چون مسیر دایره است، $\mathbf{r}$ حول مبداء می‌چرخد. در مثال ۲-۶ همچنین نشان دادیم که $\mathbf{a}=-\omega^{2}\mathbf{r}$ است. چون $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ است ، نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=-\omega^{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ و بنابراین، $\mathbf{a}\equiv d\mathbf{v}/dt$ بر $\mathbf{v}$ عمود است.

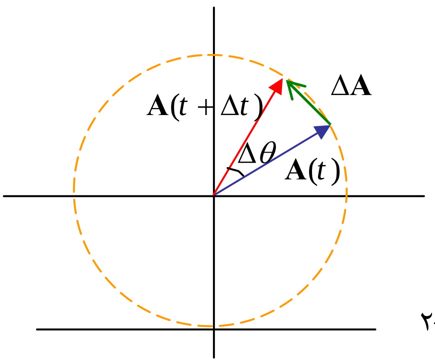
این بدان معنی است که اندازه‌ی بردار سرعت ثابت است و تنها جهت آن تغییر می‌کند. پس، اگر بردار $\mathbf{v}$ بخواهد تغییر کند باید بچرخد. این را می‌توان در شکل (۲-۲۰) به روشنی دید. به طور کلی، اگر اندازه‌ی بردار $\mathbf{A}(t)$ ثابت باشد تنها راهی که $\mathbf{A}(t)$ می‌تواند تغییر کند، چرخش آن است. اینک می‌خواهیم رابطه‌ی سودمندی برای مشتق زمانی، $d\mathbf{A}/dt$ ، یک چنین بردار چرخان بیابیم. مشتق $d\mathbf{A}/dt$ همواره بر بردار $\mathbf{A}$ عمود است (شکل ۲-۲۱).


شکل ۲-۲۰

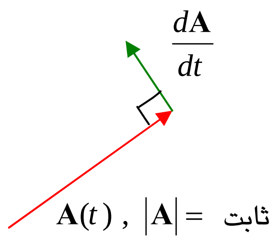
اندازه $d\mathbf{A}/dt$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد: تغییر $\mathbf{A}$ بین زمان t و $t+\Delta t$ عبارت است از $\Delta\mathbf{A}=\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)$. با استفاده از زاویه‌ی $\Delta\theta$ در شکل (۲-۲۲) داریم: $|\Delta\mathbf{A}|=2A\sin(\Delta\theta/2)$ و در نتیجه، برای $\Delta\theta\ll$ آنگاه $\sin(\Delta\theta/2)\approx\Delta\theta/2$. در نتیجه، $|\Delta\mathbf{A}|=2A\,(\Delta\theta/2)=A\,\Delta\theta$ است. در حد $\Delta t\to 0$ خواهیم داشت

$$\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|=A\,\frac{d\theta}{dt} \qquad (۲-۴۹)$$

در این جا $d\theta/dt$ سرعت زاویه‌ای بردار $\mathbf{A}$ است. نمونه‌ی ساده‌ی کاربرد رابطه (۲-۴۷) را در مثال ۲-۶ می‌توان دید.



شکل ۲-۲۲



شکل ۲-۲۱

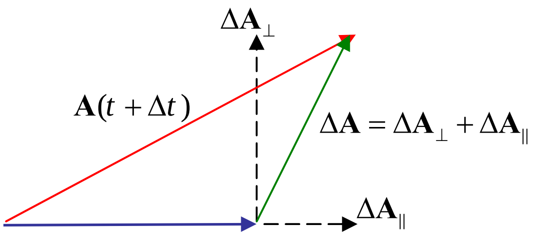
اگر $\mathbf{A}$ بردار چرخان r در مثال ۲-۶ باشد واگر $\theta=\omega t$ آنگاه:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=r\frac{d}{dt}(\omega t)=r\omega \quad \text{یا} \quad v=r\omega \qquad (۲-۵۰)$$

در حالت کلی، تغییر بردار $\mathbf{A}$ نتیجه‌ی چرخش بردار $\mathbf{A}$ (تغییر جهت) و تغییر اندازه‌ی آن است. تغییر اندازه یعنی کم و زیاد شدن طول $\mathbf{A}$ در امتداد خود. همان‌گونه که دیدیم تغییر $\mathbf{A}$ در اثر تغییر جهت آن بر $\mathbf{A}$ عمود است. بنابراین، تغییر $\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت جمع این دو تغییر نوشت. با توجه به (شکل ۲-۲۳) برای Δt کوچک داریم $|\Delta\mathbf{A}_{\parallel}|=\Delta A$ و $|\Delta\mathbf{A}_{\perp}|=A\,\Delta\theta$ که اگر آنها را به Δt تقسیم کنیم ، خواهیم داشت

$$\left|\frac{d\mathbf{A}_{\perp}}{dt}\right| = A\frac{d\theta}{dt} \qquad , \qquad \left|\frac{d\mathbf{A}_{\parallel}}{dt}\right| = \frac{dA}{dt} \qquad (۲-۵۱)$$

اگر $\mathbf{A}$ نچرخد $(d\theta/dt = 0)$ است و $d\mathbf{A}_{\perp}/dt = 0$ می‌شود و اگر اندازه‌ی $\mathbf{A}$ ثابت باشد $d\mathbf{A}_{\parallel}/dt = 0$ است.



شکل ۲-۲۳

این بخش را با چند رابطه‌ی مشتق‌گیری از بردارها به پایان می‌بریم. اثبات آنها به عهده خواننده واگذار شده است. اگر b تابعی اسکالر وابسته به زمان باشد و بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تابعی از زمان باشند آنگاه:

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = \frac{dc}{dt}\mathbf{A} + c\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad (۲-۵۲)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

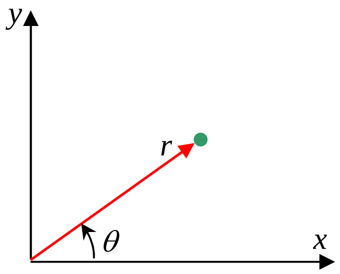
در رابطه‌ی دوم اگر $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ باشد آنگاه:

$$\frac{d}{dt}(A^{۲}) = ۲\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} \qquad (۲-۵۳)$$

و باز می‌بینیم که اگر $d\mathbf{A}/dt$ بر $\mathbf{A}$ عمود باشد، اندازه‌ی $\mathbf{A}$ ثابت است.

۲-۱۰ حرکت در مختصات قطبی

مختصات کارتزی برای توصیف حرکت راست‌خط بسیار مناسب است اما این سامانه‌ی مختصات برای توصیف حرکت دایره‌ای خیلی مناسب نیست. چون حرکت دایره‌ای نقش چشمگیری در فیزیک دارد به جاست که چارچوب مختصاتی را بشناسیم که برای توصیف حرکت دایره‌ای طبیعی‌تر است. اگر چه ما در گزینش نوع مختصات آزادیم، اما گزینه‌ی به جا و مناسب دستگاه مختصات، حل مسئله را بسیار آسان‌تر می‌کند.

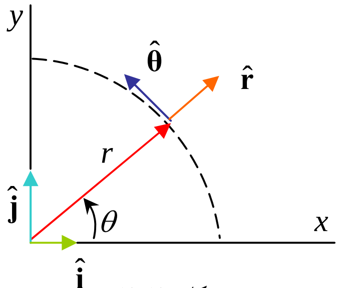


شکل ۲-۲۴

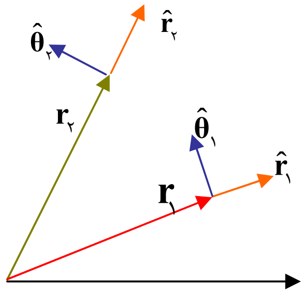
ذره‌ای را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند: مکان ذره را می‌توان با مختصات x و y آن مشخص کرد که نمایش مکان ذره در مختصات کارتزی است. می‌توان در هر لحظه مکان ذره را با فاصله‌ی r ذره از مبداء مختصات و زاویه‌ی θ که r با محور xها می‌سازد بیان کرد؛ این مختصات قطبی است. به جای متغیرهای (x, y) اینک دو متغیر (r, θ) داریم. از شکل (۲-۲۴) پیداست که (x, y) و (r, θ) به یکدیگر مربوط اند:

$$x = r\cos\theta \;\; , \;\; y = r\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \;\; , \;\; \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} \qquad (۲-۵۴)$$

همان‌گونه که در بخش ۲-۳ بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ را در راستای افزایش x و y و z شناساندیم در اینجا هم دو بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را در جهت افزایش r و θ معرفی می‌کنیم (شکل ۲-۲۵). تفاوت مهم بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ با $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ در این است که جهت $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ با مکان تغییر می‌کند؛ حال آنکه جهتهای $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ ثابت اند. در شکل (۲-۲۶) این بردارهای یکه در دو مکان متفاوت نشان داده شده‌اند. چون $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ با مکان تغییر می‌کنند، رابطه‌های سینماتیک ممکن است در مختصات قطبی پیچیده‌تر از



شکل ۲-۲۵



(شکل۲-۲۶)

مختصات کارتزی به نظر برسند. بردارهای یکه‌ی $(\hat{\mathbf i},\hat{\mathbf j})$ و $(\hat{\mathbf r},\hat{\boldsymbol\theta})$ را می‌توان برحسب یکدیگر نوشت: در نقطه‌ای در صفحه‌ی xy داریم

$$\hat{\mathbf r}=\hat{\mathbf i}\cos\theta+\hat{\mathbf j}\sin\theta \qquad , \qquad \hat{\boldsymbol\theta}=-\hat{\mathbf i}\sin\theta+\hat{\mathbf j}\cos\theta \qquad (۲-۵۵)$$

$\hat{\mathbf r}$ و $\hat{\boldsymbol\theta}$ بر یکدیگر عمودند. این را می‌توان با حساب کردن $\hat{\mathbf r}\cdot\hat{\boldsymbol\theta}$ نشان داد. امتحان کنید!
بردار $\mathbf r$ در مختصات کارتزی در دو بعد عبارت است از $\mathbf r=x\,\hat{\mathbf i}+y\,\hat{\mathbf j}$. همین بردار در مختصات قطبی به صورت $\mathbf r=r\hat{\mathbf r}$ نوشته می‌شود. این دو بیان هم‌ارزند؛ چون اگر به جای $\hat{\mathbf r}$ مقدار آن را از رابطه‌ی (۲-۵۵) جایگزین کنیم خواهیم داشت: $\mathbf r=r(\hat{\mathbf i}\cos\theta+\hat{\mathbf j}\sin\theta)$ اما $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ اند. پس، از $\mathbf r=r\hat{\mathbf r}$ به آسانی به $\mathbf r=x\hat{\mathbf i}+y\hat{\mathbf j}$ می‌رسیم.
نکته : نگارش $\mathbf r=r\hat{\mathbf r}$ گاهی گمراه کننده به نظر می‌رسد و به ظاهر هیچ اشاره‌ای به θ ندارد. می‌دانیم که برای معین کردن مکان نقطه‌ای در صفحه به دو پارامتر نیاز داریم (در مختصات کارتزی: x و y). اما به نظر می‌رسد که در رابطه‌ی $\mathbf r=r\hat{\mathbf r}$ تنها یک کمیت، r، وجود دارد. دلیل این ناسازگاری ظاهری این است که $\hat{\mathbf r}$ بردار ثابت نیست. اگر چه θ در رابطه‌ی $\mathbf r=r\hat{\mathbf r}$ نمایان نمی‌شود، اما برای اینکه بگوئیم جهت $\hat{\mathbf r}$ چیست به دانستن θ نیاز داریم و برای اینکه $\hat{\mathbf r}$ را بدانیم باید θ را بدانیم. شاید بهتر است که بنویسیم $\mathbf r=r\hat{\mathbf r}(\theta)$ تا تأکید کنیم که $\hat{\mathbf r}$ به θ بستگی دارد.

از متعامد بودن $\hat{\mathbf r}$ و $\hat{\boldsymbol\theta}$ و این که بردارهای یکه‌اند: $|\hat{\mathbf r}|=|\hat{\boldsymbol\theta}|=۱$ می‌توان ضرب داخلی بردارها را مانند پیش انجام داد. اگر $\mathbf A=A_r\,\hat{\mathbf r}+A_\theta\hat{\boldsymbol\theta}$ و $\mathbf B=B_r\,\hat{\mathbf r}+B_\theta\hat{\boldsymbol\theta}$ آنگاه $\mathbf A\cdot\mathbf B=A_rB_r+A_\theta B_\theta$. البته $\hat{\mathbf r}$ها و $\hat{\boldsymbol\theta}$ها باید برای هر دو بردار در یک نقطه باشند.

۲-۱۱ سرعت در مختصات قطبی

در مختصات کارتزی برای سرعت داریم

$$\mathbf V=\frac{d\mathbf r}{dt}=\frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf i}+y\hat{\mathbf j})=\dot x\hat{\mathbf i}+\dot y\hat{\mathbf j} \qquad (۲-۵۶)$$

این بردار، $\mathbf V$، در مختصات قطبی عبارت است از:

$$\mathbf V=\frac{d}{dt}(r\,\hat{\mathbf r})=\dot r\,\hat{\mathbf r}+r\,\frac{d\,\hat{\mathbf r}}{dt} \qquad (۲-۵۷)$$

جمله‌ی نخست سمت راست مؤلفه‌ی سرعت در راستای شعاع است. بنابراین، انتظار داریم جمله‌ی دوم مؤلفه‌ی مماسی (در راستای $\hat{\boldsymbol\theta}$) سرعت باشد. این درست است اما برای اثبات آن باید $d\hat{\mathbf r}/dt$ را حساب کنیم. این کار ظریفی است و ما آن را به سه روش حساب خواهیم کرد.
روش ۱: چون $\hat{\mathbf r}$ بردار یکه است، اندازه‌ی آن مقدار ثابتی است و $d\hat{\mathbf r}/dt$ به $\hat{\mathbf r}$ عمود است. با افزایش θ، بردار $\hat{\mathbf r}$ می‌چرخد. در شکل (۲-۲۷) داریم

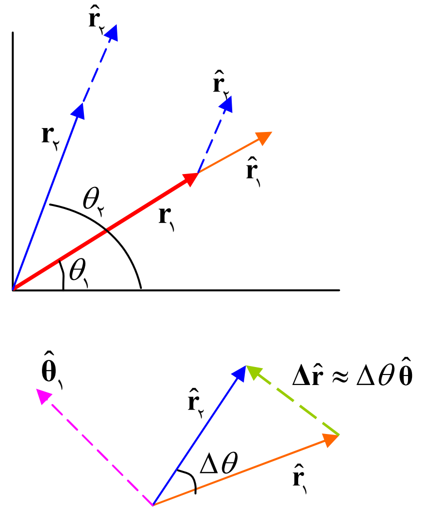
$$|\Delta\hat{\mathbf r}|\approx|\hat{\mathbf r}|\Delta\theta=\Delta\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{|\Delta\hat{\mathbf r}|}{\Delta t}\approx\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۲-۵۸)$$

و اگر حد $\Delta t\to ۰$ آن را حساب کنیم به دست می‌آید

$$\left|\frac{d\hat{\mathbf r}}{dt}\right|=\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta \qquad (۲-۵۹)$$

همان‌گونه که از شکل (۲-۵۷) پیداست با افزایش θ، بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf r}$ در جهت $\hat{\boldsymbol\theta}$ می‌چرخد. بنابراین،

$$\frac{d\,\hat{\mathbf r}}{dt}=\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۶۰)$$



(شکل۲-۲۷)

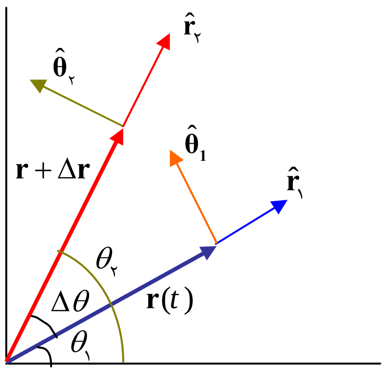
شیوه ۲: داریم $\hat{\mathbf r}=\hat{\mathbf i}\cos\theta+\hat{\mathbf j}\sin\theta$. توجه کنید که $\hat{\mathbf i}$ و $\hat{\mathbf j}$ بردارهای یکه‌ی ثابت‌اند و با زمان تغییر نمی‌کنند. با مشتق‌گرفتن از دو طرف داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf r}}{dt}&=\hat{\mathbf i}\frac{d}{dt}(\cos\theta)+\hat{\mathbf j}\frac{d}{dt}(\sin\theta)\\ &=-\hat{\mathbf i}\sin\theta\,\dot\theta+\hat{\mathbf j}\cos\theta\,\dot\theta=(-\hat{\mathbf i}\sin\theta+\hat{\mathbf j}\cos\theta)\,\dot\theta\end{aligned} \qquad (۲-۶۱)$$

اما از رابطه (۲-۵۵) داریم $-\hat{\mathbf i}\sin\theta+\hat{\mathbf j}\cos\theta=\hat{\boldsymbol\theta}$ پس:

$$\frac{d\hat{\mathbf r}}{dt}=\dot\theta\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۶۲)$$

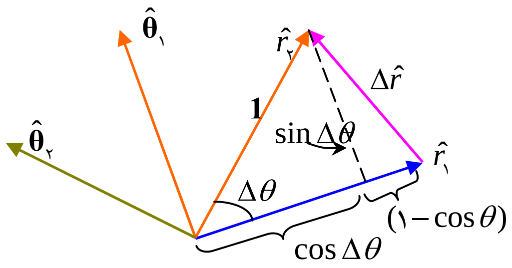
که همان رابطه‌ی (۲-۶۰) است.



شکل ۲-۲۸

روش ۳: در شکل (۲-۲۸) بردار $\mathbf r$ در دو زمان t و $t+\Delta t$ نشان داده شده است. در زمان t مختصات $(r\,,\theta)$ است و در زمان $t+\Delta t$ عبارتند از $(r+\Delta r\,,\theta+\Delta\theta)$. توجه کنید که زاویه‌ی بین $\hat{\mathbf r}_1$ و $\hat{\mathbf r}_2$ با زاویه‌ی بین $\hat{\boldsymbol\theta}_1$ و $\hat{\boldsymbol\theta}_2$ برابرند. در شکل (۲-۲۹) این بردارها را اندکی بزرگتر کشیده‌ایم و تغییر در $\hat{\mathbf r}$ را برای بازه‌ی زمانی Δt نشان داده‌ایم. دیده می‌شود که $\Delta\hat{\mathbf r}=\hat{\boldsymbol\theta}_1\sin\Delta\theta-\hat{\mathbf r}_1(1-\cos\Delta\theta)$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\hat{\mathbf r}}{\Delta t}&=\hat{\boldsymbol\theta}_۱\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta t}-\hat{\mathbf r}_۱\frac{(۱-\cos\Delta\theta)}{\Delta t}\\ &=\hat{\boldsymbol\theta}_۱\left(\frac{\Delta\theta+\frac{۱}{۶}(\Delta\theta)^۳+\cdots}{\Delta t}\right)-\hat{\mathbf r}_۱\left(\frac{\frac{۱}{۲}(\Delta\theta)^۲-\frac{۱}{۲۴}(\Delta\theta)^۴+\cdots}{\Delta t}\right)\end{aligned} \qquad (۲-۶۳)$$



شکل ۲-۲۹

در اینجا ما از بسط سری سینوس و کسینوس استفاده کرده‌ایم. حال باید $d\,\hat{\mathbf r}/dt=\lim\limits_{\Delta t\to ۰}\left(\Delta\hat{\mathbf r}/\Delta t\right)$ را حساب کنیم. در این حد $\Delta\theta$ نیز به صفر میل می‌کند: $\Delta\theta/\Delta t\to d\theta/dt$. بنابراین، برای $n>0$ داریم $\lim\limits_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}(\Delta\theta)^n=۰$ و جمله‌ی ضریب $\hat{\mathbf r}_۱$ صفر می‌شود. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$\frac{d\hat{\mathbf r}}{dt}=\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۶۴)$$

که همان رابطه‌ی (۲-۶۰) یا (۲-۶۲) است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲-۶۵)$$

بکوشید با استفاده از شیوه‌های بالا برای $d\,\hat{\mathbf{r}}/dt$ ، رابطه‌ی (۲-۶۵) را اثبات کنید. پس داریم

$$\boxed{\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ , \qquad \frac{d\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}} \qquad (۲-۶۶)$$

حالا می‌توانیم به مسئله‌ی خودمان در رابطه‌ی (۲-۵۹) برگردیم و با توجه به نتایج بالا آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt} r\,\hat{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۷)$$

همان‌گونه که انتظار داشتیم ، جمله‌ی دوم در راستای مماسی (یعنی $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) است.

مثال ۱۰-۲ ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای آن با $\dot{\theta} = \alpha t$ داده شده است (α برحسب رادیان بر ثانیه بتوان دو است.) سرعت ذره را در مختصات قطبی توصیف کنید.

حل: چون $r = b =$ ثابت ، پس $\mathbf{V}$ مماسی و برابر با $\mathbf{V} = b\,\alpha t\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. مکان ذره عبارت است از:

$$r = b\ , \qquad \theta = \theta_{\circ} + \int_{\circ}^{t} \dot{\theta} dt = \theta_{\circ} + \int_{\circ}^{t} \alpha t dt = \theta_{\circ} + \frac{۱}{۲}\alpha t^{۲} \qquad (۲-۶۸)$$

اگر در زمان $t = ۰$ ذره روی محور x باشد آنگاه $\theta_{\circ} = ۰$ و بردار مکان ذره $\mathbf{r} = b\hat{r}$ است. برای مشخص کردن جهت $\hat{\mathbf{r}}$ باید θ را بدانیم.

مثال ۱۱-۲ ذره‌ای با سرعت ثابت $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}}$ برابر شکل (۲-۳۰) روی خط $y = ۲$ حرکت می‌کند. سرعت ذره را در مختصات قطبی بنویسید.

حل:

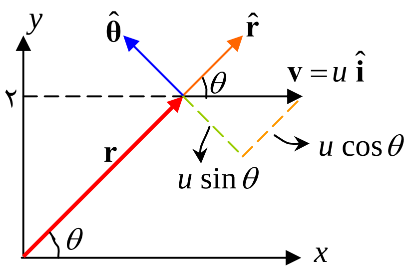
$$\mathbf{V} = V_r\hat{\mathbf{r}} + V_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۹)$$

از شکل دیده می‌شود که:

$$V_r\hat{\mathbf{r}} = u\cos\theta, \qquad V_\theta = -u\sin\theta \qquad (۲-۷۰)$$

پس:

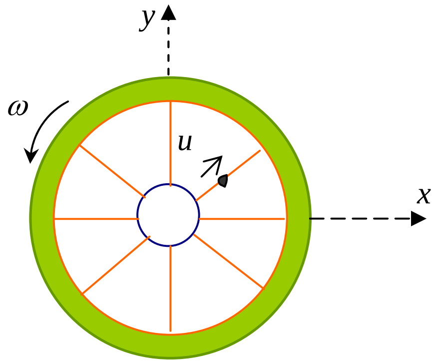
$$\mathbf{V} = u\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - u\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۷۱)$$



شکل ۲-۳۰

مثال ۱۲-۲ چرخی در صفحه‌ی عمودی با سرعت زاویه‌ای یکنواخت $\dot{\theta} = \omega$ رادیان بر ثانیه حول محور خود می‌چرخد. همانند شکل (۲-۳۱) دانه‌ی تسبیحی روی یکی از میله‌های آن با سرعت ثابت u متر بر ثانیه می‌لغزد. در زمان $t = ۰$ میله در امتداد محور x هاست و دانه تسبیح در مبداء مختصات قرار دارد. سرعت دانه تسبیح را در زمان t حساب کنید:

(الف) : در مختصات قطبی



شکل ۲-۳۱

(ب): در مختصات کارتزی

حل: **(الف)** داریم: $\dot\theta=\omega$, $\dot r=u$, $\mathbf{r}=ut$ و بنابراین

$$\mathbf{V}=\dot r\,\hat{\mathbf r}+r\,\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}=u\hat r+ut\,\omega\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۲)$$

برای اینکه مؤلفه‌های سرعت را بشناسیم، باید جهت‌های $\hat{\mathbf r}$ و $\hat{\boldsymbol\theta}$ را بدانیم. این از $\mathbf{r}=(r\,,\theta)=(u\,t\,,\omega t)$ به دست می‌آید.

(ب) دانه‌ی تسبیح دونوع سرعت دارد: سرعت مربوط به لغزش آن روی میله، $\mathbf{v}_r$، و سرعت $r\omega$ حاصل از چرخیدن چرخ. بنابراین،

$$v_x=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta \quad , \quad v_y=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta \qquad (۲-۷۳)$$

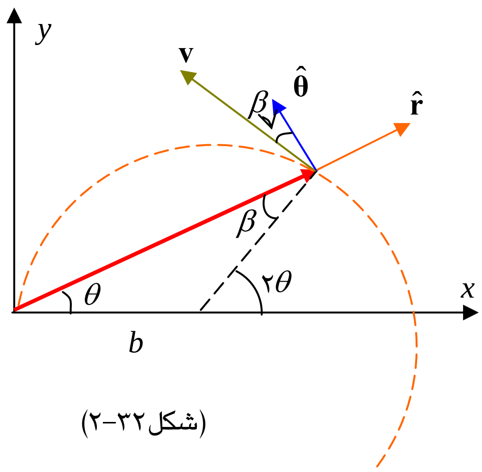
چون $\theta=\omega t$, $v_\theta=r\omega=ut\,\omega$, $v_r=u$ اند، پس

$$\mathbf{v}=(u\cos\omega t-ut\,\omega\sin\omega t)\,\hat{\mathbf i}+(u\sin\omega t+ut\,\omega\cos\omega t)\,\hat{\mathbf j} \qquad (۲-۷٤)$$

می‌بینید که در مختصات قطبی چقدر نتیجه ساده‌تر است.

مثال ۲-۱۳ ذره‌ای برابر شکل (۲-۳۲) با سرعت ثابت v روی دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند. مبداء مختصات را در یک نقطه روی دایره انتخاب کنید و سرعت ذره را در مختصات قطبی بیابید.

حل: با این گزینه‌ی مبداء مختصات، دیگر اندازه‌ی $\mathbf{r}$ ثابت نیست و $\mathbf{V}$ هم مماس خالص (در راستای $\hat{\boldsymbol\theta}$) نیست. پس، داریم



(شکل۲-۳۲)

$$\mathbf{v}=-v\,\sin\beta\,\hat{\mathbf r}+v\,\cos\beta\,\hat{\boldsymbol\theta}$$
$$=-v\,\sin\theta\,\hat{\mathbf r}+v\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۵)$$

اینک باید θ را بر حسب زمان بنویسیم. از هندسه مسئله روشن است که $\theta=\beta$ و $2\theta=\omega t$. در نتیجه $\theta=\omega t/2$ و $\omega=v/b$. پس:

$$\mathbf{v}=-\mathbf{v}\sin\frac{v}{2b}t\,\hat{\mathbf r}+v\,\cos\frac{v}{2b}t\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷٦)$$

۲-۱۲ شتاب در مختصات قطبی

این بخش را با محاسبه‌ی شتاب در مختصات قطبی به پایان می‌بریم. برای یافتن شتاب از سرعت $\mathbf{v}$، نسبت به زمان مشتق بگیرید.

$$\mathbf{a}=\frac{d}{dt}\mathbf{v}=\frac{d}{dt}(\dot r\,\hat{\mathbf r}+r\dot\theta\hat{\boldsymbol\theta})=\ddot r\,\hat{\mathbf r}+\dot r\frac{d}{dt}\hat{\mathbf r}+\dot r\dot\theta\hat{\boldsymbol\theta}+r\ddot\theta\hat{\boldsymbol\theta}+r\dot\theta\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۷)$$

اگر به جای $d\,\hat{\mathbf r}/dt$ و $d\,\hat{\boldsymbol\theta}/dt$ $\frac{d\,\hat{\boldsymbol\theta}}{dt}$ از رابطه‌های (۲-٦٦) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}=\ddot r\,\hat{\mathbf r}+\dot r\dot\theta\hat{\boldsymbol\theta}+\dot r\dot\theta\hat{\boldsymbol\theta}+r\ddot\theta\hat{\boldsymbol\theta}-r\dot\theta^{2}\,\hat{\mathbf r}=(\ddot r-r\dot\theta^{2})\hat{\mathbf r}+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۸)$$

جمله‌ی $\ddot r\,\hat{\mathbf r}$ شتاب خطی در راستای شعاعی است که نتیجه‌ی تغییر سرعت شعاعی است. همچنین $r\ddot\theta\hat{\boldsymbol\theta}$ شتاب خطی در راستای مماسی است که نتیجه‌ی تغییر **اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای** است. جمله‌ی $-r\dot\theta^{2}\,\hat{\mathbf r}$ شتاب مرکزگراست که در مثال ۲-٦ به صورت $-r\omega^{2}$ با آن روبرو شدیم. سرانجام، $2\dot r\dot\theta\hat{\boldsymbol\theta}$ شتاب **کوریولیس** است و به نیروی کوریولیس مربوط است. این نیرو یک نیروی

پنداری (مجازی) است که در چارچوب‌های چرخان نمایان می‌شود و ما در فصل ۱۲به آن خواهیم پرداخت. در اینجا، اما شتاب کوریولیس، شتاب واقعی است و هر گاه r و θ هر دو تغییر کنند نمایان می‌شود.

مثال ۱۴-۲ شتاب دانه تسبیح در مثال ۱۲-۲ را در مختصات قطبی به دست آورید. فرض کنید دانه‌ی تسبیح در زمان $t=0$ از مرکز چرخ آغاز و به سوی بیرون حرکت می‌کند. موقعیت زاویه‌ای با $\theta=\omega t$ داده شده است.

حل: از رابطه‌ی (۶۷-۲) می‌دانیم $\mathbf{v}=\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}}+r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است.آگاهی‌های داده شده در مسئله عبارتند از: $\dot{r}=u$ و $\dot{\theta}=\omega$. موقعیت شعاعی دانه تسبیح $r=ut$ است و داریم: $\mathbf{v}=u\,\hat{\mathbf{r}}+ut\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. بنابراین، شتاب برابر است با:

$$\mathbf{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}=-ut\,\omega^2\hat{\mathbf{r}}+2u\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۷۹)$$

مثال ۱۵-۲ ذره‌ای روی مسیر مارپیچ به سوی بیرون در حرکت است. معادله مسیر به صورت $r=A\theta$ است که در آن A مقداری ثابت و برابر $A=(1/\pi)\,\mathrm{m/rad}$. است. θ با زمان بر اساس $\theta=\alpha t^2/2$ افزایش می یابد. α مقدار ثابتی است.

(الف): مسیر حرکت را رسم کنید و مقدارهای تقریبی سرعت و شتاب را در چند نقطه نشان دهید.

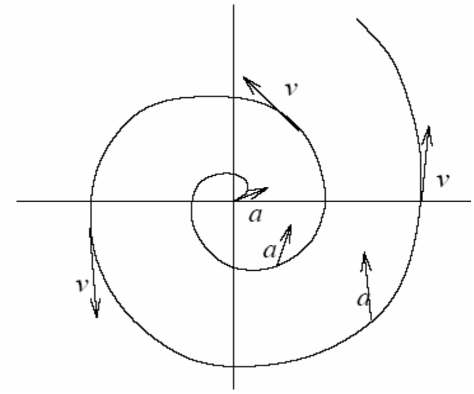
(ب): نشان دهید که به ازای $\theta=1/\sqrt{2}\ \mathrm{rad}$ شتاب شعاعی صفر است.

(پ): در چه زاویه‌ای اندازه‌های شتاب‌های شعاعی و مماسی با هم برابرند؟

حل: **(الف)**: مسیر ذره عبارت است از $r=\theta/\pi=\alpha t^2/2\pi$. پس، $\dot{r}=\alpha t/\pi$ و $\dot{\theta}=\alpha t$. پس داریم $\ddot{r}=\alpha/\pi$ و $\ddot{\theta}=\alpha$. در نتیجه:

$$\mathbf{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\alpha^3t^4}{2\pi}\right)\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{5}{2}\frac{\alpha^2t^2}{\pi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۸۰)$$

که در شکل (۳۳-۲) نشان داده شده اند .



شکل ۳۳-۲

(ب): شتاب شعاعی عبارت است از $a_r=\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\alpha^3t^4}{2\pi}$ که در زمان $t^4=2/\alpha^2$ یا $t^2=\sqrt{2}/\alpha$ صفر می شود؛ چون $\theta=\alpha t^2/2$ است. پس به ازای $\theta=1/\sqrt{2}\,\mathrm{rad}$ شتاب شعاعی a_r صفر می شود.

(پ): به ازای $|5\theta|=|1-2\theta^2|$ داریم $a_r=a_\theta$ و یا

$$1-2\theta^2\mp5\theta=0\quad\Rightarrow\quad\theta_{1,2}=\frac{\mp5+\sqrt{33}}{4} \qquad (۲-۸۱)$$

پس دو پاسخ داریم $\theta_1=0{,}19=11^\circ$ و $\theta_2=2{,}69=154^\circ$.

۱۳-۲ شیوه‌های تقریب ریاضی

در حل برخی از مسئله‌های فیزیک، هرازگاهی، رابطه‌های ریاضی شکل‌های ناهنجاری پیدا می‌کنند و به نظر می‌رسد که خود فیزیک در لابلای آنها گم شده است. در چنین وضعیت‌هایی بهتر است از تقریب‌های ساده‌ی ریاضی استفاده کرد و برای رابطه‌های ریاضی مسئله‌ی فیزیکی پاسخ های تقریبی، اما قابل دسترس یافت. این کار در اطمینان یافتن به درستی حل مسئله یاری می‌کند. یک نمونه از این دست را هنگامی که می‌خواستیم سرعت را در مختصات قطبی (شیوه ۳) حساب کنیم، دیدیم. در آنجا به جای سینوس و کسینوس از مقدارهای تقریبی استفاده کردیم. این شیوه‌ها بر پایه بسط توابع استوار است. در این بخش به برخی شیوه‌های بسط سری توابع خواهیم پرداخت. با سود بردن از تقریب‌های سری؛ رابطه‌های پیچیده‌تر را می‌توان ساده‌تر کرد و رفتار بنیادی فیزیکی را به دست آورد.

۱- **بسط دو جمله‌ای ها** برای $-1< x <1$ داریم:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!}x^k+\cdots \qquad (2-82)$$

این بسط سری در بازه‌ی $-1< x <1$ برای هر مقدار n صادق است. اگر n عدد صحیح باشد، تعداد جمله‌ها محدود و آخرین جمله‌ی آن x^n می‌شود. این سری دقیق است. تقریب هنگامی وارد می‌شود که ما در جایی آن را قطع کنیم. فرض کنید $n=1/2$ باشد آنگاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots \qquad ; \qquad -1<x<1 \qquad (2-83)$$

چون $|x|$کوچکتر از یک است، هر چه توان x بیشتر باشد آن جمله نسبت به جمله‌ی پیشین کوچکترمی‌شود و بسته به اینکه تا چه دقتی $\sqrt{1+x}$ را می‌خواهیم حساب کنیم، در جایی از بقیه‌ی جمله‌ها می‌توان چشم پوشی کرد. اگر به دقت تا مرتبه‌ی x^2 نیاز داشته باشیم آنگاه $(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ کافی خواهد بود. خطای این تقریب از مرتبه‌ی x^3 است. یعنی اگر $x=0{,}2$ باشد آنگاه $(1+0{,}2)^{1/2}=1+\frac{1}{2}(0{,}2)-\frac{1}{8}(0{,}2)^2=1{,}095$ حال آنکه مقدار دقیق $1{,}0954451$ است. پاسخ تقریبی ما تا مرتبه‌ی هزارم درست است و خطای پاسخ از مرتبه‌ی ده هزارم است. نخستین جمله‌ی بزرگ نادیده انگاشته شده در این مثال $\frac{1}{16}x^3=\frac{1}{16}(0{,}2)^3=0{,}0005$است که از مرتبه‌ی ده هزارم است.

اگر $|x|>1$ باشد هنوز می‌توان از سری (۲-۸۳) استفاده کرد. کافی است آن را بازنویسی کنیم:

$$(1+x)^n=\left[x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]^n = x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \qquad (2-84)$$

حال در عبارت $(1+x)^n$، می‌دانیم که $-1<\frac{1}{x}<1$ است و شرایط بسط سری (۲-۸۳) را دارد. پس اگر در رابطه‌ی (۲-۸۳)، x را با $1/x$جایگزین کنیم، آنگاه خواهیم داشت

$$(1+x)^n = x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = x^n\left[1+n\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\cdots\right] \qquad (2-85)$$

مثال ۲-۱۶ به بسط سری عبارت‌های زیر توجه کنید.

حل:

$$(1):\quad \frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^{2}-x^{3}+\cdots \qquad ; \qquad -1\langle x \langle 1$$ (۲-۸۶)

$$(2):\quad \frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots \qquad ; \qquad -1\langle x \langle 1$$ (۲-۸۷)

$$(3):\quad (1{,}001)^{\frac{1}{3}}=(1+0{,}001)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(0{,}001)+\frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)}{2!}(0{,}001)^{2}+\cdots=1+0{,}00033-0{,}0000001+\cdots$$ (۲-۸۸)

$$(4):\quad (1001)^{\frac{1}{3}}=(1000+1)^{\frac{1}{3}}\simeq(1000)^{\frac{1}{3}}(1+0.001)^{\frac{1}{3}}$$
$$=10\left[1+0{,}001(\frac{1}{3})+\cdots\right]\simeq10(1{,}0003)=10{,}003$$ (۲-۸۹)

$$(5):\quad 2-\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}=$$

$$2-(1+x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{-\frac{1}{2}}=2-(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^{2}+\cdots-(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^{2}+\cdots)=-\frac{3}{4}x^{2}+Q(x^{3})$$ ۲-۹۰)

۲- **بسط تیلور** همانند بسط دو جمله‌ای، هر تابعی مانند $f(x)$ را می‌توان به صورت یک سری نمایی از x نوشت:

$$f(x)=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x+a_{3}x^{3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}$$ (۲-۹۱)

به ازای $x=0$ باید داشته باشیم $f(0)=a_{0}$. فرض کنید تابع $f(x)$ مشتق پذیر است آنگاه :

$$\frac{df}{dx}=f'(x)=a_{1}+2a_{2}x+3a_{3}x^{2}+\cdots$$ (۲-۹۲)

اگر این مشتق را در $x=0$ حساب کنیم خواهیم داشت:

$$f'(x)|_{x=0}=a_{1}$$ (۲-۹۳)

و چنانچه این کار را ادامه دهیم:

$$f''=\frac{d^{2}f}{dx^{2}}=2a_{2}+6a_{3}x+\cdots$$ (۲-۹٤)

که به ازای $x=0$ برابر است با

$$f''(x)|_{x=0}=2a_{2}\quad\Rightarrow\quad a_{2}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2\times1}f''(0)=\frac{1}{2!}f''(0)$$ (۲-۹٥)

می‌بینیم که ضرایب ناشناخته a_k در رابطه‌ی (۲-۹۱) به گونه‌ای به مشتق‌های تابع $f(x)$ در $x=0$ مربوط اند: a_0 به مشتق مرتبه‌ی صفرم (یعنی خود تابع در $x=0$)، a_1 به مشتق اول، a_2 به مشتق دوم و ... پس

$$a_{k}=\frac{1}{k!}\overset{(k)}{f}(x)|_{x=0}$$ (۲-۹٦)

که در آن $\overset{(k)}{f}(x)$ مشتق kام تابع است. بسط (۲-۸۳) بسط تیلور نام دارد و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^{2}+\frac{1}{3!}f'''(0)x^{3}+\cdots$$ (۲-۹۷)

اگر این سری همگرا باشد، آنگاه برای xهای کوچک (xهای نزدیک صفر) تقریب خوبی برای تابع $f(x)$ به دست می‌دهد. تعمیم آن به قرار زیر است:

$$f(x+a)=f(a)+f'(a)x+\frac{۱}{۲!}f''(a)x^{۲}+\frac{۱}{۳!}f'''(x)x^{۳}+\cdots \qquad (۲-۹۸)$$

که رفتار تابع را در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ به دست می‌دهد. این بسط هنگامی درست است که سری همگرا باشد. شکل دیگر آن عبارتست از:

$$f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+f''(a)\frac{(t-a)^{۲}}{۲!}+\cdots \qquad (۲-۹۹)$$

(الف) بسط توابع مثلثاتی. تابع $f(x)=\sin x$ را در نظر بگیرید. بسط آن در $x=۰$ عبارت است از:

$$f(۰)=\sin(۰)=۰ \quad , \ f'(۰)=\cos(۰)=۱ \ , \ f''(۰)=-\sin(۰)=۰ \qquad (۲-۱۰۰)$$

$$f'''(۰)=-\cos(۰)=-۱ \quad , \ f^{(v)}(۰)=\sin(۰)=۰ \quad ,\cdots$$

پس:

$$\sin x=۰+۱x-\frac{۱}{۲!}(۰)x^{۲}+\frac{۱}{۳!}(-۱)x^{۳}+\frac{۱}{۴!}(۰)x^{۴}+\cdots=x-\frac{۱}{۳!}x^{۳}+\frac{۱}{۵!}x^{۵}-\frac{۱}{۷!}x^{۷}+\cdots \qquad (۲-۱۰۱)$$

همچنین برای $f(x)\cos x$ داریم:

$$\cos x=۱-\frac{۱}{۲!}x^{۲}+\frac{۱}{۴!}x^{۴}-\frac{۱}{۶!}x^{۶}+\cdots \qquad (۲-۱۰۲)$$

بسط این دو تابع برای هر مقدار x همگراست اما برای مقادیر کوچک x به ویژه سودمندند. تا مرتبه‌ی توان دوم x، $O(x^{۲})$ ، داریم: $\cos x=۱-\left(x^{۲}/۲\right) \ , \ \sin x=x$

(ب) بسط دو جمله‌ای : رابطه (۸۲-۲) را می‌توان از بسط تیلور به دست آورد. برای $f(x)=(1+x)^{n}$ داریم:

$$f(۰)=۱\ , \ f'(x)=n(۱+x)^{n-۱}|_{x=۰}=n \ , \ f''(x)=n(n-۱)(۱+x)^{n-۲}|_{x=۰}=n(n-۱)$$

$$f^{(k)}(x)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k-۱)(۱+x)^{n-k}\ |_{x=۰}=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱) \qquad (۲-۱۰۳)$$

پس:

$$(۱+x)^{n}=۱+nx+\frac{۱}{۲!}n(n-۱)x^{۲}+\cdots+\frac{n(n-۱)....(n-k+۱)}{k!}x^{k}+\cdots \qquad (۲-۱۰۴)$$

(پ) بسط تابع نمایی e^x : اگر $f(x)=e^{x}$ باشد، بنا به تعریف $f'(x)=f(x)$. همچنین $f^{(k)}(x)=f(x)$ و چون $e^{۰}=۱$ است خواهیم داشت:

$$e^{x}=۱+x+\frac{۱}{۲!}x^{۲}+\frac{۱}{۳!}x^{۳}+\cdots \qquad (۲-۱۰۵)$$

این سری برای هر مقدار x همگراست.

(ت) بسط تابع لگاریتمی $\ell n(1+x)$: چون $\ell n\, x$ در $x=۰$ تعریف نشده است نمی‌توان آن را بر حسب توان‌های x بسط داد. بنابراین تابع $f(x)=\ell n(۱+x)$ را در نظر می‌گیریم. مشتق های این تابع به قرار زیر است:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\quad ,\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^{2}}\quad ,\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^{3}}$$
$$\overset{(4)}{f}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^{4}}\quad ,\quad \overset{(5)}{f}(x)=-\frac{4!}{(1+x)^{5}}\quad ,\quad \cdots \tag{۲-۱۰۶}$$

بنابراین برای $k\geq 1$ داریم:

$$\overset{(k)}{f}(x)=(-1)^{k+1}\ \frac{(k-1)!}{(1+x)^{k}}\quad ,\quad \overset{(k)}{f}(0)=(-1)^{k+1}\left(k-1\right)!\quad ,\quad \frac{\overset{(k)}{f}(0)}{k\,!}=\frac{(-1)^{k+1}}{k} \tag{۲-۱۰۷}$$

چون $f\left(0\right)=0$ است، بسط تیلور $ln(1+x)$ در بازه‌ی $-1<x<1$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\ell n(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k} \tag{۲-۱۰۸}$$

یک نتیجه‌ی سودمند بسط تیلور این است که اگر سری همگرا باشد آنگاه جایگزین بسیار خوبی برای خود تابع می‌شود و در نتیجه می‌توان از سری مشتق یا انتگرال بگیریم. برای نمونه:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{d}{dx}(x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}+\cdots)\ =1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}+\cdots=\cos x \tag{۲-۱۰۹}$$

افزون بر این سری تیلور برای ضرب دو تابع، همانا حاصلضرب سری‌های متناظر با آنهاست:

$$\begin{aligned}\sin x\ \cos x &=(x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}+\cdots)(1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}+\cdots)\\ &=x-(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!})x^{3}+(\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!2!}+\frac{1}{5!})x^{5}+\cdots\\ &=x-\frac{4x^{3}}{3!}+\frac{16x^{5}}{5!}+\cdots\\ &=\frac{1}{2}\left[(2x)-\frac{(2x)^{3}}{3!}+\frac{(2x)^{5}}{5!}+\ ....\right]=\frac{1}{2}\left[\sin(2x)\right].\end{aligned} \tag{۲-۱۱۰}$$

و سرانجام اینکه در محاسبه‌ی انتگرال ها، بسط سری تیلور گاهی سودمند می‌شود. مثال زیر این نکته را روشن می‌کند.

مثال ۱۷-۲ پاسخ انتگرال $\int_{1}^{1.1}\frac{e^{z}}{z}dz$ را تخمین بزنید:

حل: فرض کنید $z=1+x$ باشد آنگاه:

$$\int_{1}^{1.1}\frac{e^{z}}{z}dz=\int_{0}^{0.1}\frac{e^{(1+x)}}{1+x}dx=(e)\int_{0}^{0.1}\frac{e^{x}}{1+x}dx\cong(e)\int_{0}^{0.1}\frac{(1+x)}{(1+x)}dx=ex\,\Big|_{0}^{0.1}\cong 0.1e \tag{۲-۱۱۱}$$

این تخمین با تقریب $e^{x}\cong 1+x$ انجام شد یعنی تنها دو جمله‌ی اول بسط e^{x} را در نظر گرفتیم؛ با این حال تخمین ما بهتر از یک در صد است.

مسئله‌ها:

۲–۱ با استفاده از تعریف‌های (۲–۲) و (۲–٦) و نمودارهای مناسب نشان دهید که ضرب برداری و ضرب داخلی بخش پذیرند.

۲–۲ آیا ضرب برداری شرکت پذیر است؟ اگر پاسخ آری است اثبات کنید و اگر نیست، یک مثال نقیض بزنید.

۲–۳ قانون $BAC - CAB$ را اثبات کنید: هر دو طرف این رابطه را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسید.
نشان دهید که $[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]+[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]+[\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]=0$ تحت چه شرایطی $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ ؟

۲–۴ گرادیان توابع زیر را پیدا کنید.

$$(a)\quad f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$$

$$(b)\quad f(x,y,z)=x^{۲}y^{۳}z^{٤}$$

$$(c)\quad f(x,y,z)=e^{x}\sin(y)ln(z)$$

۲–۵ ارتفاع کوهی با تابع زیر داده شده است (y برحسب کیلومتر، فاصله به سوی شمال است و (xبرحسب متر رو به شرق) $h(x,y)=۱۰(۲xy-۳x^{۲}-٤y^{۲}-۱۸x+۲۸y+۱۲)$

(الف): قله‌ی کوه در کجاست؟

(ب): ارتفاع کوه را پیدا کنید؟

۲–۶ اگر $\mathbf{r}$ برداری از نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به نقطه (x,y,z) باشد و طول آن برابر r باشد نشان دهید:

الف: $\nabla(\mathbf{r}^{۲})=۲\mathbf{r}$

ب: $\nabla(\frac{۱}{r})=-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{۲}}$ ($\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای $\mathbf{r}$ است)

۲–۷ کرل توابع برداری زیر را حساب کنید.

الف: $\mathbf{F}_{۱}=x^{۲}\,\hat{\mathbf{i}}+۳xz^{۲}\,\hat{\mathbf{j}}-۲xz\,\hat{\mathbf{k}}$

ب: $\mathbf{F}_{۲}=xy\,\hat{\mathbf{i}}+۲yz\,\hat{\mathbf{j}}+۳zx\,\hat{\mathbf{k}}$

پ: $\mathbf{F}_3=y^{۲}\,\hat{\mathbf{i}}+(۲xy+z^{۲})\,\hat{\mathbf{j}}+۲yz\,\hat{\mathbf{k}}$

۲=۸ فرض کنید بردارهای یکه $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ در صفحه‌ی xy قرار دارند. بردار $\hat{\mathbf{a}}$ با محور x ها زاویه‌ی θ و بردار $\hat{\mathbf{b}}$ با محور x ها زاویه‌ی φ می‌سازد. با استفاده از جبر بردارها ثابت کنید $\cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi$

۲–۹ شتاب گرانش را می‌توان با آزمایش زیر اندازه‌گیری کرد: جسمی را به طور قائم به هوا پرتاب کنید. دو نقطه A و B را در راستای حرکت جسم به فاصله‌ی h از هم در نظر بگیرید. اگر T_A بازه‌ی زمانی باشدکه جسم از Aگذشته و دوباره به A بازگشته است و T_B بازه‌ی زمانی باشد که جسم در هنگام رفت و برگشت از Bگذشته است، آنگاه با اندازه‌گیری T_A و T_B می‌توان مقدار g را بدست آورد. نشان دهید که مقدار g برابر است با $g=\frac{۸h}{T_A^{۲}-T_B^{۲}}$.

۲–۱۰ ذره‌ای با سرعت شعاعی $\dot{r}$ =٤ m/s حرکت می‌کند. اندازه سرعت زاویه‌ای آن ثابت و برابر است با $\dot{\theta}=۲$ rad/s. هنگامیکه ذره در سه متری از مبداء مختصات باشد (الف) اندازه سرعت، (ب) اندازه شتاب آن را بیابید.

فصل ۳

قانون‌های نیوتون

مکانیک کلاسیک چگونگی حرکت اجسام را توصیف می‌کند. یعنی مکان اجسام چگونه با زمان تغییر می‌کند. قانون‌های بنیادی مکانیک کلاسیک را می‌توان برای اجسام با هر اندازه‌ای به کار برد (اندازه‌های بزرگتر از ابعاد اتمی). آنها را برای اجسام با شکل و ساختارهای درونی گوناگون هم می‌توان به کار برد. در هیدرودینامیک کلاسیک در مورد مایع‌ها هم به کار می‌روند. با این حال، روشن نیست که منظور از «مکان» جسمی بزرگ با شکلی پیچیده چیست. تنها در حالت آرمانی ذره‌ی نقطه‌ای «مکان» جسم معنی روشنی دارد. از این رو، نخست به اجسام کوچکی می‌پردازیم که می‌توان آنها را نقطه‌ای انگاشت و جایگاه‌شان را در زمان t با بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ مشخص کرد. در بررسی اجسام بزرگ، فرض خواهیم کرد که می‌توان آنها را به تعداد بسیار زیاد اجسام کوچک تقسیم کرد و هر کدام از این اجسام کوچک را به صورت ذره‌ی نقطه‌ای پنداشت. (درباره‌ی نیروهای درونی میان این ذره‌ها هم‌چنین وادار خواهیم شد فرض‌های دیگری را هم در نظر بگیریم.) اگر به حرکت کلی جسم بسیار بزرگی مانند سیاره، علاقمند باشیم، می‌توانیم آن را به صورت ذره‌ی نقطه‌ای در نظر بگیریم که در مرکز جسم جایگزیده است. به بیان دیگر، از خود قانون‌ها معنی«مکان» جسم دارای بعد به دست خواهد آمد.

۳ـ۱ قانون نخست نیوتون

همان‌گونه که در اصل نسبیت به آن پرداختیم، مفهوم و اندرونه‌ی قانون نخست نیوتون تعریف چارچوب‌های لخت است:

هر جسم حالت حرکت یکنواخت راست‌خط و یا سکون خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیرویی آن را وادار به تغییر حالت حرکت خود کند.

آزمایشی که در آن نیرویی حضور نداشته باشد نمی‌توان طراحی کرد؛ زیرا برای این کار باید جسم را منزوی کرد. به این دلیل، باید بخشی از اندرونه‌ی قانون نخست را به صورت ادراکی پذیرفت که با برون‌یابی نتایج آزمایش‌هایی که در آن نیروهای کوچک، اما محدود، حضور دارند، به دست می‌آید. در واقع، اصل لخت را گالیله بیان کرد و قانون نخست نیوتون در حقیقت بیان دوباره‌ی این اصل است (در واقع، گالیله اصل لخت را برای حرکت دایره‌ای بیان کرد). اصل لخت گالیله یا قانون نخست نیوتون می‌گوید اگر جسمی را به حال خود واگذاریم و اختلالی در آن ایجاد نکنیم، آنگاه جسم اگر در ابتدا در حال حرکت بود، با سرعت ثابت به حرکت راست‌خط خود ادامه خواهد داد و اگر در آغاز ساکن بود به حالت سکون خود ادامه خواهد داد. البته به نظر نمی‌رسد که در طبیعت این چنین باشد؛ زیرا اگر جسمی را روی میز لغزانده و رها کنیم، جسم سرانجام می‌ایستد. اما ایستادن آن به این خاطر است که جسم را به حال خود رها نکرده‌ایم بلکه، جسم در مالش با میز بوده است.

اگر جسمی به حال خود رها نشود، حالت حرکتی آن تغییر می‌کند. بنابراین، باید به دنبال قاعده‌ای بگردیم که چگونگی تغییر سرعت جسم تحت تأثیر نیرو را بیان کند. قانون دوم نیوتون روش مشخصی برای تعیین چگونگی تغییر سرعت جسمی را به دست می‌دهدکه تحت تأثیر نیروهای گوناگون است.

۳ـ۲ قانون دوم نیوتون ـ جرم و نیرو

یک جسم منزوی را در نظر بگیرید. منزوی به این معنی است که همه‌ی اجسام دیگر به اندازه‌ای در دوردست قرار دارند که می‌توان از اثر آنها بر روی جسم مورد نظر چشم‌پوشی کرد. این جسم را به اندازه‌ای کوچک فرض کنید که بتوان آن را ذره‌ی نقطه‌ای پنداشت. مکان جسم را در چارچوب لخت معینی با $\mathbf{r}(t)$ نشان بدهید. سرعت و شتاب این جسم عبارت‌اند از:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt} \qquad (۳-۱)$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\ \mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\ \mathbf{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^{2}\mathbf{r}(t)}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \qquad (۳-۲)$$

پیش از آنکه بتوان قانون نیوتون را توضیح داد، باید ویژگی‌های جسم یا ذره را شناخت. هنگامی که می‌گوئیم جسم یا ذره‌ای را در نظر بگیرید یعنی شناسه‌های آن را بدانید. اگر بپرسیم ذره‌ی مورد نظرتان را توصیف کنید، چگونه می‌توان از عهده‌ی این کار برآمد؟ هر ذره‌ای با شناسه‌های خود از ذره‌ی دیگر متمایز می‌شود. به بیان دیگر ذره مانند انسان دارای شناسنامه است. در شناسنامه‌ی فرد نام خانوادگی، نام، قد، رنگ، جنسیت و غیره نوشته می‌شود. دو فرد هنگامی از یکدیگر متمایز می‌شوند که دست کم یک شناسه‌ی آنها متفاوت باشد. برای شناسه‌ی ذرات نیز چیزهایی مانند جرم، بار الکتریکی، اسپین، بار رنگ، چاشنی، بار لپتونی، بار هادرونی و... وجود دارند. در فیزیک، بررسی هر کدام از این شناسه‌ها پایه‌های نظریه‌های بنیادی خاصی است. برای نمونه، از بررسی جرم به نظریه‌ی مکانیک کلاسیک و گرانش می‌رسیم. با بررسی شناسه‌ی بار الکتریکی به نظریه‌ی الکترومغناطیس پی می‌بریم. بار رنگ به نظریه‌ی کرومودینامیک کوانتومی می‌انجامد و غیره. در اینجا، یعنی در مکانیک کلاسیک ما تنها به پی‌آمدهای جرم خواهیم پرداخت. ما از واژه‌ی جرم یک دریافت حسی داریم. نخست این دریافت حسی را دست‌مایه می‌کنیم و سپس به تعریف دقیق آن می‌پردازیم. اگر با دست خود جسمی را که سبک است هل بدهیم، جسم به آسانی حرکت می‌کند؛ چنانچه همان هل‌دادن را به جسم بسیار سنگین‌تری اعمال کنیم جسم به سختی حرکت خواهد کرد. درواقع باید واژه‌های «سبک» و «سنگین» را به واژه‌های «کم‌جرم» و «پرجرم» تغییر داد؛ زیرا میان «وزن» یک جسم و «لختی» آن تفاوتی وجود دارد که باید آن را فهمید (دشواری در به حرکت درآوردن جسم یک چیز است و وزن جسم چقدر است چیز دیگری است. اینها دو مفهوم کاملاً جدا از هم‌اند.) البته؛ وزن و لختی با یکدیگر متناسب‌اند و در سطح زمین، بیشتر وقت‌ها آنها را از نظر مقدار یکی می‌گیرند که به گمراهی دانشجو می‌انجامد. در کره‌ی مریخ وزن چیز دیگری خواهد بود، حال آنکه نیروی لازم (هل دادن) برای چیره شدن به لختی همان است که در سطح زمین بود.

ما از واژه‌ی «جرم» برای بیان کمی لختی استفاده خواهیم کرد؛ کمیتی که نشان می‌دهد یک جسم در برابر هل‌دادن و به حرکت وادار شدن چقدر از خود مقاومت نشان می‌دهد. به این ترتیب هر جسمی مقدار معینی جرم دارد و تفاوت دو جسم در این مقدار، آن ها را از یکدیگر متمایز می‌کند. در بخش ٤-۳ به مفهوم جرم بیشتر پرداخته خواهد شد. در این بخش، هدف این است که روش مشخصی برای چگونگی تغییر حالت حرکتی یک جسم بیابیم. خب، دو جسم با جرم‌های کاملاً متفاوت می‌توانند سرعت‌های یکسان داشته باشند. بنابراین، سرعت نمی‌تواند به تنهایی آنها را از یکدیگر متمایز کند. یکی از این دو جسم ممکن است جرم بزرگتری داشته باشد و از این‌رو تغییر حالت حرکتی آن به تلاش بیشتری نیاز خواهد داشت و چگونگی تغییر حالت حرکت آن در مقایسه با جسم کم‌جرم‌تر، اما با همان سرعت، متفاوت خواهد بود. پس باید کمیتی را بیابیم که این دو را از هم متمایز کند. این کمیت «**تکانه**» نام دارد وعبارت است از حاصل ضرب جرم و سرعت. آن را با نماد $\mathbf{p}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{p}_i = m_i\,\mathbf{v}_i \qquad (۳-۳)$$

تکانه‌ی $\mathbf{p}_i$ نماینده‌ی حالت حرکت جسم i ام با جرم m_i و سرعت $\mathbf{v}_i$ است. معادله‌ای که چگونگی حرکت جسم را توصیف می‌کند، معادله‌ی حرکت نام دارد. این معادله بیان **قانون دوم نیوتن** است. می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد: تغییر حالت حرکتی یک جسم نسبت به زمان با نیرویی که به جسم اعمال می‌شود برابر است. به بیان ریاضی:

$$\mathbf{F} \equiv \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\,\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \qquad (۳-٤)$$

توجه بکنید که در اینجا دو فرض نهفته است.

۱- فرض کردیم که جرم جسم تغییر نمی‌کند ومقدارش ثابت است.

۲- اگر دو جسم را روی هم بگذاریم، جرمشان با هم جمع می‌شوند.

در بسیاری از کتاب ها سخن از جرم وابسته به سرعت به میان می‌آید. به ویژه، در نسبیت (یعنی هنگامی که سرعت ذره زیاد و قابل مقایسه با سرعت نور باشد) از واژه های "جرم سکون" و "جرم متحرک" ذره استفاده می شود. این واژه ها گمراه کننده اند و شایسته است که از به کار بردنشان خودداری کنیم.

نکته‌ی مهم دیگری که در قانون دوم نیوتن باید به آن توجه کرد این است که رابطه معادله‌ی حرکت یک رابطه‌ی برداری است. هنگامی که از تغییر تکانه صحبت می‌کنیم، نه تنها تغییر در اندازه‌ی تکانه بلکه تغییر در جهت آن را نیز در نظر داریم. نیروی $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ می‌تواند اندازه‌ی $\mathbf{p}$ را تغییر دهد؛ یا جهت آن را عوض کند و یا هر دو را. به یاد بیاورید که ذره‌ای که با اندازه سرعت ثابت مثلاً ۲ m/s روی یک دایره حرکت می‌کند شتاب دارد و در نتیجه به آن نیرو وارد می‌شود. این شتاب در اثر تغییر جهت سرعت ذره ایجاد می‌شود و برابر است با $a=v^{2}/R$ و بر مسیر حرکت ذره عمود است. نیروی $ma=mv^{2}/R$ که به سرعت عمود است سبب می‌شود تا ذره بر روی مسیر خمیده حرکت کند. شعاع خم را می‌توان از این رابطه به دست آورد.

جمع پذیری جرم‌ها که به طور ضمنی در قانون دوم نیوتون نهفته است و به آن اشاره شد در بخش (٣-٤) بررسی خواهد شد. قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$، هنگامی سودمند است که نیرو را بشناسیم. آنگاه می‌توان شتاب، سرعت و در نتیجه، حرکت جسم را بررسی کرد. به بیان دیگر به روابطی نیاز داریم که نیرو را مشخص کنند. نیوتون برای گرانش رابطه‌ی مشخصی را بیان کرد و ما به زودی به آن خواهیم پرداخت. با دانستن قانون نیروی گرانش می‌توان حرکت سیاره‌ها را به آسانی بررسی کرد. حالت ها و مسائل فراوان دیگری هم وجود دارند که نیوتون رابطه‌ی مشخصی برای آنها سامان نداده است؛ اما در چهارچوب قانون سوم خود، برخی آگاهی‌های عمومی را درباره‌ی سرشت نیروها فراهم کرده است. در بخش ۳-۳ این ویژگی عمومی نیروها و نتایج برآمده از قانون های نیوتون را بررسی می کنیم.

۳-۳ قانون سوم نیوتن ـ کنش و واکنش

اگر سامانه‌ی منزوی شامل بیش از یک جسم باشد، آنگاه قانون دوم نیوتون برای بررسی چگونگی تغییر حالت حرکت سامانه کافی نیست. قانون سوم راهکاری برای این وضعیت‌ها است.

فرض کنید سامانه‌ی منزوی از N ذره‌ی نقطه‌ای تشکیل شده است و می‌توان مکان هر ذره را با بردار مکان $\mathbf{r}_i(t)$ نشان داد. سرعت و شتاب هر یک از ذره‌ها برابراست با:

$$\mathbf{v}_i(t)=\frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt}=\dot{\mathbf{r}}_i(t) \qquad (۳-۵)$$

$$\mathbf{a}_i(t)=\frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt}=\dot{\mathbf{v}}(t)=\ddot{\mathbf{r}}_i(t) \qquad (۳-٦)$$

اگر جرم هر ذره m_i باشد ، تکانه‌ی آن عبارت خواهد بود از:

$$\mathbf{p}_i=m_i\,\mathbf{v}_i \qquad (۳-۷)$$

بنا به قانون دوم نیوتون، نیروی وارد به ذره‌ی $i-$ام عبارت است از:

$$\mathbf{F}_i=\dot{\mathbf{P}}_i=m_i\mathbf{a}_i \qquad (۳-۸)$$

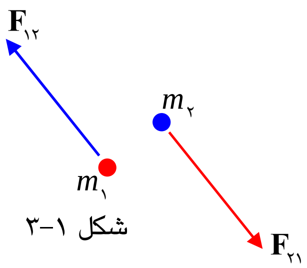
در اینجا $\mathbf{F}_i$ نیروی کل است که به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌شود. چون سامانه منزوی است، نیرویی خارج از سامانه به آن وارد نمی‌شود؛ پس نیرو $\mathbf{F}_i$ بالا را باید بقیه‌ی ذره‌ها به ذره‌ی $i-$ام اعمال کنند. بنابراین، $\mathbf{F}_i$ جمع نیروهایی است که بقیه‌ی ذره‌ها به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌کنند. اگر نیرویی را که ذره‌ی $j-$ام به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌کند با $\mathbf{F}_{ij}$ نشان دهیم آنگاه داریم:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \cdots \mathbf{F}_{iN} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \qquad (۳-۹)$$

توجه کنید که $\mathbf{F}_{ii} = 0$ است، چون ذره‌ی $i-$ام به خودش نیرو وارد نمی‌کند. هم چنین توجه کنید که جمع سمت راست رابطه‌ی بالا جمع برداری است. $\mathbf{F}_{ij}$ نیرویی است که بین دو جسم i و j وجود دارد. قانون سوم نیوتون به نیروی بین دو جسم توجه دارد.

قانون سوم نیوتون می‌گوید نیروها جفت اند. کنش و واکنش همزمان‌اند و با هم برابرند. مفهوم این قانون را می‌توان بدین صورت بیان کرد: $\mathbf{F}_{ij}$ نیرویی است که جسم $j-$ام به جسم $i-$ام وارد می‌کند. همچنین $\mathbf{F}_{ji}$ نیرویی است که جسم $i-$ام به جسم $j-$ام وارد می‌کند. این دو نیرو همزمان اند. اگر $\mathbf{F}_{ij}$ ذره‌ی $i-$ام را به سویی هل بدهد، نیروی $\mathbf{F}_{ji}$ ذره‌ی $j-$ام را به همان اندازه در سوی مخالف هل خواهد داد. فراتر از این، این دو نیرو در یک راستا هستند. به بیان ریاضی این قانون را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

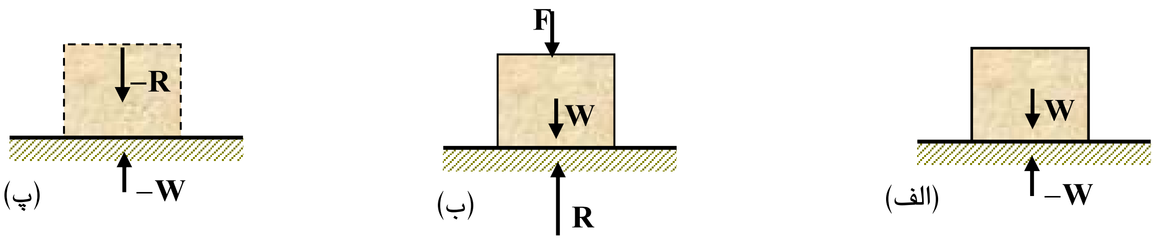
$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij} \qquad (۳-۱۰)$$



شکل ۱-۳

شکل (۱-۳) دو ذره را نشان می‌دهد که با یکدیگر برهم‌کنش متقابل دارند. جرم آنها m_1 و m_2 است. ذره‌ی m_1 نیروی $\mathbf{F}_{21}$ را به ذره‌ی دوم وارد می‌کند و جرم m_2 نیروی $\mathbf{F}_{12}$ را به جرم m_1 وارد می‌کند. این دونیرو در خلاف جهت یکدیگرند.

مثال دیگر: قطعه چوبی را در نظر بگیرید که بر سطح افقی میزی قرار دارد. فرض کنید میز به زمین محکم شده است. در شکل (۲-۳ الف) نیروی $\mathbf{W}$ ، وزن قطعه، نیروی گرانش است که زمین به قطعه وارد می‌کند (همانگونه که بعداً خواهیم دید این نیرو به مرکز قطعه وارد می‌شود) و $-\mathbf{W}$ نیروی گرانش است که قطعه به زمین وارد می‌کند. نیروهای $\mathbf{W}$ و $-\mathbf{W}$ از طریق قانون سوم نیوتون به هم مربوطاند. به آنها نیروهای کنش و واکنش می‌گوئیم. در مقابل این ارتباط، نیروهایی وجود دارند که به وسیله‌ی شرایط کمکی دیگری به یکدیگر مربوطاند. برای مثال، شکل (۲-۳ب) تنها نیروهایی را نشان می‌دهد که به قطعه وارد می‌شوند. در این شکل، ما همچنین نیروی $\mathbf{F}$ را نشان دادیم که از بالا قطعه را به سوی پائین فشار می‌دهد.



شکل ۲-۳

وجود نیروی $\mathbf{R}$ را از آنجا درمی‌یابیم که چون نیروهای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{W}$ رو به پائین به قطعه وارد می‌شوند، بنا به قانون دوم نیوتون؛ قطعه باید حرکت شتاب‌دار به سوی پائین داشته باشد؛ واقعیت اینکه قطعه نسبت به زمین حرکت شتاب‌دار ندارد می‌آموزد که سطح میز نیروی $\mathbf{R}$ را به قطعه وارد می‌کند. اندازه‌ی نیروی $\mathbf{R}$ با اندازه‌ی $\mathbf{W+F}$ برابر و جهت آن درخلاف جهت $\mathbf{W+F}$ است.

می‌بینیم که $\mathbf{R}$ با شرط ترازمندی به $\mathbf{W}$ و $\mathbf{F}$ مربوط می‌شود. در شکل (۲-۳پ) فقط نیروهایی که به زمین وارد می‌شوند نشان داده شده‌اند: $\mathbf{R}$ و $-\mathbf{R}$ توسط قانون سوم نیوتون به یکدیگر مربوطند. روشن است که به زمین نیروی خالص $-\mathbf{R}-\mathbf{W}$ وارد می‌شود که با $\mathbf{F}$ برابر است. همین نیروی $\mathbf{F}$ به قطعه هم وارد می‌شود. در نتیجه، زمین (بعلاوه‌ی قطعه)، بنا به قانون دوم نیوتون، به سوی پائین حرکت شتاب‌دار دارند. اما به خاطر جرم زیاد زمین، این شتاب بسیارناچیز است و ما آن را حس نمی‌کنیم.

کج فهمی قانون سوم نیوتون می‌تواند تناقض‌هایی به همراه داشته باشد. یکی از این تناقض‌ها به قرار زیر است:

فرض کنید که در سطح افقی؛ اسبی درشکه‌ای را می‌کشد. اسب به درشکه نیروی $\mathbf{F}$ وارد می‌کند، اما بنا به قانون سوم نیوتون، درشکه نیروی $-\mathbf{F}$ را در خلاف جهت به اسب وارد می‌کند. چگونه است که اسب می‌تواند درشکه را به حرکت دربیاورد؟ پاسخ این است که به درشکه تنها نیروی $\mathbf{F}$ وارد می‌شود و در نتیجه؛ بنا به قانون دوم نیوتون، درشکه حرکت می‌کند. نیروی واکنش درشکه، $-\mathbf{F}$ ، به اسب وارد می شود و نیرویی نیست که به درشکه وارد می‌شود. به بیان کوتاه‌تر؛ نیروی کنش و واکنش چون به دو جسم متفاوت اثر می‌کنند با هم جمع نمی‌شوند.

نیروی $\mathbf{F}_{ij}$ (و نیز $\mathbf{F}_{ji}$) توابعی از مکان و سرعت (و ساختار درونی) جسم‌های $i-$ام و $j-$ام اند. اما اجسام دیگر تأثیری بر آنها ندارد. به خاطر اصل نسبیت، درواقع نیرو می‌تواند به مکان نسبی دو ذره

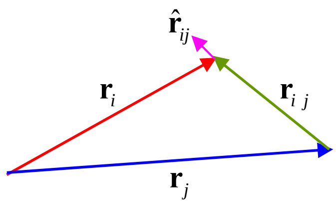
$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \tag{۳-۱۱}$$

و سرعت نسبی آنها

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \tag{۳-۱۲}$$

بستگی داشته باشد. (بکوشید تا توجیهی برای این گزاره پیدا و خود را قانع کنید). بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}_j$ در شکل (۳-۳) نشان داده شده اند. اگر نیروها را به صورت توابعی از مکان و سرعت ذره‌ها بشناسیم، آنگاه با استفاده از قانون دوم نیوتون

$$\dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \tag{۳-۱۳}$$



شکل (۳-۳)

می‌توان رفتار بعدی ذره‌ها را پیش‌بینی کرد. با دانستن مکان و سرعت اولیه، می‌توان معادله‌های حرکت را به صورت تحلیلی یا عددی حل کرد و مکان ذره‌ها را در زمان دیرتری به دست آورد. پس، کار نخست ما این است که قانون‌های دقیقی را مشخص کنیم و به وسیله‌ی آنها نیروی میان دو ذره را به دست آوریم. از آن به بعد، با استفاده از قانون دوم نیوتون، حرکت ذره یا جسم به آسانی به دست می‌آید.

مهمترین گروه نیروها عبارت‌اند از نیروهای مرکزی و *پایستار*. این نیروها تنها به مکان نسبی دو ذره بستگی دارند و می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_{ij} = \hat{\mathbf{r}}_{ij} \; f(r_{ij}) \tag{۳-۱۴}$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ بردار یکه در راستای $\mathbf{r}_{ij}$ و $f(r_{ij})$ تابعی عددی از فاصله نسبی r_{ij} است. اگر $f(r_{ij})$ مثبت باشد گوئیم نیروی $\mathbf{F}_{ij}$ یک نیروی **رانشی** است که در راستای خط واصل دو جسم و به سوی بیرون از جسم $i-$ام است. اگر $f(r_{ij})$ منفی باشد نیرو **ربایشی** است و جهت آن به سمت ذره‌ی $i-$ام است. بنا به **قانون جهانی گرانش نیوتون** ، بین هر جفت جسم یک چنین نیرویی وجود دارد؛ اندازه‌ی آن با جرم دو جسم متناسب است و به صورت زیر داده می شود

$$f(r_{ij}) = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \qquad (۳-۱۵)$$

که در آن G ثابت گرانش نیوتون است. مقدار آن $G = 6{,}673\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ است. چون جرم‌ها همواره مثبت‌اند، این نیرو همیشه ربایشی است. اگر به جای دو جرم دو بار الکتریکی **ساکن** را در نظر بگیریم، بین آنها نیروی کولنی الکتروستاتیک وجود دارد که عبارت است از:

$$f(r_{ij}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \qquad (۳-۱۶)$$

q_i و q_j بارهای الکتریکی‌اند و ε_0 ثابت دیگری است: $\varepsilon_0 = 8{,}85419\times10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$. توجه کنید که در اینجا مانسته‌ی ثابت G نیوتون: $\left(1/4\pi\varepsilon_0\right) = 8{,}98755\times10^{9}\,\mathrm{Nm^{-2}C^{-2}}$است. چون بارهای الکتریکی می‌توانند مثبت یا منفی باشند، بنابراین نیروی الکترواستاتیک می‌تواند رانشی یا ربایشی باشد. به تفاوت عظیم مرتبه‌ی بزرگی ثابت‌های G و $1/4\pi\varepsilon_0$ در یکاهای SI توجه کنید. این نشان می‌دهد که نیروی گرانش در مقایسه با نیروی الکتروستاتیک بسیار ضعیف است. علت اینکه نیروی گرانش برای ما چشمگیر به نظر می‌رسد، این است که ما بر روی جسمی با جرم بسیار زیاد، یعنی زمین، زندگی می‌کنیم. همچنین، بارهای بزرگ هرگز دیده نمی‌شوند زیرا بارهای مثبت و منفی یکدیگر را با تقریب زیادی حذف می‌کنند و در نتیجه بار اجسام بزرگ-مقیاس تقریباً نزدیک صفر است. (توجه: تفاوت عددی G و $1/4\pi\varepsilon_0$ به تنهایی بزرگی نیروی الکتریکی در برابر نیروی گرانشی را ثابت نمی‌کند. اگر نیروهای گرانشی و الکتریکی بین دو ذره‌ی بنیادی را مقایسه کنیم، تفاوت بزرگی‌های این دو نیرو معنی‌دار می‌شود).

در اجسام دارای ساختار؛ هنوز نیروهای پایستار (یعنی نیروهایی که مستقل از سرعت‌اند) می‌تواند بین بخش‌های سازنده‌ی جسم وجود داشته باشد و برخی شرایط دیگر را هم راضی کند. ما در اینجا به آن شرایط نخواهیم پرداخت. اما این نیروها دیگر مرکزی نخواهند بود (یعنی در راستای خطی که دو جسم را به‌هم وصل می‌کند قرار نخواهند داشت.) مثالی از این دست، وجود توزیع بار الکتریکی در درون دو جسم است. در چنین اجسامی نیروهای ناپایستار وابسته به سرعت نیز ممکن است نمود پیدا کنند.

۳-۴ مفهوم جرم و نیرو

در فیزیک یک اصل عمومی وجود دارد که می‌گوید هر کمیتی را که نتوان، دستکم در بنیاد، اندازه‌گیری کرد نباید در نظریه‌ی فیزیکی وارد کرد. اینک دیدیم که در قانون‌های نیوتون، افزون بر سرعت و شتاب که اندازه‌گیری پذیرند (با اندازه‌گیری فاصله و زمان) دو مفهوم جرم و نیرو هم وجود دارند. برای این که به قانونی معنی فیزیکی بدهیم، ناگزیریم که نشان دهیم جرم و نیرو کمیت‌های قابل اندازه‌گیری‌اند.

این که نیرو و جرم را می‌توان اندازه‌گیری کرد، آن گونه که در نگاه نخست به نظر می‌رسند، چندان بدیهی نیست. چون، هر آزمایشی که برای اندازه‌گیری این کمیت‌ها طراحی شود؛ به ناگزیر از قانون‌های نیوتون برای توصیف استفاده می‌کند. بنابراین، تعریف‌های عملی جرم و نیرو (دستورالعمل اندازه‌گیری آنها) که برای مفهوم فیزیکی داشتن قانون‌ها لازم‌اند، درواقع در خود قانون‌ها نهفته‌اند. این نه غیرمعمول و نه غیرمنطقی است، بلکه می‌تواند به روشنگری این مفهوم‌ها یاری کند تا قانون‌ها را چنان بیان کنیم که عنصر تعریفی را از آن به دست آوریم.

نخست به اندازه‌گیری جرم می‌پردازیم. از آنجائی که یکای جرم دلخواه است، باید نخست شیوه‌ای را برای مقایسه‌ی جرم دو جسم داده شده بیابیم. توجه کنید که در اینجا ما درباره‌ی *«جرم لختی»* سخن می‌گوئیم، جرمی که در قانون دوم نیوتون ظاهر می‌شود، و نه جرم گرانشی که در رابطه‌ی نیروی گرانشی وجود دارد. همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم، البته این دو متناسب‌اند، اما

این «اصل هم‌ارزی» یک قانون فیزیکی است که از تجربه به دست آمده است (مشاهده‌های گالیله در آزمایش اجسام در حال سقوط) ویک فرض اولیه نیست. برای آزمودن درستی قانون، باید بتوان هر کدام از جرم‌ها را مستقلاً اندازه‌گیری کرد. در نتیجه، نمی‌توان ، برای مثال، از ترازو که جرم‌های گرانشی را با هم مقایسه می‌کند، استفاده کرد. جرم‌های لختی دو جسم را می‌توان با اعمال نیروی یکسان به هر یک آنها، مقایسه کرد. چون به دو جسم نیروی‌های یکسان وارد می‌شود، آنها شتابیده می‌شوند و می‌توان با مقایسه‌ی شتاب‌شان به مقایسه‌ی جرم دو جسم پرداخت. البته این شیوه کمک نمی‌کند، مگر آنکه به گونه‌ای بدانیم که نیروهای وارد به دو جسم مساوی اند. می‌بینیم که در دور نافرجامی گیر افتاده‌ایم: برای مقایسه‌ی دو جرم باید بدانیم که نیروی وارد به هر یک از آن‌ها با هم برابرند تا بدین وسیله شتاب‌های دو جسم را مقایسه کنیم و برای مقایسه‌ی برابری دو نیرو به دانستن جرم‌ها نیاز داریم. یک وضعیت وجود دارد که می‌دانیم نیروها مساوی اند. این را قانون سوم نیوتون به ما می‌آموزد: اگر دو جسم مورد نظر را از بقیه‌ی ماده‌ی عالم منزوی و شتاب‌های متقابل آنها را مقایسه کنیم، آنگاه بنا به قانون‌های دوم و سوم نیوتون، یعنی رابطه‌های $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \qquad \mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \tag{۳-۱۷}$$

و در نتیجه

$$m_۱ \mathbf{a}_۱ = -m_۲ \mathbf{a}_۲ \tag{۳-۱۸}$$

بنابراین، جهت شتاب‌های دو ذره در خلاف هم‌اند و به طور معکوس با جرم ذره‌ها متناسب اند:

$$\mathbf{a}_۱ = -\frac{m_۲}{m_۱}\mathbf{a}_۲ \quad , \quad \mathbf{a}_۲ = -\frac{m_۱}{m_۲}\mathbf{a}_۱ \tag{۳-۱۹}$$

حال اگر اجازه دهیم که دو جسم کوچک با هم برخورد کنند، در طول برخورد، می‌توان از اثر اجسام دوردست، در مقایسه با اثر دو جسم بر یکدیگر، چشم پوشید و دو جسم را یک سامانه‌ی منزوی پنداشت. در این صورت با اندازه‌گیری سرعت‌ها ، پیش از برخورد و پس ازآن، می‌توان نسبت جرم‌ها را حساب کرد. اجازه دهید رابطه‌ی بالا را به صورت زیر بنویسیم:

$$m_۱ \mathbf{a}_۱ + m_۲ \mathbf{a}_۲ = ۰ \tag{۳-۲۰}$$

یا

$$m_۱ \frac{d\mathbf{v}_۱}{dt} + m_۲ \frac{d\mathbf{v}_۲}{dt} = ۰ \tag{۳-۲۱}$$

اگر از رابطه‌ی بالا نسبت به زمان انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$m_۱ \mathbf{v}_۱ + m_۲ \mathbf{v}_۲ = \text{ثابت} \tag{۳-۲۲}$$

رابطه (۳-۲۲) قانون **پایستگی تکانه** است که درواقع با قانون سوم نیوتون بیان شده است. اگر بخواهیم تعریف جرم را از اندرونه‌ی فیزیکی رابطه‌ی (۳-۱۷) جدا کنیم، می‌توانیم اصل اولیه‌ی زیر را بپذیریم.

در هر سامانه‌ی دو جسمی منزوی، شتاب همواره در رابطه‌ی $\mathbf{a}_۱ = -k_{۲۱}\mathbf{a}_۲$ صدق می‌کند. کمیت عددی $k_{۲۱}$ برای هر دو جسم، مقدار ثابتی است که مستقل ازمکان، سرعت و ساختار درونی آن دو جسم است.

در بالا گفتیم، یکای جرم دلخواه است. اگر به یکی از دو جسم، جرم واحد (مثلاً $m_۱ = ۱\text{kg}$) نسبت بدهیم می‌توانیم جرم جسم دوم را در یکای جسم نخست، $K_{۱۲}$، بنامیم (در اینجا $m_۲ = K_{۲۱}\,\text{kg}$). توجه کنید که برای حفظ سازگاری باید داشته باشیم $K_{۱۲} = ۱/K_{۲۱}$. هم‌چنین باید فرض کنیم که اگر جرم‌های سه جسم را به این شیوه مقایسه کنیم، قانون سازگار زیر را به دست می‌آوریم: برای سه جسم، ثابت های K_{ij} در رابطه $K_{۳۱} = K_{۳۲}K_{۲۱}$ ، صدق می‌کنند و داریم

$$k_{۱۲}k_{۲۳}k_{۳۱} = ۱ \tag{۳-۲۳}$$

پس، می‌بینیم که برای هر دو جسمی، رابطه‌ی $K_{۲۳}=m_۲/m_۳$ برقرار است.

پیش‌تر یادآور شدیم که در قانون نیوتون جمع‌پذیری جرم‌ها به طور ضمنی نهفته است. برای نشان دادن آن، سامانه‌ای با سه جسم را در نظر بگیرید. معادله‌ی حرکت این سه جسم عبارتند از:

$$m_۱\mathbf{a}_۱=\mathbf{F}_{۱۲}+\mathbf{F}_{۱۳}$$
$$m_۲\mathbf{a}_۲=F_{۲۱}+\mathbf{F}_{۲۳} \qquad (۳-۲٤)$$
$$m_۳\mathbf{a}_۳=F_{۳۱}+\mathbf{F}_{۳۲}$$

اگر این سه معادله را با هم جمع کنیم و به یاد داشته باشیم که $\mathbf{F}_{ij}=-\mathbf{F}_{ji}$، آنگاه جمله‌های سمت راست دو به دو یکدیگر را حذف می‌کنند و خواهیم داشت.

$$m_۱\mathbf{a}_۱+m_۲\mathbf{a}_۲+m_۳\mathbf{a}_۳=۰ \qquad (۳-۲٥)$$

که درواقع تعمیم رابطه‌ی پیشین $m_۱\mathbf{a}_۱=-m_۲\mathbf{a}_۲$ است. حال اگر نیروی بین جسم دوم و سوم چنان باشد که آنها را به هم بپیوند و یک جسم ترکیبی بسازد، آنگاه باید بپذیریم که شتاب‌های جسم دوم و سوم باهم برابرند: $\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_۳$. در این حالت داریم

$$m_۱\mathbf{a}_۱=-(m_۲+m_۳)\mathbf{a}_۲ \qquad (۳-۲٦)$$

که نشان می‌دهد جرم جسم ترکیبی با جمع جرم آنها برابر است: $m_{۲۳}=m_۲+m_۳$.

۳-۵ نیروهای خارجی

برای یافتن حرکت اجسام متفاوت در یک سامانه‌ی دینامیکی، باید دو مسئله‌ی خویشاوند را حل کنیم. نخست، با در دست داشتن مکان‌ها و سرعت‌ها در یک لحظه از زمان، باید نیروهایی را پیدا کنیم که به هر جسم وارد می‌شود. دوم، با دانستن نیرو، باید مکان‌ها و سرعت‌های جدید را پس از سپری شدن زمانی کوتاه حساب کنیم. در حالت عمومی، این دو مسئله به طور جدایی ناپذیری به یکدیگر تنیده‌اند و بنابراین، باید هم‌زمان حل شوند. با این حال، اگر با حرکت یک جسم کوچک یا گروهی از اجسام کوچک سر وکار داشته باشیم، می‌توان از اثر آن جسم بر روی اجسام دیگر چشم‌پوشی کرد. در این حالت دو مسئله را می‌توان از یکدیگر جدا کرد. برای نمونه، در بررسی حرکت یک ماهواره، می‌توان از اثر ماهواره بر روی زمین چشم‌پوشی کرد. چون حرکت زمین را می‌شناسیم، می‌توانیم نیروی وارد به ماهواره را به صورت تابعی از مکان و (اگر مقاومت هوای پیرامون زمین را هم در نظر بگیریم) سرعت ماهواره به دست آوریم. سپس، با فرض این‌که نیرو شناخته شده است، مسئله‌ی حرکت ماهواره را مستقلاً حل کنیم. در اینجا زمین به صورت یک عامل (نیروی) خارجی وارد مسئله می‌شود.

بنابراین، در حالت کلی سودمند است که توجه خود را به بخش کوچکی از سامانه‌ی دینامیکی تمرکز دهیم و اثر هر چیز دیگر بیرون از این بخش کوچک را با نیروهای خارجی نشان دهیم که فرض می‌کنیم آنها را می‌شناسیم. نیروهایی که در درون این بخش کوچک قرار دارند، نیروهای داخلی‌اند و در حرکت روی‌هم رفته‌ی جسم تاثیر ندارند.

۳-۶ ترازمندی نیروها

بهتر است که مکانیک را به دو بخش **ایستایی‌شناسی** و **دینامیک** تقسیم کنیم. دینامیک با حرکت اجسامی سروکار دارد که به آنها نیرو وارد می‌شود. ایستایی‌شناسی با اجسامی سروکار دارد که در حالت سکون یا حرکت یکنواخت‌اند. اگر نیروهایی حضور داشته باشند آنگاه مسئله‌ی ایستایی‌شناسی به یافتن آرایه‌ی نیروهایی تبدیل می‌شود که تحت آن نیروها، سامانه‌ی اجسام در حال سکون یا حرکت یکنواخت اند. به سامانه‌ای از اجسام که تحت اثر نیروهایی در حال سکون و یا حرکت یکنواخت باشد، گوئیم آن سامانه در حالت **ترازمندی ایستایی** است. نخست به ترازمندی یک تک‌ذره می‌پردازیم. .چون می‌خواهیم

ایستایی تک‌ذره را بررسی کنیم، روشن است که همه‌ی نیروهایی که ممکن است به ذره وارد شوند به یک نقطه وارد خواهند شد؛ به ذره. قانون دوم نیوتون می‌گوید اگر به ذره‌ای نیرو وارد شود، ذره حرکت شتاب‌دار خواهد داشت. پس شرط این که ذره تحت تأثیر نیروهای $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots \mathbf{F}_n$ ترازمندی ایستایی داشته باشد این است که برآیند نیروهای وارد به آن صفر باشد

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots \mathbf{F}_n = 0 \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

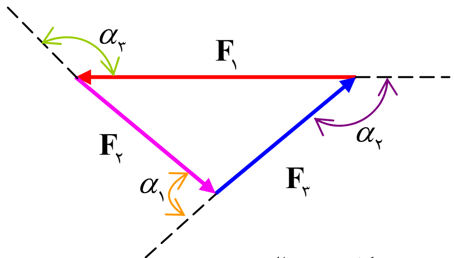
این رابطه‌ی برداری با سه معادله‌ی اسکالر زیر هم‌ارز است، هر معادله برای یکی از مؤلفه‌های نیروها:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \cdots F_{nx} &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \cdots F_{ny} &= 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \cdots F_{nz} &= 0 \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

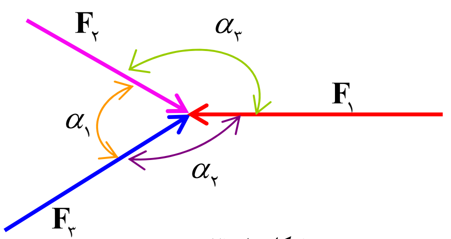
بنابراین می‌توان گفت: **اگر ذره‌ای تحت تأثیر چندین نیرو در حالت ترازمندی ایستایی باشد ، جمع جبری مؤلفه‌های x و y و z این نیروها باید به طور جداگانه صفر باشند.**

برای بررسی ترازمندی یک جسم، (در اینجا ذره)، بهتر است نخست آن را منزوی کنیم. ترازمندی تحت تأثیر سه نیرو، حالت خاصی است. حالت ترازمندی لازم می‌دارد که این سه بردار نیرو یک مثلث بسته بسازند. یعنی راستای سه نیرو همگی باید در یک صفحه قرار گیرند. اگر بیش از سه نیرو به ذره اعمال شود لازم نیست همگی در یک صفحه قرار گیرند. شکل (۴-۳ الف) ذره‌ای را تحت تأثیر سه نیروی $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ در حالت ترازمندی نشان می‌دهد. این سه نیرو یک مثلث بسته می‌سازند. طول ضلع‌های مثلث با اندازه‌ی نیروها متناسب است. از قانون سینوس‌ها در مثلثات و باتوجه به شکل(۴-۳ ب) داریم.

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3} \qquad (۳\text{-}۲۹)$$



شکل ۴-۳ الف

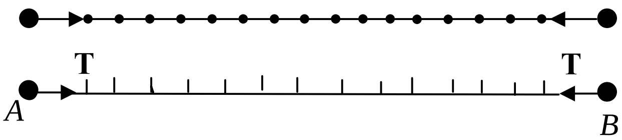


شکل ۴-۳ ب

۳-۷ ریسمان‌کشیده

سامانه‌های زیادی با ترازمندی ایستایی شامل ریسمان یا زنجیر و یا میله اند که به عنوان واسطه انتقال نیرو از یک نقطه سامانه به نقطه‌ی دیگر آن عمل می‌کند. نیروئی که به وسیله‌ی ریسمان کشیده (یا میله) انتقال می‌یابد **کشش** نامیده می‌شود. جهت کشش در ریسمان کشیده که دو جسم را به‌هم می‌پیوندد، همواره چنان است که می‌خواهد دو جسم را به‌هم نزدیک کند. ریسمان کاملاً کشیده شده نمی‌تواند **رانش** داشته باشد؛ یعنی نمی‌تواند دو ذره را از یکدیگر دور کند. اگر ریسمان کشیده نباشد، یعنی تحت کشش نباشد، هیچ نیرویی را منتقل نمی‌کند. در اینجا بهتر است ریسمان را آرمانی در نظر بگیریم. یعنی فرض کنیم سطح مقطع آن قابل چشم‌پوشی و جرمش صفر است و از تعداد بسیار زیادی ذره متصل به‌هم در راستای یک خط تشکیل شده است. کشش در دو سوی یکی از این ذره‌ها ، مثلاً ذره‌ی $i-$ام از نظر اندازه یکسان است؛ اگر چنین نمی‌بود، نیروی برآیند وارد به ذره‌ی $i-$ام صفر نمی‌شد و بنا به قانون دوم نیوتون وادار به حرکت می‌شد که نقض شرط ترازمندی ایستایی است. افزون بر این؛ بنا به قانون سوم نیوتون، چون ذره‌ی $(i-1)$ ام کشش $\mathbf{T}$ را به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌کند پس، ذره‌ی $i-$ام هم

نیروی کشش به اندازه‌ی $\mathbf{T}$، به ذره‌ی $(i-1)$ام وارد می‌کند. این را می‌توان بر روی ریسمان از ذره‌ای به ذره‌ی دیگر تکرار کرد تا اینکه به نقطه‌های پیوند (A و B در شکل ۵-۳) رسید. می‌بینیم که ریسمان بدون جرم تحت کشش $\mathbf{T}$، نیروی$\mathbf{T}$ را در راستای ریسمان به هر یک از نقطه‌های پیوند منتقل می‌کند. به هر نقطه‌ی ریسمان کشیده دو نیروی مساوی و خلاف جهت وارد می‌شود؛ به جز نقطه‌های انتهایی که تنها از یک سوی به آنها نیرو وارد می‌شود. این نیرو را جسمی به ریسمان وارد می‌کند که ریسمان به آن بسته شده است. (توجه کنید که اگر ریسمان جرم‌دار هم می‌بود، هنوز هم نیروی افقی وارد به هر نقطه‌ی غیرانتهایی می‌تواند صفر باشد. نکته‌ی بحث بالا این است که در امتداد ریسمان نیروی کشش ثابت است).



شکل ۵-۳

ریسمان ممکن است کشش‌پذیر (**کشسان**) یا کشش‌ناپذیر (**ناکشسان**) باشد. طول ریسمان کشش ناپذیر تغییر نمی‌کند و مهم نیست که نیروی کشش وارد به آن چه قدراست (تا جایی که بیش از استحکام رسمان نباشد و به پاره شدن آن نیانجامد.)

ریسمان کشش‌پذیر یا **کشسان** اگر تحت تأثیر کشش قرار گیرد، طول آن تغییر می‌کند. این تغییر طول به اندازی کشش بستگی دارد. اگر کشش صفر باشد، ریسمان طول طبیعی ، $L_\circ$، خود را دارد. اگر تحت کشش $\mathbf{T}$ طول ریسمان به اندازه‌ی ΔL تغییر کند این تغییر طول با **قانون هوک** به $\mathbf{T}$مربوط است. قانون هوک یک قانون تقریبی است و می‌گوید: اگر ریسمان کشسان تحت کشش $\mathbf{T}$ باشد؛ تغییر طول آن با اندازه‌ی کشش متناسب است.

$$T = k\Delta L \qquad (۳-۳۰)$$

ثابت تناسب k را **ثابت کشسانی** (یا ضریب کشسانی) ریسمان می‌نامند. (قانون هوک به ریسمان کشسان محدود نیست و در مورد همه‌ی اجسام **کشسان** تحت تنش درست است؛ چه این تنش کشش باشد یا رانش. فنر مثال دیگری است). گاهی به جای ثابت k از پارامتر دیگری بنام **مدول کشسانی** ریسمان، λ، استفاده می‌شود. λ کشش در واحد تغییر طول نسبی ریسمان است:

$$\lambda \equiv \frac{T}{\Delta L/L_\circ} \qquad (۳-۳۱)$$

که در آن $L_\circ$ طول طبیعی و ΔL مقدار تغییر طول ریسمان است. روشن است که λ و k با رابطه‌ی

$$\lambda = kL_\circ \qquad (۳-۳۲)$$

به هم مربوط اند. بررسی قانون هوک نشان می‌دهد که بُعد k نیرو تقسیم بر طول است و λ بعد نیرودارد.

مثال ۱-۳ جسم سنگینی به وزن W با دو ریسمان ناکشسان از دو نقطه‌ی هم‌سطح A و B آویخته شده اند. ریسمان‌ها بدون جرم اند و با افق زاویه‌های θ و φ می‌سازند. جسم برابر شکل (۶-۳ الف) در نقطه‌ی C به دو ریسمان بسته شده است. کشش را در هر دو ریسمان بیابید.

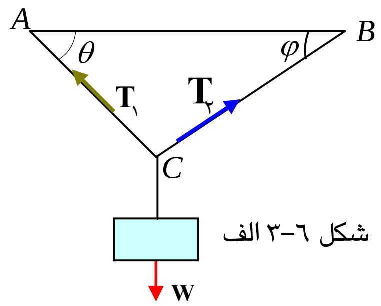
حل: مناسب ترین ذره برای بررسی تعادل آن، ذره‌ای است که در نقطه‌ی C است. این نقطه را منزوی کنید و نیروهایی را که به آن وارد می‌شود در نظر بگیرید. به این نقطه نیروهای کشش $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ در راستای دو ریسمان و کشش $\mathbf{W}$ که در راستای قایم به نقطه‌ی C وارد می‌شود (نیروی وزن $\mathbf{W}$ به طور مستقیم به نقطه‌ی C وارد نمی‌شود. از ترازمندی جسم سنگین می‌توان نتیجه گرفت که کشش در ریسمان قائم با نیروی $\mathbf{W}$ برابر است.) از قانون سینوس‌ها داریم

$$\frac{T_1}{\sin\alpha_1}=\frac{T_2}{\sin\alpha_2}=\frac{W}{\sin\alpha_3} \qquad (۳-۳۳)$$

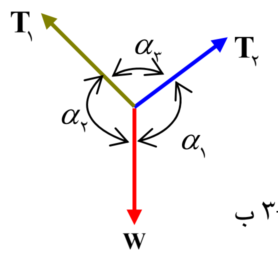
از شکل (۶-۳ الف) دیده می شود که:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_1&=\sin(\pi-\alpha_1)=\cos\phi\\ \sin\alpha_2&=\sin(\pi-\alpha_2)=\cos\theta\\ \sin\alpha_3&=\sin(\theta+\phi)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad T_1=\frac{W\ \cos\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}\quad,\quad T_2=\frac{W\ \cos\theta}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad (۳-۳٤)$$

شکل (۶-۳ب) نمایش نمودار آزاد نیروها در نقطه‌ی C است. به کار گرفتن نمودار آزاد نیروها کار بسیار هوشمندانه در **حل** :



شکل ۶-۳ الف



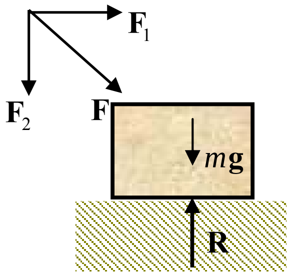
شکل ۶-۳ ب

حل مسئله‌های مکانیک است.

واقعیت مهم که در مثال بالا باید به آن توجه کرد اینست که وزنه در نقطه‌ی C بسته شده است و آزاد نیست که سُر بخورد. اگر وزنه می توانست بلغزد، مکان خود را تغییر می‌داد تا اینکه کشش در دو ریسمان از نظر اندازه برابر شوند.

۳-۸ سطح هموار

در بسیاری از مسئله‌های ایستایی‌شناسی، جسم با سطح تماس دارد. معمولاً این سطح به جسمی که در تماس با آن است، نیرو وارد می‌کند. در شکل (۳-۷) قطعه‌ای به جرم m روی سطح افقی میزی قرار دارد. وزن قطعه، mg ، نیرویی است که می‌توان آن را عمودی و به سمت پایین و در مرکز قطعه پنداشت. چون قطعه حرکت نمی‌کند میز باید نیرویی برابر mg و برخلاف جهت به قطعه وارد کند. در شکل این نیرو را با **R** نشان داده‌ایم. اگر سطح میز هموار باشد، هر نیروی واکنشی که سطح میز به قطعه وارد کند باید همواره به سطح میز عمود باشد. این رفتار، تعریف سطح بازدارنده‌ی هموار است. یعنی اگر سطح هموار باشد، نیروی واکنش آن به سطح عمود است. اگر نیروی دیگری مانند **F** به قطعه وارد شود و این نیرو در جهتی باشد که مؤلفه‌های موازی با سطح؛ F_1، و عمود بر سطح، F_2، داشته باشد، آنگاه قطعه در جهت F_1 حرکت شتاب‌دار خواهد داشت. اندازه‌ی نیروی واکنش سطح، **R**، برابر با $mg+F_2$ است.



شکل ۳-۷

مثال۲-۳ کره‌ای به وزن W بین دو صفحه‌ی هموار شیب‌دار قرار دارد و در حال سکون است. صفحه‌ها با افق به ترتیب زاویه‌ی α_1 و α_2 می‌سازند (شکل ۸-۳ الف). این دو صفحه چه نیروهایی به کره وارد می‌کنند.

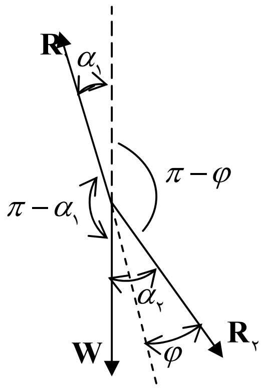
حل: نخست کره را منزوی کنید. روشن است که نیروهای وارد به کره عبارتند از: وزن **W** و نیروهای واکنش $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ که صفحه‌ها به کره وارد می‌کنند. چون سطح‌ها هموارند این نیروهای واکنش باید بر سطح‌ها عمود باشند. کمیت‌های داده شده **W**،

α_1 و α_2 اند و ما می‌خواهیم $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ را بیابیم. نمودار آزاد نیروها در شکل (۸-۳ ب) نشان داده شده است. کره تحت اثر سه نیروی $\mathbf{W}$، $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ در حالت ترازمندی است یعنی: $\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2+\mathbf{W}=0$ اگر مؤلفه‌های افقی و عمودی را در نظر بگیریم، داریم

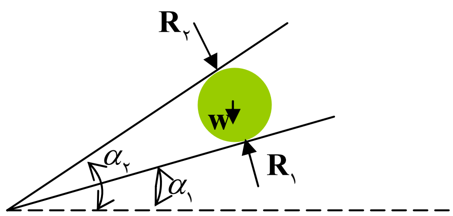
$$R_2\cos\alpha_2 + W = R_1\cos\alpha_1 \quad , \quad R_2\sin\alpha_2 = R_1\sin\alpha_1 \tag{۳-۳۵}$$

و از اینجا به دست می‌آید

$$R_2 = R_1\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \tag{۳-۳۶}$$



شکل ۸-۳ ب



شکل۸-۳ الف

با جایگذاری در رابطه‌ی نخست خواهیم داشت:

$$R_1(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) = W\ \sin\alpha_2$$

$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{W\ \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \quad , \quad R_2 = \frac{W\ \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \tag{۳-۳۷}$$

این نتیجه را می‌توانستیم مستقیم از قانون سینوس‌ها هم بدست آوریم. خط اثر هر سه نیرو در مرکز کره به‌هم می‌رسند. پس

$$\frac{R_1}{\sin\alpha_2} = \frac{R_2}{\sin(\pi-\alpha_1)} = \frac{W}{\sin(\pi-\varphi)}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{\sin\alpha_2} = \frac{R_2}{\sin\alpha_1} = \frac{W}{\sin\varphi} = \frac{W}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \tag{۳-۳۸}$$

$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{W\ \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \ , \qquad R_2 = \frac{W\ \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}$$

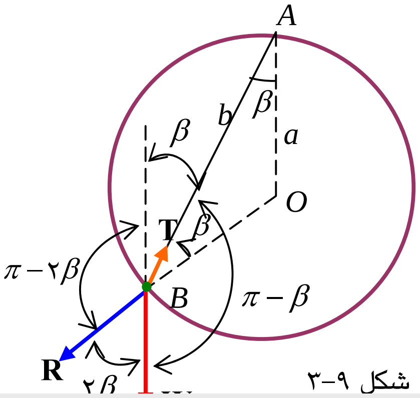
مثال ۳-۳ دانه‌ی تسبیحی به وزن $\mathbf{W}$ بر روی حلقه سیم دایره می‌لغزد. صفحه‌ی حلقه قائم و شعاع آن a است. افزون بر این، دانه‌ی تسبیح با ریسمان ناکشسان بدون جرم به طول b ، برابر شکل (۹-۳) به بالای حلقه وصل است. کشش نخ و نیروی واکنش حلقه را پیدا کنید.

حل: کمیت‌های داده شده عبارتند از: $\mathbf{W}, a, b$. در شکل (۹-۳) دانه‌ی تسبیح در نقطه‌ی B است و با ریسمان به نقطه‌ی A وصل است. نیروهای وارد به دانه تسبیح عبارتند از: $\mathbf{W}$، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{R}$. اگر دانه‌ی تسبیح را منزوی و از قانون سینوس‌ها استفاده کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{T}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{W}{\sin(\pi-\beta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\sin\beta} = \frac{W}{\sin\beta} \tag{۳-۳۹}$$

پس،

$$R = W \quad \text{و} \quad T = \frac{W \sin ۲\beta}{\sin \beta} = ۲W \cos \beta \qquad (۳-٤٠)$$

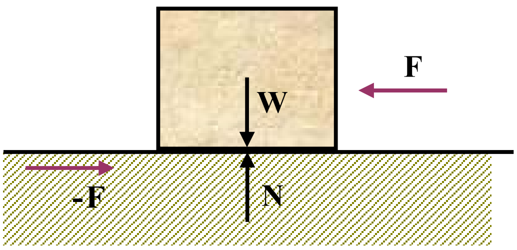


شکل ۹-۳

چون β مستقیماً داده نشده است، بهتر است آن را برحسب کمیت های داده‌شده بنویسیم. داریم $\cos\beta = b/۲a$. توجه کنید که جهت **R** را ما درست برگزیده‌ایم تا به سوی بیرون باشد. اگر آن را به دلخواه به‌سوی درون می‌گرفتیم، نتیجه‌ی به‌دست آمده با علامت منفی همراه می‌شد و نشان می‌داد که جهت **R** برعکس جهت انتخاب است

۹-۳ سطح ناهموار ـ نیروی اصطکاک

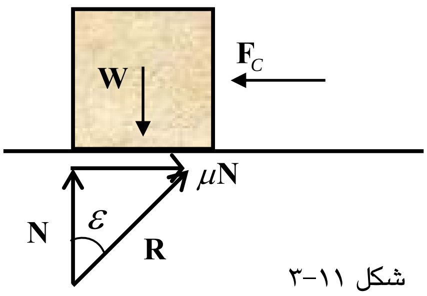
اگر جسمی روی سطح ناهمواری باشد، آنگاه ممکن است که نیروی واکنش سطح علاوه بر مؤلفه‌ی عمود بر سطح، مولفه‌ای نیز در صفحه‌ی تماس داشته باشد. واقعیت این است که در طبیعت سطح کاملاً هموار وجود ندارد. مؤلفه‌ی مماس بر سطح تماسِ نیروی واکنش، **نیروی اصطکاک** نام دارد: نیرویی که اصطکاک سطح به جسم وارد می کند. ساده‌ترین نمونه در شکل (۱۰- ۳) نشان داده شده است. در این شکل جسمی به وزن **W** روی سطح افقی ناهموار میزی در حال سکون است. برای حالت ساده‌ای که هیچ نیرویی به جز **W** وجود ندارد می‌دانیم که جسم در حال سکون باقی خواهد ماند. در نتیجه، واکنش سطح، نیروی **N** خواهد بود که برابر با **W** و در جهت خلاف آن است. اینک فرض کنید، نیروی **کوچک** **F** به طور افقی به جسم وارد می‌شود. از تجربه می‌دانیم که جسم در حال سکون باقی خواهد ماند. تنها توجیه برای بی حرکت ماندن جسم این است که بگوئیم سطح ناهموار نیرویی مساوی و در خلاف جهت، **F**−، به جسم وارد می‌کند. اگر چنین نمی‌بود، بنا به قانون نیوتون، باید جسم در جهت نیروی **F** حرکت می‌کرد. تجربه نشان می‌دهد که با افزایش **F** جسم ساکن باقی می‌ماند تا این که نیرو به یک مقدار بحرانی خاصی برسد. این بدان معنی است که نیروی بازدارنده‌ی اصطکاک در این بازه چنان تغییر می‌کند که همواره با مقدار **F** برابر باشد. با این حال، واقعیت این که سرانجام حرکت روی می‌دهد، نشان می‌دهد که نیروی اصطکاک به حدی رسیده است که پس از آن نمی‌تواند افزایش پیدا کند. آزمایش نشان می‌دهد که به تقریب، مقدار بحرانی نیروی اصطکاک، $\mathbf{F}_C$ ، مستقل از مساحت سطح تماس است و تنها به سرشت سطوح تماس بستگی دارد. افزون بر این، مقدار بحرانی $\mathbf{F}_C$ لازم برای آغاز حرکت (که جسم را در آستانه‌ی حرکت قرار می‌دهد) به طور مستقیم با نیرویی که جسم را به سطح می‌فشارد متناسب است (در مثال ما نیروی وزن). ضریب تناسب μ را **ضریب اصطکاک ایستایی** می‌نامند.



شکل ۱۰-۳

$$\mathbf{F}_C \equiv \mu \mathbf{N} \qquad (۳-٤۱)$$

توجه کنید که μ فقط هنگامی تعریف می‌شود که جسم در *آستانه‌ی لغزش* باشد. این بدان معنی نیست که نیروی اصطکاک تنها در این وضعیت حدی وجود دارد، بلکه بدین معنی است که تنها در این وضعیت حدی است که نیروی اصطکاک با μN برابر است. رابطه‌ی بالا می‌گوید نسبت مقدار بحرانی نیروی افقی اعمال‌شده به جسم و نیروی عمودی واکنش، مقدار ثابتی است که به سرشت سطح‌های تماس دو جسم



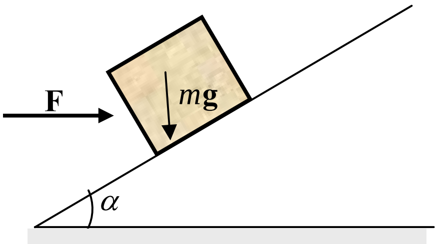
شکل ۱۱-۳

بستگی دارد و با μ، ضریب اصطکاک ایستایی، برابر است. نیروی واکنش واقعی **R** ، برآیند **N** و μ**N** یعنی نیروهای واکنش عمودی و اصطکاک است. این نیروها در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده اند. زاویه‌ی اصطکاک ، ε، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tan\varepsilon = \frac{\mu N}{N} = \mu \qquad (۳-٤۲)$$

که برای جفت سطح‌های داده‌شده مقدار ثابتی است. εو μ را می‌توان با استفاده از سطح شیب‌دار به دست آورد.

مثال ۴-۳: برابر شکل (۱۲-۳) قطعه‌ی مکعب شکلی به جرم m بر روی سطح شیب‌دار ناهمواری قرار دارد که با افق زاویه‌ی α می‌سازد. نیروی **F** به طور افقی به مکعب وارد می‌شود و راستای آن از مرکز هندسی قطعه می‌گذرد. ضریب اصطکاک ایستایی سطح μ است. کمینه و بیشینه مقدار نیروی **F** را چنان بیابید که با تعادل ایستایی سازگار باشند.



شکل ۱۲-۳

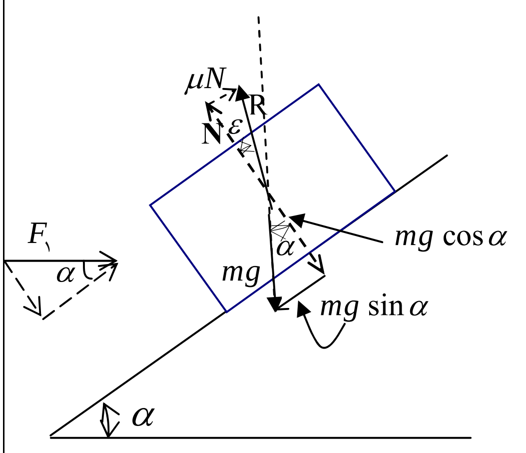
حل: نخست به **F** بپردازیم. اگر قطعه در آستانه‌ی لغزش به سوی پائین سطح باشد **F** کمینه خواهد بود. آن را $\mathbf{F}_۱$ بنامید. پس، در این حالت نیروهائی که به قطعه وارد می‌شوند عبارتند از: $\mathbf{F}_۱$ (که باید پیدا کنیم)، نیروی وزن **mg** و نیروی واکنش سطح (که در شکل نشان داده نشده است). نیروهایی را که به قطعه وارد می‌شوند به مؤلفه‌هایی در امتداد سطح و عمود بر سطح تجزیه کنید. در شکل (۱۳-۳) این مولفه ها نشان داده شده اند. شرط ترازمندی حدی عبارت است از

$$F_۱ \sin\alpha + mg\cos\alpha = N \qquad (۳-٤۳)$$
$$F_۱ \cos\alpha + \mu N = mg\sin\alpha$$

N مؤلفه‌ی عمودی نیروی واکنش سطح است. اگر از دو رابطه‌ی بالا N را حذف کنیم، به دست می‌آید: $F_۱(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. بنابراین،

$$F_۱ = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{mg(\cos\varepsilon\sin\alpha - \sin\varepsilon\cos\alpha)}{(\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha)} = mg\tan(\alpha - \varepsilon) \qquad (۳-٤٤)$$

حالتی هم که **F** بیشینه باشد به همین ترتیب حل می‌شود؛ با این تفاوت که این بار قطعه در آستانه‌ی لغزش رو به بالاست.



(شکل ۱۳-۳)

بیشینه‌ی **F** را $\mathbf{F}_۲$ بنامید. این بار نیروی اصطکاک رو به پائین است و

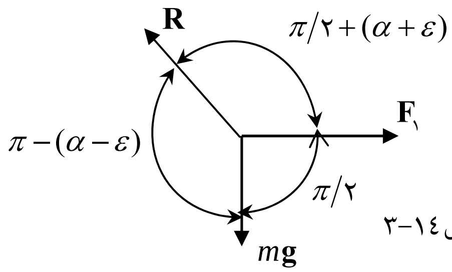
$$F_۲\sin\alpha + mg\cos\alpha = N',$$
$$F_۲\cos\alpha = \mu N' + mg\sin\alpha \qquad (۳-٤٥)$$
$$\Rightarrow \quad F_۲ = mg\tan(\alpha + \varepsilon)$$

از قانون سینوس ها هم می‌توانستیم برای حل مسئله استفاده کنیم. در اینجا فقط حالت کمینه رادر نظر می‌گیریم. خط اثر نیروهای $\mathbf{F}_۱$، **mg** و **N** از مرکز هندسی قطعه می‌گذرند. مسئله، بررسی تعادل ذره تحت تأثیر این نیروهاست. از شکل (۱٤-۳) داریم:

$$\frac{F_۱}{\sin[\pi - (\alpha - \varepsilon)]} = \frac{mg}{\sin[\pi/۲ + (\alpha - \varepsilon)]}$$

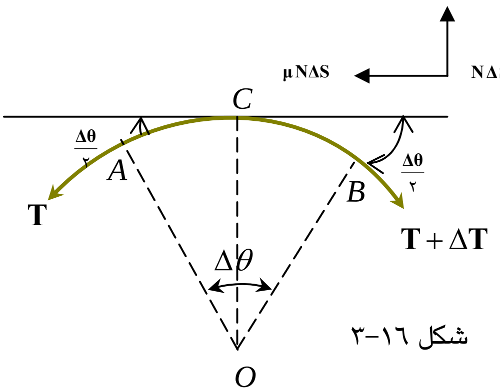
یا

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha-\varepsilon)}=\frac{mg}{\cos(\alpha-\varepsilon)} \quad\Rightarrow\quad F_1 = mg\tan(\alpha-\varepsilon)$$

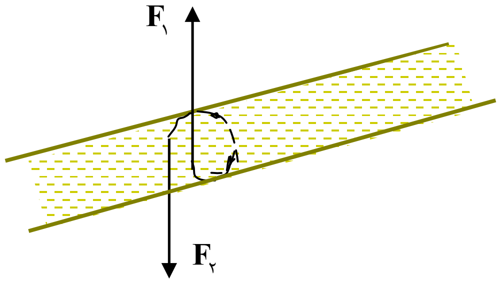


شکل ۱۴-۳

مثال۵-۳ : همه دیده‌ایم که با پیچیدن ریسمانی دور یک تیرک یا میله می‌توان با نیروی به نسبت اندک به نیروی بسیار بزرگتری چیره شد (شکل۱۵-۳ را ببینید.) تنها محدودیت این است که بیشینه کششی را که ریسمان می‌تواند تحمل کند از نیروی بزرگتر بیشتر باشد. نیروی کوچکتر را $\mathbf{F}_1$ و نیروی بزرگتر را $\mathbf{F}_2$ بنامید. در شکل (۱۶-۳) قسمت کوچک Δs ریسمان (خم AB) را که در تماس



شکل ۱۶-۳



شکل ۱۵-۳

با سطح ناهمواراست، با درشت نمایی نشان داده‌ایم. ضریب اصطکاک ایستـایی μ است و ریسمان در آستانه‌ی لغزش به سمت راست است. اگر نیروی واکنش عمودی سطح در واحد طول ریسمان $\mathbf{N}$ باشد آنگاه در طول Δs ریسمان نیروی اصطکاکی به اندازه‌ی $\mu\mathbf{N}\Delta s$ و به سوی چپ وجود خواهد داشت. با دقتی پذیرفتنی، می‌توان فرض کرد که هر دوی این نیروها به وسط طول کوچک Δs و در نقطه‌ی C وارد می‌شوند. افزون بر این، Δs در حالت تعادل ایستایی است. بنابراین، جمع مؤلفه‌های همه‌ی نیروها در هر جهتی باید صفر باشند. اگر مؤلفه‌های مماس بر سطح را در نظر بگیرید. داریم

$$T\cos(\Delta\theta/2)+\mu N\Delta s=(T+\Delta T)\cos(\Delta\theta/2) \;\Rightarrow\; \mu N\Delta s=\Delta T \qquad (۴۶-۳)$$

چون زاویه‌ی $\Delta\theta$ کوچک است، در رابطه‌ی بالا از $\cos(\Delta\theta/2)\approx 1$ استفاده کردیم. اگر مولفه‌ی عمودی نیروها را در نقطه‌ی C در نظر بگیرید ، دیده می شود که

$$N\,\Delta s = T\,\sin(\Delta\theta/2)+(T+\Delta T)\sin(\Delta\theta/2) \quad\Rightarrow\quad N\,\Delta s = T\,\Delta\theta \qquad (۴۷-۳)$$

چون زاویه‌ی $\Delta\theta$ کوچک است، در رابطه ی بالا از تقریب $\sin(\Delta\theta/2)\approx\Delta\theta/2$ استفاده کردیم. از ترکیب دو رابطه و با فرض این‌که $\Delta\theta$ خیلی کوچک و در نتیجه $\Delta\theta\approx d\theta$ است، خواهیم داشت.

$$\frac{dT}{T}=\mu\,d\theta \qquad (۴۸-۳)$$

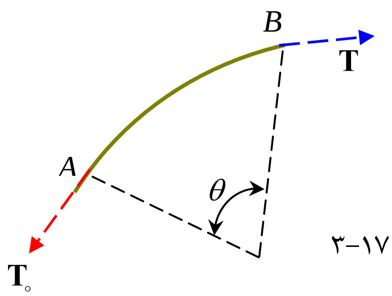
که اگر از آن انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$\ell n T = \mu\theta+\ell n T_0 \quad\Rightarrow\quad T = T_0 e^{\mu\theta} \qquad (۴۹-۳)$$

معنی این رابطه را می‌توان با رجوع به شکل (۱۷-۳) بدین گونه فهمید: ریسمان در آستانه‌ی لغزیدن به سوی راست است و $\mathbf{T}_0$ کششی است که باید به انتهای سمت چپ ریسمان وارد شود تا به نیروی بزرگتر $\mathbf{T}$ در سمت راست چیره شد. θ زاویه‌ی بین دو خط عمود بر سطح در دو نقطه‌ی A و B است. در این نقاط ریسمان از سطح جدا می‌شود. اگر نقطه‌ی تماس سطح و

ریسمان کاملاً هموار باشد، ضریب اصطکاک μ صفر است؛ یعنی کشش ریسمان در اثر تماس با سطح هموار تغییر نمی‌کند.

گاهی دانستن نیروی واکنش عمودی برحسب شعاع انحنای سطح سودمند است. می‌توان آن را از رابطه‌های بالا و به ویژه از رابطه‌ی (۳-۴۷) به دست آورد. در حد θ کوچک، هنگامی که $\Delta\theta \approx d\theta$ است، رابطه‌ی (۳-۴۷) به صورت زیر درمی‌آید

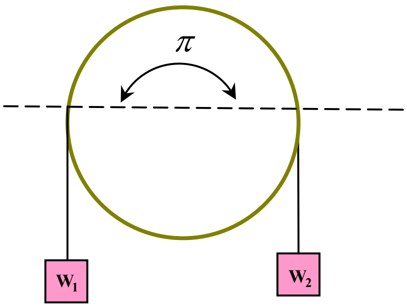


شکل ۳-۱۷

$$N = \frac{T}{ds/d\theta} \Rightarrow N = \frac{T}{r} \qquad (۳-۵۰)$$

که در آن $r = ds/d\theta$ شعاع خم سطح است

مثال۳-۶ : دو وزنه‌ی $W_۱$ و $W_۲$ $(W_۲ > W_۱)$ به دو انتهای یک ریسمان بسته شده‌اند. ریسمان از روی تنه‌ی ناهموار درختی، همانند شکل (۳-۱۸) آویزان است. تنه‌ی درخت افقی است و سامانه در ترازمندی حدی قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان تنه‌ی درخت و ریسمان ۱/۲ است. نسبت $W_۲/W_۱$ را پیدا کنید.



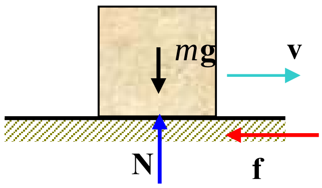
شکل ۳-۱۸

حل: زاویه‌ی بین دو نقطه‌ای که ریسمان سطح درخت را ترک می‌کند π است. در نتیجه از رابطه‌ی $T_۱ = T_۲ e^{\mu\theta}$ داریم: $W_۲/W_۱ = e^{\pi/۲} = ۴{,}۸۱$

اگر ریسمان یک دور کامل به تنه‌ی درخت پیچیده شده باشد آنگاه $\theta = ۳\pi$ و نسبت $W_۲/W_۱ = ۱۱۱{,}۳۱۸۳$ می‌شود. می‌بینیم که حتی با زاویه‌ی کوچک تماس نیز می‌توان به نیروهای بزرگ چیره شد.

۳-۱۰ اصطکاک جنبشی

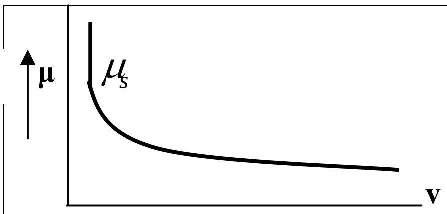
مفهوم **اصطکاک جنبشی** را می‌توان همانند اصطکاک ایستایی فهمید. به تجربه دیده می‌شود که هرگاه جسمی بر روی سطح بلغزد، نیروی اصطکاک با حرکت جسم مخالفت می‌کند. دوباره، جسمی را همانند شکل (۳-۱۹) در نظر بگیرید که بر روی سطح ناهموار می‌لغزد. اگر هیچ نیروی دیگری حضور نداشته باشد پس از مدتی جسم از لغزش باز خواهد ماند. نیرویی درخلاف جهت حرکت جسم باید سبب ایستادن جسم شود. این نیرو، نیروی اصطکاک است. آن را با **f** نشان دهید. این نیرو با نیروی عمود بر سطح (نیرو واکنش سطح) متناسب است:



شکل ۳-۱۹

$$\mathbf{f} = \mu_k \mathbf{N} \qquad (۳-۵۱)$$

ثابت μ_k **ضریب اصطکاک جنبشی** نام دارد. ضریب اصطکاک جنبشی یک سطح همواره از ضریب اصطکاک ایستایی آن کوچکتر است. اما این بدان معنی نیست که نیروی اصطکاک در گذار از ایستایی به جنبشی ناپیوسته است. در شکل (۳-۲۰) تغییر ضریب اصطکاک با سرعت نشان داده شده است. با این وجود، تغییر μ با سرعت پیچیده است و به شرایط فیزیکی بستگی دارد.



شکل ۳-۲۰

مثال۳-۷: قطعه‌ای به جرم m بر روی سطح شیبدار ناهمواری رو به پایین می‌لغزد. سطح با افق زاویه‌ی θ می‌سازد و ضریب اصطکاک جنبشی آن μ

است .شتاب جسم رابیابید.

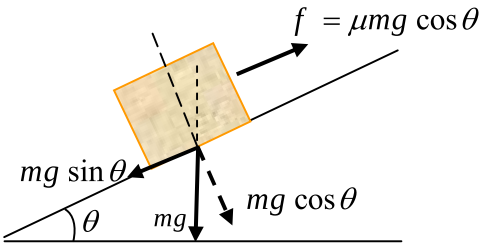
حل: باتوجه به شکل (۲۱-۳) داریم:

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad a = \ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad (۳-۵۲)$$

ضریب اصطکاک جنبشی را می‌توان با تجربه به دست آورد. در مثال بالا، جسم روی سطح شیب‌دار حرکت شتاب‌دار دارد. با کم‌کردن زاویه‌ی شیب، θ، می‌توان به وضعیتی دست یافت که حرکت شتاب‌دار قطعه به حرکت با سرعت ثابت تبدیل شود. فرض کنید به ازای $\theta = \varepsilon$، این وضعیت پدید آید. در آن صورت برآیند نیروهای وارد به جسم در امتداد سطح شیب‌دار باید صفر باشد؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$mg\sin\theta = \mu mg\cos\varepsilon \qquad (۳-۵۳)$$

$$\Rightarrow \mu = \tan\varepsilon \quad ; \quad \forall\theta = \varepsilon$$



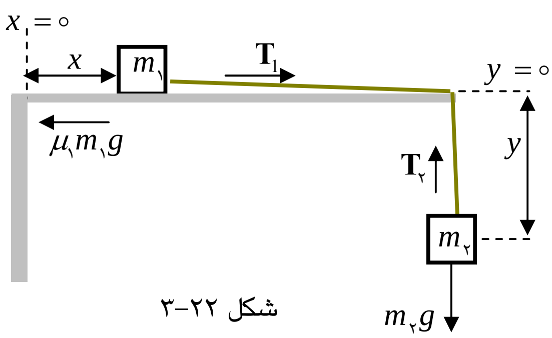
شکل ۲۱-۳

بنابراین، مثل زاویه‌ی اصطکاک ایستایی، می‌توانیم **زاویه‌ی اصطکاک جنبشی** را تعریف کنیم. درمثال بالا؛ شتاب را می‌توان برحسب زاویه‌ی اصطکاک جنبشی نوشت:

$$\ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = g\sec\varepsilon(\sin\theta\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\theta) = g\sec\varepsilon\sin(\theta - \varepsilon) \qquad (۳-۵۴)$$

نکته: قطعه‌ای را در نظر بگیرید که روی سطح افقی و ناهموار میزی می‌لغزد. برای این که قطعه با سرعت ثابت v_1 روی میز بلغزد، نیروی $\mathbf{F}_1$ لازم است (نیروی $\mathbf{F}_1$ به اصطکاک چیره می‌شود). اگر بخواهیم همین قطعه در روی همین سطح با سرعت ثابت $v_2 > v_1$ بلغزد باز همان نیروی $\mathbf{F}_1$ لازم است. البته باید نیروی $\mathbf{F} > \mathbf{F}_1$ در بازه‌ی زمانی dt به جسم اعمال شود تا سرعتش از v_1 به v_2 افزایش یابد. در این بازه‌ی زمانی، جسم شتابیده می‌شود. اما درست هنگامی که سرعت جسم به v_2 رسید نیرو به $\mathbf{F}_1$ کاهش پیدا می‌کند و شتاب دوباره صفر می‌شود.

مثال ۸-۳: جسمی به جرم m_1 مقید است که روی سطح ناهموار میزی حرکت کند. این جسم با ریسمان بدون جرمی به وزنه‌ی دیگری با جرم m_2 وصل است. جرم m_2 از لبه‌ی میز آویزان است. ریسمان فقط در لبه با میز در تماس است و میان ریسمان و لبه اصطکاک وجود دارد. این وضعیت در شکل (۲۲-۳) نشان داده شده است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم m_1 و سطح میز μ_1 و ضریب اصطکاک جنبشی میان لبه‌ی میز و ریسمان μ_2 باشند. شتاب های جرم‌های m_1 و m_2 را بیابید.

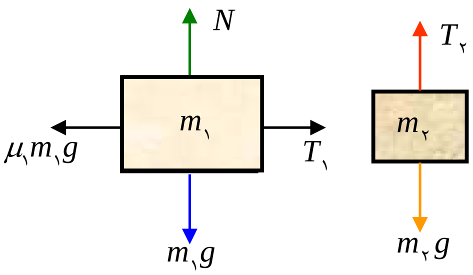


شکل ۲۲-۳

حل: در راستای حرکت، به جرم m_1 نیروی اصطکاک $\mu_1 m_1 g$ و کشش $\mathbf{T}_1$ (در امتداد بخشی از ریسمان که موازی سطح میز است) وارد می شود. نیروهای وارد به جرم m_2 در راستای حرکت آن عبارتند از نیروی کشش $\mathbf{T}_2$ در بخش عمودی ریسمان و نیروی وزن $m_2 g$. نمودار آزاد نیروها در شکل (۲۳-۳) نشان داده شده‌اند. مختصات x و y را چنان انتخاب کنید که جهت مثبت آنها در راستای حرکت باشند. معادله‌های حرکت را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$m_1\ddot{x} = T_1 - \mu_1 m_1 g \quad , \quad m_2\ddot{y} = m_2 g - T_2 \qquad (۳-۵۵)$$

چون ریسمان ناکشسان است، پس داریم $\ddot{y} = \ddot{x}$. فزون بر این، می‌توان



شکل ۲۳-۳

فرض کرد که زاویه‌ی تماس ریسمان با لبه‌ی میز $\pi/2$ است. چون شرایط این تماس ریسمان با لبه‌ی میز درست مانند حالت اصطکاک ایستایی (مثال-های ۵ و ٦) است، (البته ضریب اصطکاک متفاوت است) می‌توان از همان شیوه‌ی مثال‌های۵ و ٦ برای یافتن کشش های $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ استفاده کرد. روشن است که:

$$T_2 = T_1 e^{\mu_1 \pi/2} \qquad (۳-۵٦)$$

پس داریم:

$$m_2 \ddot{x} = m_2 g - T_1 e^{\mu_1 \pi/2} \quad , \quad m_1 \ddot{x} = T_1 - \mu_1 m_1 g \qquad (۳-۵۷)$$

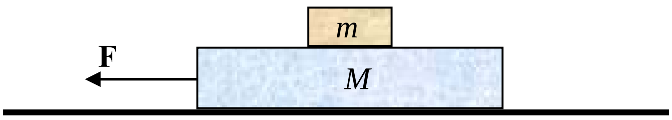
اگر بین این دو رابطه T_1 را حذف کنیم، به دست می‌آید

$$T_1 = m_1 \ddot{x} + \mu_1 m_1 g \qquad (۳-۵۸)$$

پس:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x} &= m_2 g - (m_1 \ddot{x} + \mu_1 m_1 g) e^{\mu_1 \pi/2} \\ &\Rightarrow \ddot{x}(m_2 + m_1 e^{\mu_1 \pi/2}) = m_2 g - \mu_1 m_1 g \, e^{\mu_1 \pi/2} \\ &\Rightarrow \ddot{x} = \frac{g(m_2 - \mu_1 m_1 e^{\mu_1 \pi/2})}{m_2 + m_1 e^{\mu_1 \pi/2}} \end{aligned} \qquad (۳-۵۹)$$

چون $\ddot{x}$ را یافتیم T_1 و T_2 از معادله‌های حرکت، رابطه‌ی (۳-۵۷) ، به دست می‌آیند.

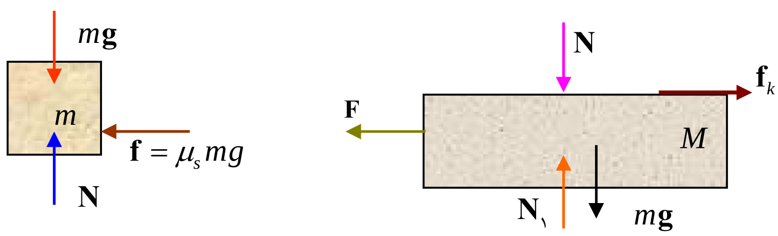


شکل ۳-۲٤

مثال ۳-۹ برابر شکل (۳-۲٤) ، جسمی به جرم $m = 20\ \text{kg}$ روی الواری به جرم $M = 10\ \text{kg}$ قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و الوار به ترتیب $\mu_S = 0{,}25$ و $\mu_K = 0{,}20$ است. اگر الوار با نیروی ثابت $F = 80\ \text{N}$ به سمت

چپ کشیده شود، شتاب جسم و الوار را نسبت به زمین به دست آورید. میان زمین و الوار اصطکاک وجود ندارد. $g = 10\ \text{m/s}^2$

حل: برای حل این گونه مسئله‌ها ، بهتر است نمودار آزاد نیروها را بکشید. در شکل (۳-۲۵) ، نمودار آزاد نیروها برای هر یک از دو جسم نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۵

به جسم m سه نیرو وارد می‌شود: نیروی وزن mg ، نیروی اصطکاک ایستایی $\mu_s mg$ و نیروی واکنش الوار $\mathbf{N}$. اگر جرم m در روی الوار در حال سکون باشد و نسبت به الوار حرکت نکند؛ آنگاه درآستانه‌ی لغزش می‌توان نوشت:

$$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg = (0.25)(20)(10) = 50\ \text{N}$$

$$f_{max} = ma_1 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{f_{max}}{m} = \frac{50\ \text{N}}{20\ \text{kg}} = 2.5\,m/s^2$$

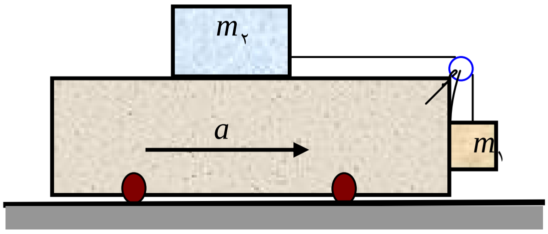
در این وضعیت که دو جسم نسبت به هم ساکن‌اند، شتاب جرم‌های m و M نسبت به زمین با هم برابرند یعنی $a_1 = a_2$. آیا نیروی $F = 50\ \text{N}$ که به الوار وارد می‌شود می‌تواند این وضعیت را برقرار کند؟ پاسخ این پرسش را می‌توان به صورت زیر یافت: به نمودار آزاد نیروهای وارد به الوار توجه کنید. می‌پرسیم برای اینکه الوار با شتاب $a_1 = a_2$ حرکت کند چه نیرویی باید به آن وارد شود؟ این نیرو را F_1 بنامید. بنا به قانون دوم نیوتن داریم: $F_1 - f_{max} = Ma_2 \;\Rightarrow\; F_1 - 50\ \text{N} = (10)(2.5) = 75\ \text{N}$ پس برای این که هر دو جسم با هم و با یک شتاب نسبت به زمین حرکت کنند و نسبت به هم ساکن باشند $F_1 = 75\text{N}$ لازم است. نیروی $F = 80\ \text{N}$ البته از $F = 75\ \text{N}$ بزرگتر است (F_1 بیشینه نیرویی است که به ازای آن دو جسم می‌توانند هم‌شتاب باشند)، پس، شتاب‌های a_1 و a_2 با هم برابر نیستند و دو جسم نسبت به هم حرکت خواهند کرد. این حرکت سبب می‌شود که نیروی اصطکاک بین دو جسم به مقدار $f_k = \mu_k N$ کاهش یابد. برای جسم m داریم:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg = (0.2)(20\text{kg})(10) = 40\text{N} \;\Rightarrow\; f_k = ma_1 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{40\text{N}}{20\text{kg}} = 2\,\text{m/s}^2 \qquad (۳-۶۰)$$

و برای جسم M

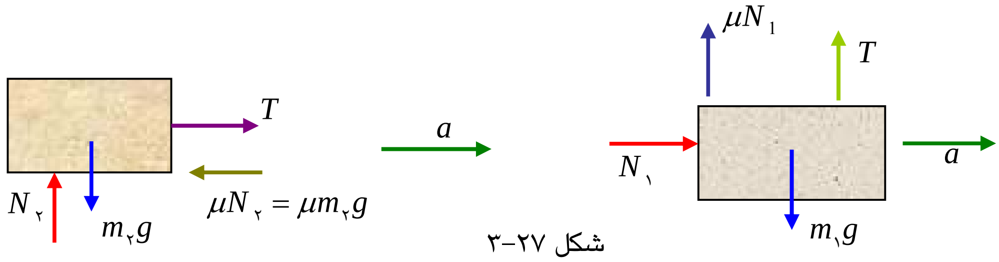
$$F - f_k = Ma_2 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{80\text{N} - 40\text{N}}{10\text{kg}} = 4\,\text{m/s}^2 \qquad (۳-۶۱)$$

مثال ۱۰-۳: برابر شکل (۳-۲۶)، ارابه با چه شتابی حرکت کند تا وزنه‌ی m_1 در آستانه‌ی لغزش رو به پایین قرار گیرد. ضریب اصطکاک میان وزنه‌ها و سطح‌های تماس را μ فرض کنید و از جرم و اصطکاک قرقره چشم‌پوشی کنید.



شکل ۳-۲۶

حل: نمودار آزاد نیروهای وارد به جسم های m_1 و m_2 در شکل (۳-۲۷) رسم شده اند. از این نمودارها و باتوجه به قانون نیوتن داریم:



شکل ۳-۲۷

$$m_2: \quad T - \mu m_2 g = m_2 a \qquad (۳-۶۲)$$

$$m_1: \quad T - m_1 g + \mu N_1 = 0 \quad , \quad N_1 = m_1 a \qquad (۳-۶۳)$$

$$\Rightarrow T - m_1 g + \mu m_1 a = 0 \qquad (۳-۶۴)$$

در نتیجه با حذف T از دو رابطه‌ی (۳-۶۲) و (۳-۶۴) خواهیم داشت.

$$a = \frac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_2 + \mu m_1} \qquad (۳-۶۵)$$

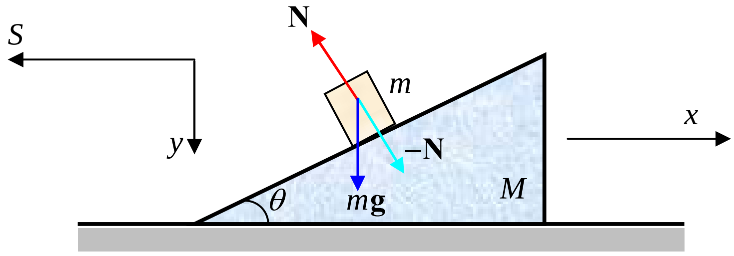
مثال ۱۱-۳: در شکل (۲۸-۳) گوه‌ای به جرم M وشیب θ نشان داده شده است که روی سطح افقی هموار قرار دارد. وزنه‌ی m می‌تواند روی این سطح شیب‌دار بلغزد. از همه‌ی اصطکاک ها چشم‌پوشی کنید و شتاب گوه را پیش از آنکه وزنه از گوه جدا شود حساب کنید.

حل: نیروی عمودی بین گوه و وزنه‌ی m را N بنامید. معادله‌های حرکت جرم m در راستای S و y عبارت اند از:

$$N\ \sin\theta = m\ddot{S}\ , \qquad mg - N\ \cos\theta = m\ddot{y} \tag{۳-۶۶}$$

و برای گوه در راستای x داریم:

$$-N\ \sin\theta = M\ddot{x} = -m\ddot{S} \quad \Rightarrow \quad \ddot{S} = -\frac{M}{m}\ddot{x} \tag{۳-۶۷}$$



شکل ۲۸-۳

معادله‌ای که قید باقی ماندن جرم m روی سطح شیب‌دار را تعریف می‌کند عبارت است از:

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{S}-\ddot{x}} = \tan\theta \tag{۳-۶۸}$$

چون جرم m با لغزش در روی گوه، نسبت به زمین به اندازه‌ی S به سمت چپ جابه‌جا می‌شود و در اثر حرکتش به همراه گوه، به اندازه‌ی x به سوی راست جابه‌جا می‌شود. بنابراین ، جابه‌جایی افقی کل آن $S - x$ است. در مدتی که این جابه‌جایی افقی صورت می گیرد، جرم m به اندازه‌ی y هم جابه‌جایی عمودی دارد. برای این که جرم m در طول این دو جابه‌جایی افقی و عمودی همواره در روی سطح گوه باقی بماند باید داشته باشیم: $\tan\theta = y/(S-x)$. مشتق‌گیری از این رابطه به معادله‌ی قیدی (۶۸-۳) می‌انجامد. اگر از دو رابطه‌های (۶۶-۳) نخست N را حذف کنیم و از رابطه‌ی (۶۷-۳) به جای $\ddot{S}$ قراردهیم $\ddot{S} = -(M/m)\ddot{x}$، خواهیم داشت

$$m\ddot{y} = mg + M\ cot\theta\ddot{x} \tag{۳-۶۹}$$

با حذف $\ddot{S}$ بین رابطه‌های (۶۷-۳) و (۶۸-۳) خواهیم داشت

$$\ddot{y} = (\ddot{S}-\ddot{x})\tan\theta \ \Rightarrow \ddot{y} = \left(-\frac{M}{m}\ddot{x}-\ddot{x}\right)\tan\theta$$

$$\Rightarrow -\ddot{y}\ \cot\theta = \left(\frac{M}{m}+1\right)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{-\ddot{y}\ \cot\theta}{1+M/m} \tag{۳-۷۰}$$

و سرانجام اگر $\ddot{y}$ را بین دو رابطه‌ی (۶۹-۳) و(۷۰-۳) حذف کنیم به دست می‌آید

$$\ddot{x} = \frac{-mg\ \cot\theta}{(M+m)+M\ \cot^2\theta} \tag{۳-۷۱}$$

۳-۱۱ نگاهی ژرف به قانون های نیوتون ، بازخوانی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$

در بخش‌های پیش کوشیدیم برخی نیروها را بشناسانیم و با مثال‌هایی اهمیت نمودار آزاد نیروها را یاد آوری کنیم. نمودار آزاد نیروها ابزار سودمندی برای حل مسئله اند. عادت کردن به آن و یاد گیری استفاده از نمودار آزاد نیروها کمک می‌کند تا فیزیک مسئله را روشن‌تر ببینیم.

قانون‌های نیوتون را آموختیم و برخی کاربردهای آن‌ها را دیدیم. اینک به جاست که نگاهی فراتر و ژرف به قانون‌های نیوتون بیندازیم و اندرونه‌های این قانون‌ها را دریابیم. شاید بازگویی قانون‌های نیوتون برای شما خسته کننده باشد. با وجود این، یک بار دیگر هم آن‌ها را بازگو می‌کنم و سپس به اندرونه‌ی آن‌ها می‌پردازم.

۳-۱۱-۱ قانون های نیوتون و اندرونه‌ی آنها

نیوتون در سال ۱٦۸۷ در کتاب *Principia Mathematica* سه قانون خود را منتشر کرد. این که کدام بخش این قانون‌ها تعریف‌اند و کدام بخش از اندرونه‌ی فیزیکی برخوردار است موضوعی است که اندیشمندان بسیاری به آن پرداخته اند. این قانون‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

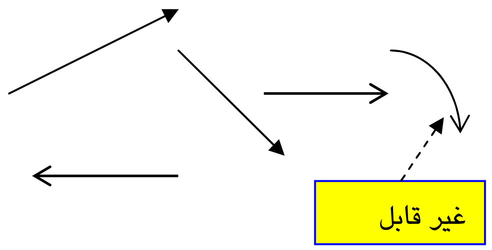
قانون نخست: هر جسمی با سرعت ثابت حرکت می‌کند مگر آنکه به آن نیرو وارد شود.

قانون دوم: آهنگ تغییر تکانه‌ی هر جسم با نیرویی که به آن جسم وارد می‌شود، برابر است.

قانون سوم: به ازای هر نیرویی که به یک جسم وارد می‌شود، نیرویی مساوی و در خلاف جهت به جسم دیگری وارد می‌شود.

می‌توان در باره‌ی این که آیا گزاره‌های بالا قانون‌های فیزیکی‌اند یا تعریف، روزها بحث کرد. دیگران این بحث‌ها را کرده اند. برای نمونه، سرآرتور ادینگتون در اظهارنظری ناخوشایند در باره‌ی قانون نخست نیوتون گفت: قانون اول اساسا می‌گوید" هر ذره‌ای حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را در راستای خط راست حفظ می‌کند مگر آن که این کار را نکند" . با وجود این، شاید در نگاه نخست این سه قانون خالی از محتوا به نظر آیند، اما اندرونه‌ی این قانون‌ها بیش از آن است که از گفتار ادینگتون برمی‌آید. در این جا می‌خواهم به اندرونه‌ی فیزیکی این قانون‌ها بپردازم.

اندرونه ی قانون نخست: در این قانون تعریف نیروی صفر داده شده است. افزون بر این، کار دیگری که این قانون می‌کند، تعریف چارچوب لخت است. چارچوب لخت چارچوبی است که قانون نخست نیوتون در آن برقرار است. چون در قانون نخست واژه‌ی" سرعت" به کار رفته است، باید مشخص کنیم که این سرعت نسبت به کدام چارچوب اندازه‌گیری می شود. قانون اول در هر چارچوب دلخواهی برقرار نیست. برای نمونه، در چارچوب صفحه‌ی چرخان برقرار نیست (در این گونه چارچوب ها باید نیروهای پنداری – مجازی- را وارد کرد تا بتوان از قانون‌های نیوتون استفاده کرد.) به طور شهودی، چارچوبی لخت است که با سرعت ثابت حرکت کند. اما این تعریف ابهام دارد، چون باید بگوییم حرکتِ با سرعت ثابت *نسبت به کدام چارچوب* انجام می‌گیرد. اگر از این ابهام بگذریم چارچوب لخت، تعریف چارچوب خاصی است که قانون نخست نیوتون در آن برقرار است. بنابراین، می‌بینیم که تعریف‌های "نیرو" و"چارچوب لخت" درهم تنیده اند. در این جا اندرونه‌ی فیزیکی چندانی دیده نمی‌شود.نکته‌ی مهم اما این است که این قانون در باره‌ی **همه‌ی** ذره‌ها درست است. پس، اگر ذره‌ای در چارچوبی با سرعت ثابت حرکت کند، آنگاه **همه‌ی** ذره‌ها در آن چارچوب با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. این گزاره پرمحتواست: نمی‌توانیم مشتی ذره‌ی آزاد داشته باشیم که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند و مشتی ذره‌ی آزاد دیگر که حرکتشان با پیچ و تاب است و یا در مسیری خمیده مانند شکل (۲۹-۳) حرکت کنند.



شکل ۲۹-۳

اندرونه ی قانون دوم: تکانه با $m\mathbf{v}$ تعریف می‌شود (در اینجا همه چیز را غیرنسبیتی در نظر می‌گیریم) اگر m ثابت باشد (در این درس جرم را ثابت فرض می‌کنیم اما تمرین‌های زیادی با جرم متغیر هم خواهیم داشت) آنگاه قانون دوم می گوید

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (۳-۷۲)$$

که در آن $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ است. این قانون فقط در چارچوب لخت درست است که با قانون نخست تعریف می‌شود. شاید فکر کنید که قانون دوم فقط نیرو را تعریف می‌کند. اما، اندرونه‌ی آن فراتر از این است. در این قانون موضوع ناگفته‌ای نهفته است. این "نیرو" چیزی است که موجودیتش کاملا به جرم" m " ذره که در قانون ظاهر می‌شود، بستگی ندارد (در قانون سوم در این باره بیشتر خواهیم گفت). برای نمونه، نیروی فنر هرگز به جرم ذره‌ای که به آن وصل است، بستگی ندارد. تنها بخشی از نیروی گرانش، $GMm/r^{۲}$، به جرم جسمی که تحت تاثیر قرار می‌گیرد بستگی دارد و بخش دیگر آن به چیز دیگری (جرم دیگری) وابسته است.

اگر دوست دارید تعریف بسازید می‌توانید کمیت تازه‌ای مانند $\mathbf{G} = m^2\mathbf{a}$ تعریف کنید. آزادید این کار را بکنید اما یک چنین تعریفی بیهوده است. می‌توانید آن را برای هر ذره‌ای در عالم و برای هر شتابی تعریف کنید. نکته‌ی کلیدی این است که این تعریف‌ها هیچ ربطی به یکدیگر ندارند. در عالم هیچ کمیتی (غیر اختراعی- غیرمن درآوردی) وجود ندارد که اگر به جرم-های m و $۲m$ اثر کند نسبت شتاب های آن ها ٤ به ١ باشد.

اصلی‌ترین چیزی که قانون دوم می‌گوید این است که در حقیقت کمیتی مانند $\mathbf{F}$ وجود دارد که اگر به ذره‌های متفاوت اثر کند همان $m\mathbf{a}$ را تولید می‌کند. ادعای وجود یک چنین کمیتی بسیار فراتر از تعریف است.

در همین راستا، توجه کنید که قانون دوم نیوتون می‌گوید $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و نه چیزی مانند $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$ یا $\mathbf{F} = m\,d^3\mathbf{x}/dt^3$. این‌ها با دنیای واقعی سازگار نیستند. افزون بر این، آنها با قانون نخست نیوتون هم ناسازگارند. $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$ می‌گوید برای سرعت غیر صفر نیرو نیاز است و این با قانون نخست در تناقض است. $\mathbf{F} = m\,d^3\mathbf{x}/dt^3$ می‌گوید ذره با شتاب ثابت (به جای سرعت ثابت) حرکت می‌کند مگر آنکه به آن نیرو وارد شود. این هم با قانون نخست تناقض دارد.

مانند قانون نخست، قانون دوم هم برای **همه‌ی** ذره ها درست است. به بیان دیگر، اگر نیرویی (مثل فنری که به اندازه‌ی معین کشیده شده باشد) به دو ذره‌ی با جرم های $m_۱$ و $m_۲$ اثر کند، آنگاه رابطه‌ی (۷۲-۳) می‌گوید شتاب ذره‌ها با رابطه‌ی زیر به هم مربوط اند.

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{m_۲}{m_۱} \qquad (۳-۷۳)$$

جدا از این که نیروی مشترک (همان نیرو) وارد به این دو جسم چیست، این رابطه برقرار است. بنابراین، اگر یک بار از نیرویی برای یافتن جرم نسبی دو جسم استفاده کردیم، می‌دانیم که اگر جرم‌ها تحت تاثیر هر نیروی دیگری هم قرار گیرند، نسبت $\mathbf{a}$ ها چه خواهد بود. البته ما هنوز جرم را تعریف نکرده‌ایم. اما رابطه‌ی (۷۳-۳) روشی تجربی برای تعیین جرم هر جسمی را نسبت به یک جرم استاندارد به دست می‌دهد که هر دو جسم تحت اثر همان نیروواند.

توجه کنید که $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ یک رابطه‌ی برداری است و بنابراین، در چارچوب کارتزی سه معادله‌ی $F_x = ma_x$ ، $F_y = ma_y$ و $F_z = ma_z$ را یک جا و در یک رابطه بیان می‌کند.

اندرونه ی قانون سوم: این قانون می‌گوید اگر دو ذره‌ی منزوی داشته باشیم که به وسیله‌ی نیرویی با هم برهم‌کنش می‌کنند، آنگاه شتاب دو ذره در خلاف جهت یکدیگر است و با جرمشان به طور وارون متناسب است. بیان هم‌ارز این است که بگوییم این قانون بیان پایستگی (یعنی مستقل از زمان بودن) تکانه کل سامانه‌ی منزوی است. برای این که این پایستگی تکانه را ببینیم، دو ذره را در نظر بگیرید که هر یک فقط با ذره‌ی دیگر برهم‌کنش می‌کند و نه با چیز دیگری در عالم. در این صورت داریم

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d\,(m_۱\mathbf{v}_۱+m_۲\mathbf{v}_۲)}{dt}=m_۱\mathbf{a}_۱+m_۲\mathbf{a}_۲=\mathbf{F}_۱+\mathbf{F}_۲ \qquad (۳-۷٤)$$

$\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ نیروهایی اند که به ترتیب به ذره‌ی $m_۱$ و ذره‌ی $m_۲$ وارد می‌شوند. این نمایش پایستگی تکانه (یعنی $d\,\mathbf{p}/dt=0$) است. و با قانون سوم (یعنی $\mathbf{F}_۱=-\mathbf{F}_۲$) همارز است.

قانون سوم نیوتون چیزی را تعریف نمی‌کند و در نتیجه، یک مفهوم خالص است. به هر حال نمی‌تواند هم تعریف باشد، چون همیشه درست نیست. تنها در باره‌ی نیروهای از نوع "هل دادن " یا "کشش" درست است. برای نمونه، در مورد نیروی مغناطیسی درست نیست (در آنجا میدان الکترومغناطیسی هم تکانه دارد و بنابراین، تکانه‌ی کل ذره ها و میدان پایسته است.) ما در این جا با میدان‌ها سرو کار نخواهیم داشت؛ تنها به ذره‌ها خواهیم پرداخت. در نتیجه، برای وضعیت‌هایی که در نظر خواهیم گرفت، قانون سوم همواره برقرار است.

در قانون سوم آگاهی بسیار مهمی نهفته است. قانون سوم می‌گوید هرگز نمی‌توان ذره‌ای یافت که شتابیده شود مگر آنکه ذرّة دیگری در جایی دیگر شتابیده شود. ذره‌ی دوم شاید در جایی دوردست باشد، مانند سامانه‌ی زمین- خورشید، اما همیشه در جایی وجود دارد. توجه کنید که اگر فقط قانون دوم را داشتیم، آنگاه بدون این که اتفاق دیگری در عالم رخ دهد، امکان این که ذره‌ای به خودی خود شتابیده شود وجود می‌داشت. فقط کافی است شتاب ذره‌ی دیگری با دو برابر جرم، در همان مکان نصف شتاب ذره‌ی اول باشد تا همه چیز با قانون دوم سازگار شود. در این صورت می‌توان گفت که نیرویی با اندازه‌ی معین در آن مکان به هر جسمی اعمال می‌شود و همه چیز با هم سازگار می‌شد. اما قانون سوم می‌گوید رفتار عالم (دستکم عالمی که ما در آنیم) این گونه نیست. به بیان دیگر، نیروی بدون همزاد افسانه است؛ حال آن که نیروی همراه با همزادی برابر و در خلاف جهت، سرشت "علت و معلولی" دارد و به نظر فیزیکی‌تر می‌آید.

سرانجام این که نباید به قانون‌های نیوتون بیش از حد پیرایه ببندیم. چون، اگر چه آنها دستاوردهای هوشمندانه‌ی برجسته‌اند و به زیبایی از پسِ توصیف فیزیک فرایندهای هر روزه‌ی برمی‌آیند، با این وجود، قانون‌های نظریه‌ای تقریبی‌اند. فیزیک نیوتون حالت حدی نظریه‌های درست‌تر نسبیتی و مکانیک کوانتومی است و این نظریه‌ها هم به نوبه‌ی خود حالت‌های حدی نظریه‌های درست‌تردیگری اند. برهم‌کنش ذرات (یا موج‌ها، ریسمان‌ها و یا هر نامی که به آن‌ها بدهید) در سطحی بنیادی‌تر هیچ شباهتی به آن چه که ما آن را نیرو می‌نامیم، ندارند.

۳-۱۱-۲ به کار بردن قانون های نیوتون: نمودار جسم آزاد

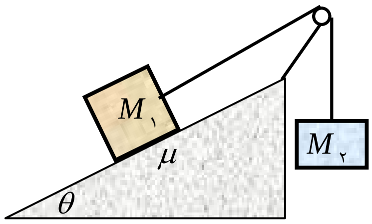
قانون دوم نیوتون ما را برای انجام محاسبه توانمند می‌کند و اجازه می‌دهد که با زبان عدد سخن بگوییم. برای هر نیروی داده شده‌ای می‌توان $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را به کار برد و شتاب ذره را به دست آورد. با دانستن شتاب، و به شرطی که مکان و سرعت اولیه داده شوند، می‌توان رفتار جسم (یعنی در چه مکانی قرار دارد و سرعتش چیست) را تعیین کرد. این فرایند گاهی نیازمند مقداری کار است. اما دو وضعیت پایه‌ای و عمومی وجود دارد که همواره روی می‌دهد:

- در بسیاری از مسئله‌ها، یک وضعیت فیزیکی (برای نمونه: قطعه‌ای که روی یک سطح ساکن است، یا جرم‌هایی که به ریسمان‌ها وصل‌اند، و غیره) داده می‌شود و وظیفه‌ی ما این است که از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کنیم و نیروهایی را که به جسم وارد می‌شوند، پیدا کنیم. معمولا نیروها در جهت‌های مختلف به جسم وارد می‌شوند وبه سادگی می‌توان پی- گیری آنها را گم کرد. از این رو سودمند است که جسم‌ها را منزوی کنیم و همه‌ی نیروهای وارد به هر کدام از آنها را رسم کنیم. موضوع این بخش همین است.
- در مسئله‌های دیگر، نیرو به صورت تابع صریحی از زمان، مکان، ویا سرعت داده می‌شود و کار ما به حل ریاضی معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}\equiv m\ddot{\mathbf{x}}$ (در این جا فقط یک بعد را در نظر می‌گیریم) تبدیل می‌شود. حل دقیق (یا به بیانی درست‌تر،

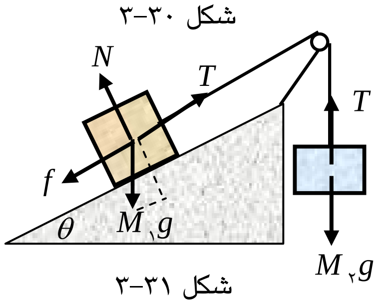
حل تحلیلی) این معادله‌ی دیفرانسیل ممکن است دشوار (یا نشدنی) باشد. در این باره در جای خود سخن خواهیم گفت.

اینک حالت عمومی اول را بررسی می‌کنیم که یک وضعیت فیزیکی داده شده است و می‌خواهیم همه‌ی نیروها را بیابیم. از واژه-ی **نمودار آزاد نیروها** برای نشان دادن همه‌ی نیروهای وارد به یک جسم استفاده می‌شود. با رسم کردن یک چنین نموداری برای هر جسم موجود در سامانه، می‌توان همه‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ های مربوط را نوشت. حاصل، تعدادی معادله برحسب نیروهای ناشناخته و شتاب‌ها خواهد شد که می‌توان آنها را حل کرد. فهمیدن این فرایند با مثالی ساده‌تر می‌شود. در بخش‌های نخستین این فصل نمونه‌هایی را دیدید. اینک نمونه‌هایی بیشتر.

مثال ۱۲- ۳ (یک سطح و دو جسم): جرم M_1 روی سطح شیب‌داری با شیب θ نگه داشته شده است. جرم M_2 از کنارسطح برابر شکل (۳۰- ۳) آویزان است. جرم‌ها با ریسمان بی‌جرم که از روی قرقره‌ی بدون جرم می‌گذرد به هم وصل اند. ضریب اصطکاک جنبشی بین M_1 وسطح μ است. جرم M_1 را رها می‌کنیم. فرض کنید M_2 به اندازه‌ای بزرگ است که جرم M_1 به بالا کشیده می‌شود. شتاب جرم ها چیست و کشش در ریسمان چقدر است؟



شکل ۳۰-۳



شکل ۳۱-۳

حل: نخستین کاری که باید کرد رسم همه‌ی نیروهایی است که به دو جرم وارد می‌شوند. شکل (۳۱- ۳) این نیروها را نشان می‌دهد. نیروی‌های وارد به M_2 گرانش و کشش ریسمان اند. نیروهای وارد به M_1 عبارتند از گرانش، اصطکاک، کشش ریسمان و نیروی قائم. توجه کنید که نیروی اصطکاک رو به پایین سطح است، چون فرض کردیم M_1 رو به بالا حرکت می‌کند. حالا که همه‌ی نیروها را رسم کردیم، اینک باید همه‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ ها را بنویسیم. وقتی با M_1 سرو کار داریم، می‌توانیم نیروها را به افقی و عمودی تجزیه کنیم. اما استفاده از مولفه‌های نیروها در راستای سطح و عمود بر سطح از روشنگری بیشتری برخوردار است. (در مسئله‌های با سطح شیب‌دار یکی از این دو دستگاه مختصات بهتر از دیگری است. گاهی خیلی روشن نیست که کدام بهتر است. اما اگر در یکی از این گزینه‌ها مسئله پیچیده‌تر شد، همواره می‌توان از دیگری استفاده کرد.) از این دو مولفه به همراه معادله‌ی عمودی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T-f-M_1 g\sin\theta &= M_1 a \\ N-M_1 g\cos\theta &= 0 \\ M_2 g-T &= M_2 a \end{aligned} \qquad (۳-۷۵)$$

در این جا، از این واقعیت استفاده شده است که هر دو جرم با یک آهنگ شتابیده می‌شوند و جهت مثبت را برای M_2 رو به پایین تعریف کردیم. همچنین فرض کردیم که کشش در هر دو انتهای ریسمان یکسان است؛ چون درغیر این صورت نیروی خالصی در جایی به ریسمان وارد می‌شود و سبب می‌شود ریسمان با شتاب بینهایت (زیرا ریسمان بدون جرم است) حرکت کند. در معادله‌های (۷۵-۳) چهار ناشناخته وجود دارند که عبارتند از T، a ، N و f . اما تنها سه معادله داریم. خوشبختانه معادله‌ی چهارمی هم وجود دارد: $f=\mu N$ ؛ چون فرض می‌کنیم که جرم M_1 حرکت می‌کند و بنابراین می‌توانیم از توصیف اصطکاک جنبشی استفاده کنیم. از معادله‌ی دوم رابطه‌ی (۷۵-۳) داریم $f=\mu N=\mu M_1 g\cos\theta$ و بنابراین، معادله‌ی نخست به صورت $T-\mu M_1 g\cos\theta-M_1 g\sin\theta=M_1 a$ درمی‌آید. اگر این را با معادله‌ی سوم رابطه‌ی (۷۵-۳) جمع کنیم تنها $\mathbf{a}$ باقی می‌ماند . پس داریم

$$\Rightarrow \quad T = \frac{M_۱ M_۲ g\,(۱+\mu\cos\theta+\sin\theta)}{M_۱+M_۲}$$

$$a = \frac{g\,(M_۲-\mu M_۱\cos\theta - M_۱\sin\theta)}{M_۱+M_۲} \qquad (۳-۷۶)$$

توجه کنید که برای حرکت رو به بالای جرم $M_۱$ (یعنی $a>۰$) باید $M_۲ > M_۱(\mu\cos\theta+\sin\theta)$ باشد که با نگاه کردن به نیروها در راستای سطح آشکار است.

نکته: اگر فرض می‌کردیم که $M_۱$ به اندازه‌ی کافی سنگین و در نتیجه رو به پایین سطح حرکت می‌کند، آنگاه نیروی اصطکاک رو به بالا می‌شد و به دست می‌آوردیم

$$a = \frac{g\,(M_۲+\mu M_۱\cos\theta - M_۱\sin\theta)}{M_۱+M_۲} \quad \text{و} \quad T = \frac{M_۱ M_۲ g}{M_۱+M_۲}(۱-\mu\cos\theta+\sin\theta) \qquad (۳-۷۷)$$

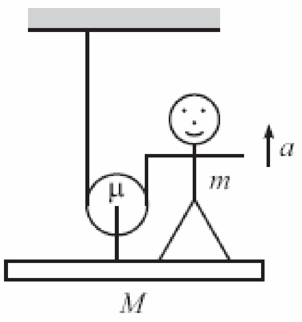
برای این که $M_۱$ رو به پایین حرکت کند (یعنی $a<۰$) باید داشته باشیم $M_۲ < M_۱(\sin\theta-\mu\cos\theta)$. بنابراین، برای این که سامانه حرکت نکند، بازه‌ی مقادیر $M_۲$ عبارت است از

$$M_1(\sin\theta-\mu\cos\theta) < M_2 < M_1(\sin\theta+\mu\cos\theta) \qquad (۳-۷۸)$$

اگر μ خیلی کوچک باشد $M_۲$ باید اساسا برابر $M_۱\sin\theta$ باشد تا سامانه حرکت نکند. اگر $\tan\theta \le \mu$ باشد، حتی با $M_۲=۰$ هم $M_۱$ به پایین سُر نخواهد خورد. ♣

در مسئله‌های از گونه‌ی بالا روشن است که چه چیزی را به عنوان جسم باید برگزینیم و نیروها را برایش رسم کنیم. اما در مسئله‌های دیگر که زیرسامانه‌های مختلف دارند، باید هوشیار بود که همه‌ی نیروهای مربوط به یک زیرسامانه را در نظر گرفت. کدام زیرسامانه را برگزینیم بستگی به این دارد که چه کمیتی را می‌خواهیم پیدا کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال۱۳-۳ (صفحه و قرقره): شخصی برابر شکل (۳۲-۳) بر روی سامانه‌ی صفحه و قرقره ایستاده است. جرم صفحه، شخص و قرقره به ترتیب عبارتند از M ، m و μ. ریسمان بدون جرم است. شخص انتهای ریسمان را به بالا می‌کشد تا به خودش شتاب رو به بالای a بدهد (فرض کنید صفحه مقید است که همواره افقی بماند- شاید با قرار دادن دو انتهای آن روی دو ریل عمودی). کشش ریسمان، نیروی قائم بین صفحه و شخص و نیز کشش در میله‌ای که قرقره را به صفحه وصل می کند چقدرند؟



شکل ۳۲-۳

حل: برای یافتن کشش ریسمان، زیرسامانه را تمامی سامانه، به‌جز سقف، در نظر می‌گیریم . اگر بپنداریم که سامانه را در جعبه‌ی سیاهی قرار داده‌ایم (برای این که تاکید کنیم نیروهای داخلی سامانه مهم نیستند) آنگاه می‌بینیم نیروهایی که از جعبه‌ی سیاه "نشت" می‌کنند عبارتند از سه وزن (Mg، mg و μg) که همگی رو به پایین‌اند و کشش T که رو به بالاست. با استفاده از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ برای تمامی سامانه به دست می‌آید:

$$T-(M+m+\mu)g = (M+m+\mu)a \qquad (۳-۷۸)$$

$$\Rightarrow \quad T = (M+m+\mu)(g+a)$$

برای یافتن نیروی قائم، N ، بین شخص و صفحه و نیز نیروی کشش f ، درمیله‌ای که صفحه را به قرقره وصل می‌کند، در نظر گرفتن تمامی سامانه کافی نیست. زیرا، برای این سامانه ، نیروهای بالا، نیروهای

داخلی به حساب می‌آیند و بنابراین در هیچ معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ (که تنها شامل نیروهای خارجی نسبت به سامانه است) ظاهر نمی‌شوند. بنابراین باید زیرسامانه‌هایی دیگری را در نظر بگیریم:

- نخست $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را برای شخص به کار ببرید. نیروهایی که به شخص وارد می‌شوند عبارتند از گرانش، نیروی قائم از سوی صفحه و کشش از سوی ریسمان (که دست شخص را به پایین می‌کشد). پس داریم

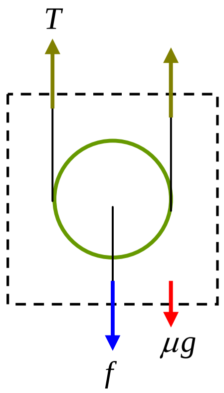
$$N-T-mg=ma \tag{۳-۷۹}$$

- حالا $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را برای صفحه به کار ببرید. نیروهای وارد به صفحه عبارتند از گرانش، نیروی عمودی که از سوی شخص به صفحه وارد می‌شود و نیروی رو به بالا که میله به صفحه وارد می‌کند. پس داریم

$$f-N-Mg=Ma \tag{۳-۸۰}$$

- اینک $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را برای قرقره به کار ببرید. نیروهای وارد به قرقره عبارتند از گرانش، نیروی رو به پایین از سوی میله

و **دو برابر** کشش ریسمان (چون ریسمان قرقره را از هر دو طرف به بالا می‌کشد. شکل (۳-۳۳)) . پس داریم



شکل ۳-۳۳

$$2T-f-\mu g=\mu a \tag{۳-۸۱}$$

توجه کنید که اگر این سه معادله را با هم جمع کنیم معادله‌ی (۳-۷۸) به دست می‌آید. باید هم این چنین باشد، چون تمامی سامانه جمع این سه زیرسامانه هاست. معادله‌های (۳-۷۹) تا (۳-۸۱) سه معادله با سه مجهول N, T و f اند. جمع آنها مقدار T را همانند معادله‌ی (۳-۲۸) به دست می‌دهد. از رابطه‌های (۳-۷۹) و (۳-۸۱) به ترتیب خواهیم داشت

$$\begin{aligned} N&=(M+2m+\mu)(g+a)\\ f&=(2M+2m+\mu)(g+a) \end{aligned} \tag{۳-۸۲}$$

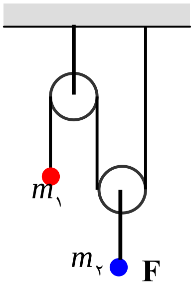
نکته: این نتیجه‌ها را با زیرسامانه‌های متفاوت از آنچه که در بالا در نظر گرفتیم هم می‌شد به دست آورد. برای نمونه، می‌شد زیرسامانه‌ی قرقره بعلاوه‌ی صفحه را در نظر گرفت و یا زیرسامانه‌ی دیگری را. هر گونه که بخواهید سامانه را به زیرسامانه ها تقسیم کنید باید بتوانید سه معادله‌ی مستقل $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ بنویسید تا بتوانید آن ها را حل کنید و N, T و f را به دست آورید.

در مسئله‌های از این دست برخی نیروها به سادگی فراموش می‌شوند، مانند T دوم در رابطه‌ی (۳-۸۱). مطمئن‌ترین کار این است که هر زیرسامانه‌ای را منزوی کنید و دور آن چارچوبی بکشید. مانند چارچوب نقطه‌چین در شکل (۳-۳۳) و سپس همه‌ی نیروهای" نشتی" از این چارچوب را رسم کنید. به بیان دیگر نمودار آزاد نیرو ها را بکشید. ♣

دسته ی دیگری از مسئله‌های شبیه مسئله‌ی بالا، **ماشین های آتوود** است. ماشین آتوود نامی است برای سامانه‌ای که از مجموعه‌ی جرم‌ها، ریسمان‌ها و قرقره‌ها تشکیل شده باشد. در حالت عمومی ریسمان‌ها و قرقره‌ها جرم دارند. در این فصل ما تنها به حالتی خواهیم پرداخت که قرقره‌ها بی جرم‌اند. من در این جا یک مثال را حل خواهم کرد و آرایه‌های پیچیده‌تر و عجیب-تر را به مسئله‌ها و به پیوست واگذار خواهم کرد. در پیوست این فصل، حل عمومی ماشین آتوود را با چند مثال خواهم آورد. همان‌گونه که خواهید دید، برای حل مسئله‌ی آتوود دو گام وجود دارد: (۱) همه‌ی معادله‌های $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را بنویسید و (۲) شتاب جرم ها را با توجه به این که طول ریسمان (ها) تغییر نمی‌کند (این واقعیت را ما "پایستگی طول ریسمان" خواهیم نامید.) به

هم دیگر مربوط کنید.

مثال۱۴-۳ (ماشین آتوود): سامانه‌ی قرقره‌های شکل (۳۴-۳) و جرم‌های m_1 و m_2 را در نظر بگیرید. ریسمان و قرقره ها جرم ندارند. شتاب جرم‌ها چیست و کشش ریسمان چقدر است؟



شکل ۳۴-۳

حل: نخستین چیزی را که باید به آن توجه کرد این است که کشش T در همه جای ریسمان بدون جرم یکسان است. زیرا در غیر این صورت در بخشی از ریسمان می بایست شتاب بینهایت باشد. پس، نتیجه می شود که در ریسمان کوتاهی که به m_2 وصل است، کشش برابر $2T$ است. چون باید نیروی خالص وارد به قرقره‌ی سمت راست صفر باشد و گرنه شتاب آن بینهایت می‌شود. بنابراین، معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ برای دو جرم عبارت اند از

$$T-m_1g=m_1a_1 \qquad , \qquad 2T-m_2g=m_2a_2 \qquad (۸۳-۳)$$

حالا دو معادله داریم با سه مجهول a_1 ، a_2 و T . پس به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز داریم. این را از "پایستگی طول" به دست می‌آوریم که شتاب‌های a_1 ، a_2 را به هم مربوط می‌کند. اگر تصور کنید که m_2 و قرقره‌ی سمت راست را به اندازه‌ی d بالا ببرید، آنگاه به اندازه‌ی $2d$ از طول ریسمان بالای قرقره‌ی سمت راست ناپدید می‌شود. این مقدار طول ریسمان باید در جای دیگری ظاهر شود. در نتیجه در آن بخش از ریسمان که در تماس با m_1 است پدیدار می‌شود. پس، m_1 به اندازه‌ی $2d$ پایین می‌رود. به بیان دیگر، $y_1=-2y_2$ ، (که در آن y_1 و y_2 جابه‌جایی جرمها از مکان‌های اولیه‌ی است.) با دو بار مشتق گیری از این رابطه ، نتیجه‌ی دلخواه ما که رابطه‌ای میان a_1 ، a_2 است به دست می‌آید

$$a_1=-2a_2 \qquad (۸۴-۳)$$

از ترکیب رابطه‌های (۸۳-۳) و (۸۴-۳) پاسخ های a_1 ، a_2 و T به دست می‌آیند.

$$a_1=g\frac{2m_2-4m_1}{4m_1+m_2}, \qquad a_2=\frac{2m_1-m_2}{4m_1+m_2}, \qquad T=\frac{3m_1m_2g}{4m_1+m_2} \qquad (۸۵-۳)$$

نکته: در این جا حالت‌های خاص و حدی وجود دارند که می‌توان آنها را آزمود. از جمله: (۱) اگر $m_2=2m_1$ باشد، از رابطه-های (۸۵-۳) داریم $a_1=a_2=0$ و $T=m_1g$. همه چیز در حال سکون‌اند.

(۲) اگر $m_2\gg m_1$ باشد آنگاه رابطه‌ی (۸۵-۳) می‌گوید $a_2=-g$ و $a_1=2g$ و $T=3m_1g$. در این صورت m_2 سقوط آزاد می‌کند در حالی که m_1 با شتاب $2g$ به بالا می‌رود و T درست به اندازه‌ای است که نیروی وارد به m_1 را برابر $m_1(2g)$ بکند؛ چون $T-m_1g=3m_1g-m_1g=m_1(2g)$. حالت $m_1\gg m_2$ را شما بیازمایید. ♣

۱۱-۳ $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ یا $\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ، کدام یک؟

در مکانیک غیر نسبیتی وقتی m ثابت است، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ هر دو یک چیز را بیان می‌کنند. اما اگر m ثابت نباشد، $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=m\mathbf{a}+\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$ دیگر با $m\mathbf{a}$ برابر نیست. در چنین وضعیت هایی آیا باید از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده شود یا از $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ ؟ کدام یک فیزیک مسئله را درست توصیف می‌کند؟ پاسخ این پرسش بستگی به این دارد که چه چیزی را "سامانه" می‌نامید و کمیت های m و $\mathbf{p}$ و $\mathbf{a}$ را به آن نسبت می‌دهید. بیشتر مسئله‌ها را می‌توان با استفاده از هر دوی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ حل کرد؛ اما باید در گزینش اجزاء سامانه هشیار بود و دانست که چگونه باید با آن ها رفتار کرد. دو مثال زیر پیچیدگی‌ها و ظرافت‌های این موضوع را روشن می‌کنند.

مثال ۱۵-۳ (ریزش ماسه به درون ارابه): دانه‌های ماسه از بالا و به طور عمودی با آهنگ $dm/dt=\sigma$ به درون ارابه‌ای ریزش می‌کند. ارابه را با چه نیرویی باید هل بدهیم تا با سرعت ثابت افقی v حرکت کند.

حل ۱: فرض کنید $m(t)$ جرم مجموعه‌ی" ارابه بعلاوه‌ی ماسه‌ی درون آن" باشد (این مجموعه را سامانه‌ی C بنامید.) اگر از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کنیم (در اینجا a شتاب ارابه است. چون ارابه با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس شتاب آن صفر است) آنگاه خواهیم داشت $F=۰$ که نادرست است. رابطه‌ی درستی که باید استفاده کنیم $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ است و خواهیم داشت

$$F=\frac{dp}{dt}=ma+\frac{dm}{dt}v=۰+\sigma v \qquad (۳-۸۶)$$

این پاسخ ، پذیرفتنی است؛ چون نیروی هل دادن تکانه‌ی C را افزایش می‌دهد. تکانه‌ی C به این خاطر زیاد می‌شود که جرمش زیاد می‌شود (سرعت ثابت است).

حل ۲ این مسئله را با استفاده از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ هم می‌توان حل کرد؛ به شرطی که سامانه را جزء کوچک جرمی در نظر گرفت که به ارابه افزوده می‌شود. حالا، نیروی شما چیزی است که به این جزء جرم شتاب می‌دهد و سرعتش را از صفر به v می‌رساند. فرض کنید در زمان Δt جزء جرم کوچک Δm به درون ارابه می‌افتد. فرض کنید این جرم در آغاز بازه‌ی Δt به طور یک پارچه (مثل یک توده) به درون ارابه می‌افتد و سپس شتابیده می‌شود و پس از زمان Δt سرعتش به v می‌رسد (و این نتیجه برای هر بازه‌ی Δt بعدی هم تکرار می‌شود). بنابراین، داریم $F=ma=\Delta m(v/\Delta t)$. اگر سمت راست آن را به صورت $\Delta m(v/\Delta t)=(\Delta m/\Delta t)v$ بازنویسی کنیم خواهیم داشت $F=\sigma v$ که همان پاسخ حل ۱ است.

مثال ۱۶-۳ (نشت ماسه از ارابه): ماسه با آهنگ $dm/dt=\sigma$ از کف ارابه به بیرون نشت می کند. اگر به ارابه نیروی F اعمال شود، شتاب ارابه را پیدا کنید.

حل: فرض کنید $m(t)$ جرم سامانه‌ی" ارابه بعلاوه‌ی ماسه‌ی درون آن" است (این سامانه را C بنامید). در این مثال برای حل مسئله می‌خواهیم از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کنیم. بنابراین، شتاب $a=F/m$ است. توجه کنید که چون m با زمان کاهش می-یابد، a با زمان افزایش پیدا می‌کند. در این‌جا به این خاطر از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کردیم که جرم m چیزی است که به وسیله‌ی نیروی F شتاب داده می‌شود. می‌توانید تصور کنید که این فرایند در گام‌های گسسته رخ می‌دهد: نیرو جرم را برای زمان کوتاهی هل می‌دهد، سپس بخش کوچکی (جرم Δm) از آن جدا می‌شود..... روشن است که در این فرایند گسسته، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ رابطه‌ی درست است، زیرا برای هر گام فرایند درست است. تنها ابهام در این است که آیا باید از m یا $m+\Delta m$ استفاده کرد. اما این به خطای بسیار اندکی می‌انجامد و می‌توان از آن چشم پوشید.

نکته: در این مسئله هنوز هم $F=dp/dt$ برقرار است؛ اما به شرطی که F نیروی **کل** و p تکانه‌ی **کل** باشند. در مسئله البته F تنها نیروی موجود است. اما تکانه‌ی کل سامانه دو بخش دارد: تکانه‌ی ماسه‌ی درون ارابه و تکانه‌ی ماسه‌ای که نشت می‌کند و در هوا سقوط می‌کند (اگر هوا مقاومت داشته باشد باید در به کار بردن $F=dp/dt$ نگران آن هم باشیم؛ چون p تکانه‌ی کل است). اشتباه معمول در استفاده از $F=dp/dt$ این است که p را فقط تکانه‌ی سامانه‌ی C در نظر بگیریم.
مثال ساده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد اگر p فقط تکانه‌ی سامانه‌ی C باشد چرا $F=dp/dt$ کار نمی‌کند. تصور کنید $F=۰$ است و فرض کنید ارابه با سرعت v حرکت می‌کند. ارابه را به دو بخش جدا از هم تقسیم کنید. بخش عقب آن را "ماسه‌ی نشت کرده" و بخش جلو را" ارابه" بنامید. اگر بخواهید در $dp/dt=F=۰$ تکانه‌ی p ارابه را قرار دهید، می‌بینید که سرعت ارابه با نصف شدن جرمش دوبرابر می‌شود. این پاسخ بی‌معنی است زیرا هر دو بخش ارابه با آهنگ یکسان به

حرکتشان ادامه می‌دهند. ♣

نکته: (یادداشت دکتر محمد خرمی) برای سامانه‌های باز، یعنی سامانه‌هایی که جرم‌شان ثابت نیست، در حالت عمومی شکل درست قانون دوم نیوتون به صورت $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} - \mathbf{I}$ است که در آن $\mathbf{I}$ جریان تکانه نامیده می‌شود که حاصل انتقال یا تغییر جرم سامانه است و بنا به قرارداد اگر جرم از سامانه حارج شود، مثبت است. ♣

جمع بندی کنیم: $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ هواره درست است به شرطی که نیروی **کل** و تکانه‌ی **کل** سامانه‌ی ذرات مورد نظر را در آن به کار ببریم. این رویکرد در برخی وضعیت ها پیچیده می‌شود. بنابراین، در برخی وضعیت ها ساده‌تر است که از $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ استفاده شود؛ اما باید هوشیار بود و سامانه‌ای را که با نیروی $\mathbf{F}$ شتابیده می‌شود به درستی مشخص کرد. ناتقارنی در دو مثال بالا در این است که در مثال اول (مثال ١٤-٣) نیرو در واقع ماسه‌ی فرودی را شتاب می‌دهد حال آنکه در مثال ١٥-٣ نیرو به ماسه‌ی نشتی شتاب نمی‌دهد (آن را واشتابیده هم نمی‌کند). $\mathbf{F}$ کاری به ماسه‌ی نشتی ندارد.

پیوست : روش عمومی حل مسئله های ماشین آتوود.

هفت گام زیر شما را به حل هر مسئله‌ی ماشین آتوود توانا می‌کند.

گام ۱: شتاب هر جرم متحرک را با نمادهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$ نشان دهید.

گام ۲: شتاب هر یک از قرقره‌های **متحرک** را با نمادهای $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3 \ldots\ldots$ نشان دهید.

گام ۳: به هر ریسمانی کشش‌های $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \ldots$ را نسبت دهید.

گام ۴: برای هر جرم معادله‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را بنویسید. $\mathbf{F}$ نیروی برآیند وارد به هر جرم است.

گام ۵: برای هر قرقره‌ی متحرک معادله‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را بنویسید. $\mathbf{F}$ نیروی برآیند است. اگر قرقره بدون جرم باشد (مانند بیشتر حالت هایی که ما در نظر خواهیم گرفت) آنگاه $\mathbf{F} = 0$ است.

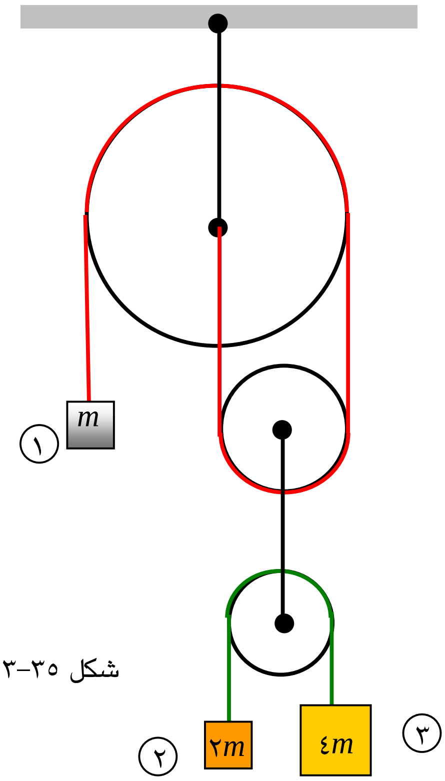
گام ۶: معادله‌ی پایستگی طول ریسمان را برای هر یک از ریسمان ها بنویسید.

توجه: با این گام تعداد معادله‌های شما با تعداد مجهول‌ها برابر می‌شود. زیرا هر ریسمان به شما یک مجهول (یک کشش، T) و یک معادله (پایستگی طول) می‌دهد و هر جزء متحرک (جرم یا قرقره) یک مجهول (شتاب آن) و یک معادله ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ آن) می‌دهد. پس می‌توان با حل هم‌زمان آنها مجهول‌ها را به دست آورد. بهتر است که منظم بود و یک راه منظم بودن این است که

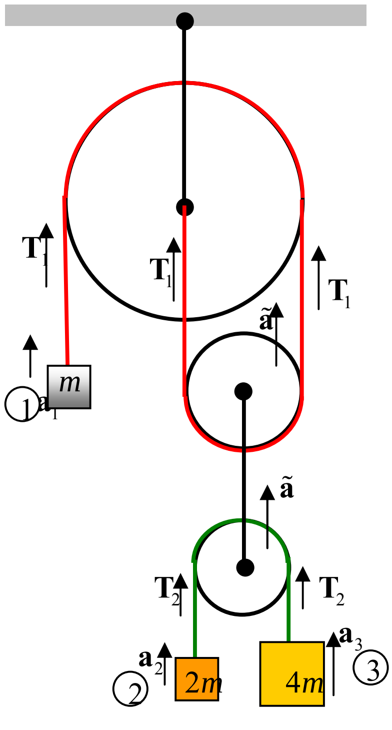
گام ۷: برای این که از دست مجهولی رها شوید، معادله‌ای را که مجهول شما را در بر دارد برگزینید و آن را برحسب مجهول خود حل کنید. پاسخ مجهول را در همه‌ی معادله‌های دیگر جای‌گزین کنید. از معادله‌ای که برای یافتن مجهول‌تان استفاده کردید تا هنگامی که همه‌ی مجهول ها را از بین نبرده‌اید دیگر استفاده نکنید. این کار را تکرار کنید تا هیچ مجهولی در معادله‌های شما باقی نماند. این فرایند پاسخ آخرین مجهول را به شما خواهد داد. برای این که مجهول‌های دیگر را به دست آورید، آخرین پاسخ را به طور واگرد در معادله‌هایتان جایگزین کنید. گام آخر ابلهانه به نظر می‌رسد. بگذارید آن را برای یک مثال به کار ببریم. به آرایه‌ی شکل (٣٥-٣) توجه کنید. **گام‌های ١تا ٣** در شکل (٣٦-٣) نشان داده شده‌اند. در **گام ۴** رابطه‌های $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای جرم‌ها می‌نویسیم که عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 - m\mathbf{g} &= m\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{T}_2 - 2m\mathbf{g} &= 2m\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{T}_3 - 4m\mathbf{g} &= 4m\mathbf{a}_3 \end{aligned} \qquad (\text{پ}-1)$$

در **گام ۵** معادله‌های $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای قرقره‌های متحرک می‌نویسیم. چون دو قرقره‌ی متحرک را همانند یک قرقره فرض



شکل ۳-۳۵



شکل ۳-۳٦

کردیم و شتاب یکسانی به هر دو نسبت دادیم، پس تنها یک معادله داریم.

$$2\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_2 = 0 \qquad \text{(پ-۲)}$$

طرف دوم این رابطه به این خاطر صفر است که جرم قرقره صفر است. حالا می‌رسیم به **گام ۶** که اعمال "پایستگی طول ریسمان" است. اگر جرم ۱ را به اندازه‌ی y_1 بالا بکشید. به اندازه‌ی y_1 از طول ریسمان بالای جرم ۱ ناپدید می‌شود. در اثر این جابه‌جایی، جرم ۱ شتاب $\mathbf{a}_1$ پیدا می‌کند. چون قرقره‌ی بزرگ حرکت نمی‌کند، این مقدارگم شده از طول ریسمان باید در دو طرف قرقره‌ی متحرک بالایی ظاهر شود. یعنی در هر دو طرف قرقره میانی به طول ریسمان بالای آن افزوده می‌شود و قرقره‌ی میانی به اندازه‌ی y_2 سقوط می‌کند. y_2 مقداری است که از دو سوی به ریسمان بالای قرقره‌ی میانی افزوده شده است. پس داریم

$$y_1 = -2y_2 \qquad \text{(پ-۳)}$$

(علامت منفی در سمت راست به این خاطر است که جهت مثبت را رو به بالا فرض کردیم و قرقره‌ی میانی سقوط می‌کند.) اگر از رابطه‌ی (پ-۳) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم ، خواهیم داشت

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}}_2 = 0 \qquad \text{(پ-٤)}$$

اینک به ریسمان گذرنده از قرقره‌ی پایین توجه کنید. جرم ۲ را به اندازه‌ی x بالا ببرید. این کار سبب می‌شود که جرم ۲ شتاب $\mathbf{a}_2$ به دست آورد. ریسمان دور قرقره شل می‌شود. مقدار شل شدگی ریسمان در دو طرف قرقره‌ی پایینی باید از میان برود. پس قرقره‌ی پایینی به اندازه‌ی $\tilde{x}$ سقوط می‌کند. یعنی، بخشی از طول x ریسمان به $2\tilde{x}$ تبدیل می شود و بخش دیگرش سبب می- شود که جرم ۳ به اندازه‌ی z سقوط کند. پس می‌توان نوشت:

$$x = 2\tilde{x} - z \qquad \text{(پ-۵)}$$

علامت منفی در رابطه‌ی (پ-۵) به این خاطر است که جهت مثبت جابه‌جایی را رو به بالا فرض کردیم و جرم ۳ به پایین سقوط می کند. اگر از رابطه (پ-۵) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت

$\ddot{x} = 2\ddot{\tilde{x}} - \ddot{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0$	(پ-٦)

این معادله‌ی پایستگی طول ریسمان پایینی است که جرمهای ۲ و ۳ را به هم وصل کرده‌است و از روی قرقره‌ی پایینی می‌گذرد. کار تمام شد. حالا شش مجهول ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{a}_3$) داریم و شش معادله که عبارت اند از

$$\mathbf{T}_1 - m\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_1 \qquad \text{(پ-۷)}$$

$$\mathbf{T}_2 - 2m\mathbf{g} = 2m\,\mathbf{a}_2 \qquad \text{(پ-۸)}$$

$$\mathbf{T}_2 - 4m\mathbf{g} = 4m\,\mathbf{a}_3 \qquad \text{(پ-۹)}$$

$$2\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_2 = 0 \qquad \text{(پ-۱۰)}$$

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}} = 0 \qquad \text{(پ-۱۱)}$$

$$\mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad \text{(پ-۱۲)}$$

گام ۷: حالا این معادله‌ها را همزمان حل می‌کنیم. نخست، چیزهایی را که نمی‌خواهیم حذف می‌کنیم. یعنی $\mathbf{T}$ها و $\mathbf{a}$ها را حذف می‌کنیم. برای حذف $\mathbf{T}_1$ معادله‌ی (پ-۱۰) را انتخاب کنید (هر معادله‌ی دیگری هم که در آن $\mathbf{T}_1$ وجود داشته باشد، می‌تواند برگزیده شود. من ساده ترین شان را انتخاب کردم. از رابطه‌ی (پ-۱۰) داریم $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$. آن را در بقیه‌ی معادله‌ها جایگزین کنید. پنج معادله و پنج مجهول باقی می‌ماند:

$$\mathbf{T}_2 - m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_1 \qquad \text{(پ-۱۳)}$$

$$\mathbf{T}_2 - 2m\,\mathbf{g} = 2m\,\mathbf{a}_2 \qquad \text{(پ-۱۴)}$$

$$\mathbf{T}_2 - 4m\,\mathbf{g} = 4m\,\mathbf{a}_3 \qquad \text{(پ-۱۵)}$$

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}} = 0 \qquad \text{(پ-۱۶)}$$

$$\mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad \text{(پ-۱۷)}$$

حالا $\mathbf{T}_2$ را حذف کنید. من از معادله‌ی (پ-۱۳) استفاده می‌کنم. خواهیم داشت $\mathbf{T}_2 = m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{a}_1$. این رابطه را در چهار معادله‌ی دیگر جایگزین می‌کنیم. چهار معادله و چهار مجهول باقی می‌ماند.

$$(m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{a}_1) - 2m\,\mathbf{g} = 2m\,\mathbf{a}_2 \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 \qquad \text{(پ-۱۸)}$$

$$(m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{a}_1) - 4m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_3 \quad \Rightarrow \quad -3\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \qquad \text{(پ-۱۹)}$$

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}} = 0 \qquad \text{(پ-۲۰)}$$

$$\mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad \text{(پ-۲۱)}$$

اکنون $\tilde{\mathbf{a}}$ را حذف می‌کنیم. از رابطه‌ی (پ-۲۰) داریم $\tilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}_1/2$. اگر این مقدار را در سه معادله‌ی دیگر قرار دهیم سه معدله و سه مجهول خواهیم داشت

$$-\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 \qquad \text{(پ-۲۲)}$$

$$-3\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \qquad \text{(پ-۲۳)}$$

$$\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad \text{(پ-۲٤)}$$

از دست کمیت‌هایی که نمی‌خواهیم، رها شدیم. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ شتاب‌هایی است که واقعا در پی آنهاییم. باید به یاد داشته باشد که کدام معادله را برای حذف کدام متغیر برگزیدیم. با $\mathbf{a}_1$ آغاز می‌کنیم و برای حذف آن از رابطه‌ی (پ- ۲۲) استفاده می‌کنیم.

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{g} + 2\mathbf{a}_2 \qquad \text{(این معادله را به یاد بسپارید)} \qquad \text{(پ-۲٤ ❋)}$$

و آن را در رابطه‌های (پ-۲۳) و (پ-۲٤) جایگزین کنید:

$$-\mathbf{g} + \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_3 \qquad \text{(پ- ۲۵)}$$

$$\mathbf{g} + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad \text{(پ-۲٦)}$$

حالا با استفاده ازرابطه‌ی (پ-۲۵) می‌توان $\mathbf{a}_2$را حذف کرد.

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{g} + 2\mathbf{a}_3 \qquad \text{(این معادله را هم به یاد بسپارید)} \qquad \text{(پ-۲۷ ❋)}$$

و آن را در رابطه‌ی (پ–۲۶) قرار می‌دهیم. به دست می‌آید:

(پ–۲۸ ٭) (این معادله را هم به یاد بسپارید)

$$\mathbf{g}+۳(\mathbf{g}+۲\mathbf{a}_۲)+\mathbf{a}_۲=۰$$

از رابطه‌ی (پ–۲۸ ٭) داریم:

(پ–۲۹)

$$\mathbf{a}_۲=-\frac{۴}{۷}\mathbf{g}$$

و با جاگذاری آن در رابطه‌ی (پ–۲۷ ٭) خواهیم داشت:

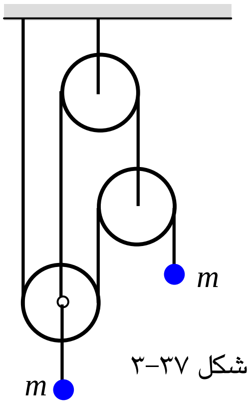
(پ–۳۰)

$$\mathbf{a}_۲=\mathbf{g}+۲\left(-\frac{۴}{۷}\mathbf{g}\right) \Rightarrow \mathbf{a}_۲=-\frac{۱}{۷}\mathbf{g}$$

سرانجام این که اگر از رابطه‌ی (پ–۳۰) استفاده کنیم و در رابطه‌ی (پ–۲۴ ٭) قرار می دهیم، $\mathbf{a}_۱$ به دست می‌آید:

(پ–۳۱)

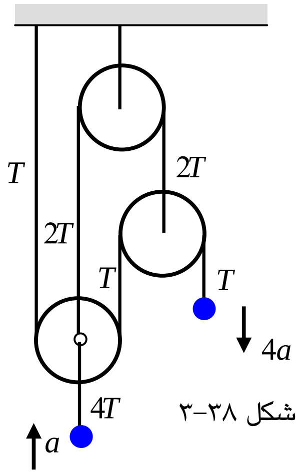
$$\mathbf{a}_۱=\mathbf{g}+۲\left(-\frac{۱}{۷}\mathbf{g}\right) \Rightarrow \mathbf{a}_۱=\frac{۵}{۷}\mathbf{g}$$



شکل ۳–۳۷

مثال ۱۷–۳: ماشین آتوود شکل (۳–۳۷) را در نظر بگیرید. همه‌ی قرقره‌ها و ریسمان ها بدون جرم‌اند. و جرم هر دو وزنه m است. دو ریسمان که به وسط قرقره‌ی سمت چپ وصل شده اند به محور قرقره وصل‌اند. شتاب وزنه‌ها را به دست آورید.

حل : با توجه به شکل (۳–۳۸) کشش ریسمانی را که به جرم سمت راست وصل است T بنامید. این ریسمان از دو قرقره‌ی پایینی می‌گذرد و چون همواره کشیده است، در همه‌جای آن کشش T است. حال اگر به قرقره‌ی (بدون جرم) سمت راست نگاه کنید، می‌بینید که کشش در ریسمانی که آن را به قرقره‌ی بالایی وصل می‌کند (و پس از گذشتن از روی آن به مرکز قرقره‌ی پایینی وصل می‌شود) برابر $2T$ است. حال به قرقره‌ی (بدون جرم) سمت چپ (قرقره‌ی پایینی) توجه کنید. کشش در ریسمان کوتاهی که از مرکز آن آویزان است و جرم m به آن وصل است، $4T$ است. فرض کنید شتاب جرم سمت چپ a و رو به بالاست. از پایستگی طول ریسمان می‌توان دریافت که شتاب جرم سمت راست $4a$ و رو به پایین است. این نکته کلیدی است؛ بنابراین، بگذارید آن را بفهمیم: دو قرقره‌ی پایینی به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند (یکی به بالا و دیگری به پایین)؛ چون هر دو با یک ریسمان به هم وصل‌اند. اگر قرقره‌ی سمت چپ به اندازه‌ی d بالا برود، به اندازه‌ی $۲d$ از طول دو ریسمان بالای آن کاسته و "ناپدید" می‌شود. همچنین، اگر قرقره‌ی سمت راست به اندازه‌ی d پایین برود، به اندازه‌ی $۲d$ از طول دوریسمان‌های آویزان در زیر آن کاسته و" ناپدید" می‌شود. بنابراین، طول کل $۴d$ باید در بالای جرم سمت راست ظاهر شود. به بیان دیگر، جرم سمت راست به اندازه‌ی $۴d$ سقوط می‌کند: $y_{\text{right}}=۴d$. اگر دو بار از y_{right} نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت: $a_{\text{right}}=۴a_{\text{left}}$ (از نظر اندازه). بنابراین، دو معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ عبارت‌اند از



شکل ۳–۳۸

(پ–۳۲) (برای جرم سمت چپ)

$$۴T-mg=ma$$

(پ–۳۳) (برای جرم سمت راست)

$$mg-T=m(۴a)$$

از رابطه‌ی (پ–۳۳) T را به دست آورید و در رابطه‌ی (پ–۳۲) قرار دهید. خواهیم داشت

(پ–۳۴)

$$۴(mg-۴ma)-mg=ma \Rightarrow ۳mg=۱۷ma \quad \therefore\ a=\frac{۳}{۱۷}g$$

این شتاب رو به بالای جرم سمت چپ است. پس، شتاب جرم سمت راست رو به پایین وبرابر است با $g(۱۲/۱۷)=a$۴.

مثال‌های تکمیلی

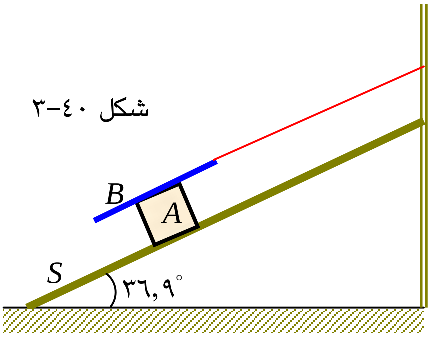
ت-۱ زنجیر همگنی با چگالی جرمی $\sigma(kg/m)$ در روی سطح بدون اصطکاک برابر شکل (۳۹-۳) خوابانیده شده است. در کنار زنجیر خاکانداز بدون جرمی در حال سکون است. خاک انداز را با نیروی $F(t)$ به جلو هل می‌دهیم (تا زنجیر به تدریج در خاکانداز جمع شود). این نیرو در همه‌ی زمان‌ها به خاکانداز (و آن مقدار از زنجیر که در درونش قرار گرفته است) شتاب ثابت a می‌دهد. بین خاکانداز و سطح، اصطکاک وجود ندارد. نیروی $F(t)$ را بیابید.



شکل ۳۹-۳

ت-۲ از لحظه‌ی $t=0$ به جسمی به جرم m نیروی $F(t)=F_0\sin\omega t$ وارد می‌شود. اگر مکان اولیه‌ی جسم x_0 و سرعت اولیه‌اش v_0 باشد، مکان $x(t)$ و سرعت $v(t)$ را در زمان t حساب کنید.

ت-۳ قطعه A با وزن $3w$ روی سطح شیب‌دار S شکل (۴۰-۳) با شیب $36{,}9^\circ$ با سرعت ثابتی به پایین می‌لغزد و میله‌ی B با وزن w بر روی آن ساکن است. میله‌ی B برابر شکل با ریسمانی به دیوار وصل است.

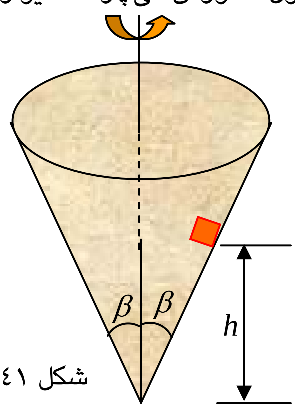


شکل ۴۰-۳

(الف): نمودار نیروهایی را که به قطعه‌ی A وارد می‌شوند، رسم کنید.

(ب): اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و میله با ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح S برابر باشد، آن را پیدا کنید.

ت-۴ قطعه‌ی کوچکی به جرم m در درون قیفی قرار دارد. قیف در زمان T یک دور کامل حول محورش می‌چرخد. دیواره‌ی قیف برابر شکل (۴۱-۳) با خط قائم زاویه‌ی β می‌سازد. ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه و دیوار قیف μ_s است. برای این که قطعه در ارتفاع ثابت h باقی بماند، بیشینه و کمینه‌ی T را بیابید.



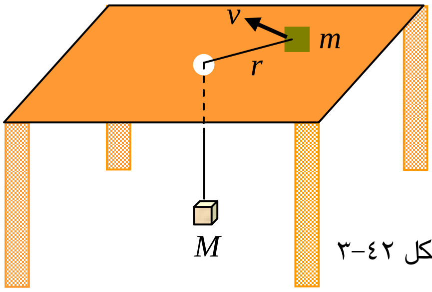
شکل ۴۱-۳

ت-۵ جعبه‌ای به وزن w را با ریسمانی از یک سربالایی به بالا می‌کشیم. کشش ریسمان T است. سربالایی با افق زاویه‌ی α دارد و ریسمان با سطح شیب‌دار زاویه‌ی θ رو به بالای دارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح شیب‌دار μ_k است. نشان دهید که مقدار α هر چه باشد، هنگامی شتاب جعبه بیشینه است که $\theta=\tan^{-1}\mu_k$ باشد.

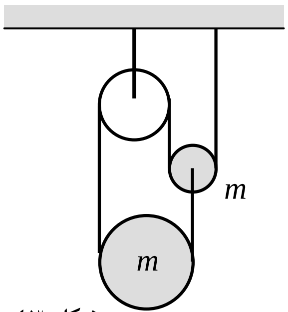
ت-۶ ذره‌ای به جرم m روی میز افقی بدون اصطکاک در فاصله‌ی r از مرکز یک سوراخ قرار دارد. ذره برابر شکل (۴۲-۳) با

با ریسمانی به وزنه‌ی سنگین‌تر M وصل است که در زیر میز از انتهای دیگر ریسمان آویزان است. جرم کوچک‌تر m را با سرعت v به حرکت یکنواخت دایره‌ای وادار می‌کنیم. برای این که جرم بزرگ‌تر M ساکن بماند، سرعت v چقدر باید باشد؟

ت-۷ ماشین آتوود شکل (۴۳-۳) را در نظر بگیرید. جرم هر یک از قرقره‌های خاکستری m است. ریسمان روی قرقره‌ها بدون اصطکاک می‌سُرد (بنابراین، نگران حرکت چرخشی نباشید). شتاب این دو قرقره را حساب کنید.



شکل ۳-۴۲



شکل ۳-۴۳

مسئله‌ها:

۳ـ۱ جسم A با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند و با جسم در حال سکون B برخورد می‌کند. پس از برخورد A با سرعت $\mathbf{v}/۲$ و B با سرعت $۳\mathbf{v}/۲$ حرکت می‌کنند. نسبت جرم آنها را بیابید. اگر پس از برخورد، دو جسم به‌هم بچسبند با چه سرعتی جسم ترکیبی حرکت خواهد کرد.

(پاسخ: $m_A/m_B=۳$; $۳\mathbf{v}/۴$)

۳ـ۲ اگر دو مؤلفه‌ی یک ستاره‌ی دوتایی در دایره‌هایی با شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ حرکت کنند، نسبت جرم آنها چیست؟ (راهنمایی: شتاب ستاره‌ها را برحسب سرعت زاویه‌ای چرخشی‌شان بنویسید).

۳ـ۳ یک سامانه‌ی سه ذره‌ای را در نظر بگیرید. جرم ذره‌ها m است، اگر ذره‌ی ۲ و ۳ را یک جسم مرکب با جرم $۲m$ در نظر بگیریم که در $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_۲+\mathbf{r}_۳)/۲$ جایگزیده است؛ معادله‌های حرکت را که رفتار یک سامانه‌ی دو جسمی مرکب از ذره‌ی ۱ و جسم ترکیبی (۲+۳) را توصیف می‌کند، بنویسید. چه نیرویی به جسم ترکیبی از سوی جسم ۱ وارد می‌شود؟ هنگامیکه جرم‌ها نابرابر باشند، تعریف درست مکان جسم ترکیبی (۲+۳) که هنوز در $m_۱\mathbf{a}_۱=-m_۲\mathbf{a}_۲$ صدق کند کدام است؟

۳-۴ فاصله‌ی میان دو پروتون را چنان پیدا کنید که نیروی رانشی میان آنها با نیروی ربایشی گرانشی میان زمین و یکی از آنها برابر باشد. (بار پروتون $۱٫۶\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C}$ و جرم آن $۱٫۷\times۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$).

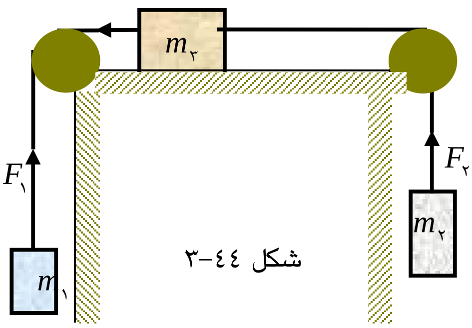
۳-۵ تبدیلی به چارچوب با حرکت یکنواخت نسبی را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{r}_۱$ با $\mathbf{r}'_۱=\mathbf{r}_۱-\mathbf{v}t$ جایگزین شده است. در اینجا $\mathbf{v}$ سرعت نسبی دو چارچوب است. مکان نسبی $\mathbf{r}_{ij}$ چگونه تبدیل می‌شود؟ تکانه‌ها و نیروها چگونه تبدیل می‌شوند؟ به روشنی نشان دهید که اگر رابطه‌های $\dot{\mathbf{p}}_۱=m_۱\mathbf{a}_۱=\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_{ij}=\hat{\mathbf{r}}_{ij}f\,(r_{ij})$ در چارچوب نخست صادق باشند در چارچوب جدید نیز درست اند.

۳-۶ در شکل (۳-۴۴) $m_۱=۲\ \mathrm{kg}$، $m_۲=۴\ \mathrm{kg}$ و $m_۳=۷\ \mathrm{kg}$ اند. هر کدام از قرقره‌ها حول محور ثابتی می‌چرخند. ریسمان کشسان نیست و اصطکاک نیز در مسئله وجود ندارد. می‌توانید $g=۱۰\,\mathrm{m/s^۲}$ فرض کنید.

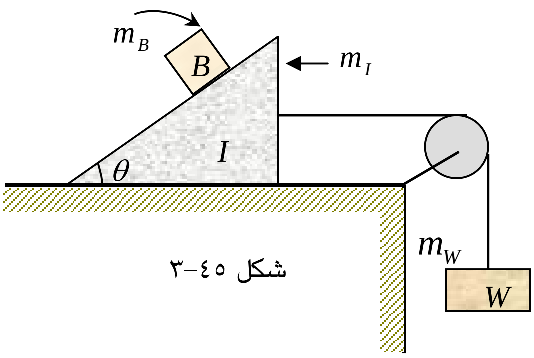
(الف): شتاب سامانه را حساب کنید. **(ب)**: نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ را که ریسمان‌ها به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ وارد می‌کنند، حساب کنید.

(پ): نیروی F_s را که ریسمان سمت چپ به جرم $m_۳$ وارد می‌کند به دست آورید.

۳-۷ در شکل (۳-۴۵) قطعه B روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی با شیب θ می‌لغزد. سطح شیب‌دار بر روی میز افقی بدون اصطکاک می‌لغزد. وزنه‌ی W به وسیله‌ی ریسمان کشیده به سطح شیبدار وصل و از روی قرقره‌ی بدون جرم و اصطکاک آویزان است. شتاب وزنه‌ی W را بیابید.

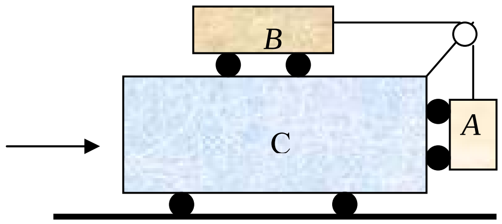


شکل ۳-۴۴



شکل ۳-۴۵

۳-۸ در شکل (۳-۴۶) سامانه‌ای مکانیکی از سه ارابه به جرم‌های $m_A=۰٫۳\,\mathrm{kg}$ ، $m_B=۰٫۲\,\mathrm{kg}$ و $m_C=۱٫۵\,\mathrm{kg}$ تشکیل



شکل ۴۶-۳

شده است. از اصطکاک، پس‌کشی هوا چشم‌پوشی کنید. قرقره جرم ندارد.

(الف): نیروی F در راستای افقی به ارابه‌ی C وارد می‌شود. این نیرو به اندازه‌ای قوی است که ارابه‌های A و B نسبت به C در حال سکون باقی می‌مانند. نیروی F و کشش ریسمان را به‌دست آورید.

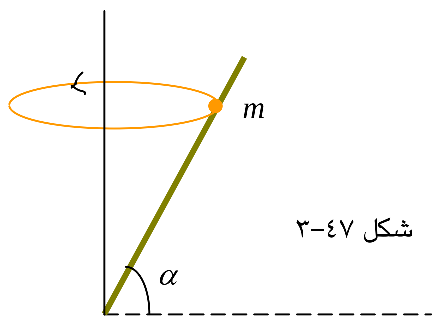
(ب): ارابه‌ی C در حال سکون است، شتاب ارابه‌های A و B و کشش ریسمان را حساب کنید.

۳-۹ جرم m تحت اثر نیروی وابسته به سرعت $F(v) = -F_\circ e^{v/C}$ در راستای محور x ها حرکت می‌کند. $F_\circ$ و C مقادیر ثابت‌اند.

(الف): اگر در زمان $t = \circ$ سرعت اولیه جرم $v_\circ > \circ$ باشد، سرعت ذره را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

(ب): در چه هنگامی این جرم به سکون لحظه‌ای می رسد؟ **(پ)**: این جرم چه مسافتی را می‌پیماید تا اینکه به سکون لحظه‌ای برسد؟

۳-۱۰ (الف): نشان دهید که قانون دوم نیوتن را می‌توان به صورت $t = m\int \frac{dv'}{F(v')}$ نوشت که در آن $F(v')$ نیرویی است که در حالت عمومی به سرعت بستگی دارد. **(ب)**: فرض کنید زمان $t = \circ$ سرعت جرم v_0 است و در راستای محور xها حرکت می‌کند. نیرویی به صورت $F(v) = -cv^{3/2}$ به این جسم اثر می‌کند (این نیرو بازدارنده است). سرعت v را به صورت تابعی از زمان t بدست آورید. چه موقع این جسم به حالت سکون خواهد رسید.



شکل ۴۷-۳

۳-۱۱ میله‌ای حول محور عمودی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. میله با افق زاویه‌ی α می‌سازد. ذره‌ای به جرم m همانند شکل (۴۷-۳) می‌تواند روی میله بلغزد. ضریب اصطکاک میان میله و جرم m برابر است با μ. برای اینکه ارتفاع ذره در طوت چرخش میله ثابت بماند چه شرطی لازم است.

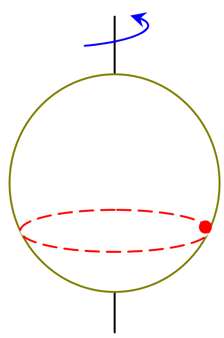
۳-۱۲ کره‌ی توخالی به شعاع $R = \circ$.۵ m حول قطر عمودی خود با سرعت زاویه‌ای $\omega = 5\,s^{-1}$ می‌چرخد. در درون کره و در ارتفاع $R/2$ ، همانند شکل (۴۸-۳) ، قطعه‌ی کوچکی با کره می‌چرخد.

(الف): کمینه مقدار ضریب اصطکاک چقدر باشد تا این حرکت برای قطعه فراهم شود؟

(ب): اگر $\omega = 8\,s^{-1}$ باشد، شرط برقراری این وضعیت را بیابید.

(پ): پایداری جسم را برای دو حالت زیر بررسی کنید.

(۱): تغییر اندکی در مکان جسم؛ (۲) تغییر اندکی در سرعت زاویه‌ای کره .

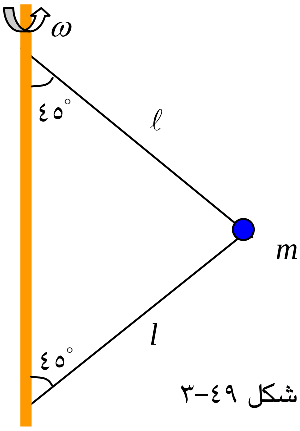

شکل ۴۸-۳

۳-۱۳ قطعه چوبی با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ بر رروی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک رو به بالا حرکت می‌کند. سطح با افق زاویه‌ی θ می‌سازد.

(الف): قانون دوم نیوتن را برای قطعه چوب بنویسید، آن را حل کنید و مکان قطعه چوب را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

(ب): چه زمانی طول می‌کشد تا قطعه به نقطه‌ی آغازین خود برگردد.

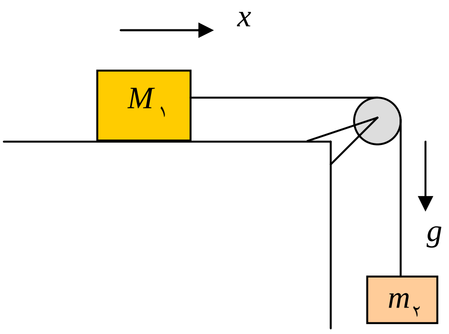
۳-۱۴ جرم m به وسیله‌ی دو ریسمان به طول ℓ برابر شکل (۳-٤۹) به میله‌ای بسته شده است. میله با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود می‌چرخد و جرم m را نیز با خود می‌چرخاند. ریسمان‌ها با میله زاویه‌ی 45° می‌سازند. نیروهای کشش را در هر دو ریسمان حساب کنید.



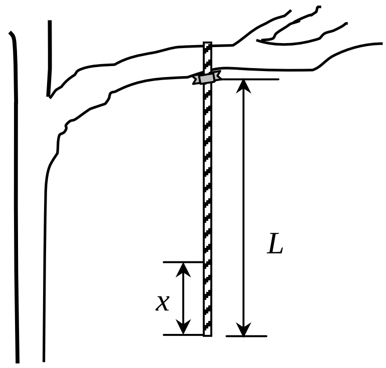
شکل ۳-٤۹

۳-۱۵ برابر شکل (۳-٥۰) یک انتهای ریسمانی را به شاخه‌ی درخت گره زده‌ایم. طول L این ریسمان از درخت آویزان است. اگر ریسمان همگن و جرم طول L آن M باشد. کشش ریسمان را در فاصله‌ی x از انتهای آزاد ریسمان حساب کنید. در نقطه‌ی آویز و نیز در انتهای آزاد ریسمان کشش چقدر است ؟

۳-۱۶ دو جرم M_1 و M_2 با ریسمان بدون جرمی برابر شکل (۳-٥۱) به هم وصل‌اند. اگر این سامانه را از حالت سکون رها کنیم مسافت پیموده شده توسط M_1 را بر حسب زمان به دست آورید. از اصطکاک چشم پوشی کنید.

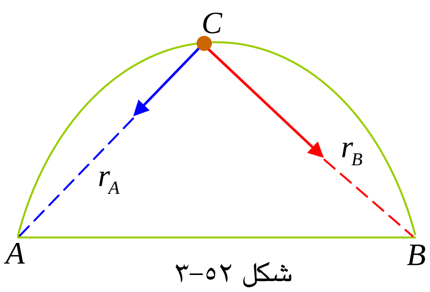


شکل ۳-٥۱



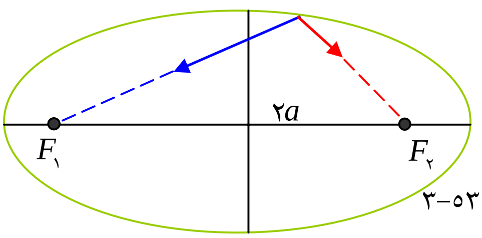
شکل ۳-٥۰

۳-۱۷ دو مرکز نیرو در دو انتهای قطر دایره‌ای به شعاع r (قطر AB در شکل(۳-٥۲)) قرار دارند. این دو مرکز به کره‌ی کوچکی نیروی ربایشی متناسب با فاصله‌های BC و AC وارد می‌کنند: $F_A = K_A\ r_A$ و $K_B K_A$ و $F_B = K_B r_B$. K_i ها مقدارهای ثابت‌اند. کره به حرکت روی دایره محدود است. اگر از اصطکاک چشم‌پوشی کنیم، مکانی ترازمندی کره کجاست؟



شکل ۳-٥۲

۳-۱۸ یک جرم نقطه‌ای مقید به حرکت روی سطح بیضی‌واری با قطر بزرگ‌تر $2a$ است. هر یک از کانون‌های بیضی‌وار مرکز نیرو است که به جرم نقطه‌ای اثر می‌کند (شکل ۳-٥۳). جهت نیروها به سوی مرکز نیروست و اندازه‌ی آنها با $n-$ امین توان فاصله‌ی میان جرم نقطه‌ای و مرکز نیرو متناسب اند. توان هر دو نیرو یکسان اما ضریب‌های تناسب متفاوت‌اند. فاصله‌های ذره از کانون‌ها را هنگامی که ذره در حالت ترازمندی است به دست آورید.



شکل ۳-٥۳

۳-۱۹ نشان دهید که اگر جرم نقطه‌ای m بر روی خمی در صفحه حرکت کند و نیروی خارجی وارد بر آن در همان صفحه باشد، آنگاه اگر ذره با سرعت v حرکت کند نیرویی به اندازه‌ی $F_n = mv^2/\rho$ به خم وارد خواهد کرد. مؤلفه‌ی عمودی نیروی خارجی F است و ρ شعاع خمش مسیر ذره است.

۳-۲۰ سامانه‌ای سه ذره‌ای را در نظر بگیرید. جرم هر کدام از ذره‌ها m است. اگر ذره‌ی ۲ و ۳ به هم پیوسته باشند و جسم مرکبی به جرم $2m$ بسازند که در نیمراه میان آن دو $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/2$ جایگزیده باشد. معادله‌هایی که حرکت سامانه‌ی دو جسمی شامل ذره‌ی ۱ و جسم ترکیبی (۳+۲) را توصیف کنند، کدامند.

۳-۲۱ در کلاس، ما از جرم همانند کمیت بنیادی نام بردیم و جرم واحد و شیوه‌ی اندازه‌گیری جرم‌ها را بررسی کردیم. اینک در امکان اینکه به جای جرم، اگر نیرو را کمیت بنیادی فرض کنیم و برای مثال، وزن خاصی را در ارتفاع یا عرض جغرافیایی خاصی نیروی واحد فرض کنیم، چگونه باید جرم جسمی را تعریف و آن را اندازه‌گیری کرد؟

۳-۲۲ جسمی به وزن W بر سطح افقی قرار دارد. زاویه‌ی اصطکاک ایستایی بین سطح‌ها ε است. جهت و اندازه‌ی کمینه نیروی لازم برای به حرکت واداشتن جسم را بیابید.

۳-۲۳ ریسمان ناکشسانی به طول b به دو نقطه‌ی هم‌تراز که به‌فاصله‌ی a $(a \langle b)$ از یکدیگرند قرار دارند، بسته شده است. دانه تسبیح سنگینی به جرم m روی ریسمان آزادانه می‌لغزد. نیروی افقی F چنان به دانه‌ی تسبیح اعمال می‌شود که آن را درست در زیر یکی از نقطه‌های آویز ریسمان در حالت ترازمندی نگه می‌دارد. کشش ریسمان و اندازه‌ی نیروی F را حسا ب کنید.

۳-۲۴ ذره‌ای به جرم m به حرکت روی دایره‌ای افقی مقید است. در نقطه‌ای بر روی مسیر ذره، مرکز نیرویی وجود دارد که به ذره نیروی ربایشی وارد می‌کند. اندازه‌ی نیرو با فاصله‌ی مرکز نیرو و ذره متناسب است. ضریب تناسب D است. از اصطکاک چشم‌پوشی کنید، با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیلی برای حرکت جرم نقطه‌ای ، نشان دهید که حرکت ذره همانند نوسانگر ساده است.

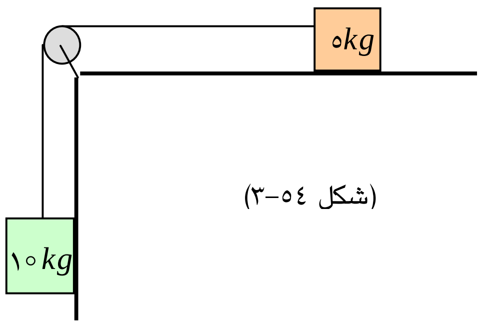
۳-۲۵ آونگ ساده‌ای به جرم m و طول l داریم. بیشینه انحراف از حالت عمودی آونگ ϕ است. آونگ را روی ترازویی قرار می‌دهیم؛ وزن آونگ را هنگامی که زاویه‌ی انحراف آن ϕ است، حساب کنید.

۳-۲۶ جرم نقطه‌ای m تحت تاثیر دو مرکز نیروی O_1 و O_2 است. O_1 ربایشی و O_2 رانشی است. هر دو نیرو با فاصله از جرم m متناسب‌اند و ضریب تناسب‌ها یکسان‌اند. با شرایط اولیه دلخواه؛ نشان دهید که مدار جرم نقطه‌ای همواره سهمی است.

۳-۲۷ ذره‌ای به جرم m در قطب شمال نیم‌کره‌ای وارون به شعاع a قرار دارد. اگر به ذره اختلال اندکی وارد کنیم در چه نقطه‌ای سطح نیم کره را ترک خواهد کرد. سطح کره هموار است.

۳-۲۸ دو دانه تسبیح به وزن‌های W_1 و W_2 می‌توانند روی سیم هموار دایره شکل بلغزند. دانه‌های تسبیح با ریسمان ناکشسان بدون جرم به‌هم وصلند. هنگامیکه دانه‌های تسبیح در روی نیم‌دایره‌ی بالایی در حالت ترازمندی‌اند، زاویه‌ی مرکزی باز شده به ریسمان وتر 2β است. در این حالت، ریسمان چه زاویه‌ای با خط افق می‌سازد

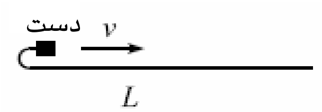
۳-۲۹ دو کره‌ی همگن یکسان به وزن W و شعاع a در درون کاسه‌ی هموار نیم‌کره قرار دارند. شعاع کاسه b است. نیروی بین کره‌ها و نیروی واکنش کاسه روی هر کدام از کره‌ها را بدست آورید؟ (*راهنمایی:* کره‌ها چنان در درون کاسه قرار می‌گیرند که خطی که مرکزهای آنها را به هم وصل می کند، افقی است. چرا؟)



(شکل ۳-۵٤)

۳-۳۰ در شکل (۳-۵٤)، قرقره‌ی بدون جرم و بدون اصطکاک به لبه‌ی میز هموار ثابت شده است. دو قطعه به جرمهای $5kg$ و $10kg$ با ریسمان بدون جرم که از روی قرقره می‌گذرد بهم وصلند. اگر قطعه‌ی ۵ کیلوگرمی را با چسب به سطح میز بچسبانیم، کشش ریسمان افزایش پیدا می‌کند یا کاهش می‌یابد؟ (چرا؟). مقایسه با حالتی است که قطعه به میز چسبیده نیست.

۳-۳۱ زنجیری به طول L و چگالی جرم $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ را بر روی میز بدون اصطکاک افقی دراز کرده ایم یک انتهای ریسمان را با دست می‌گیریم و با سرعت ثابت v بر روی خود برمی‌گردانیم. بخش در حال حرکت زنجیر موازی بخش ساکن است (شکل۳-۵۵). دست چه نیرویی به زنجیروارد می‌کند.

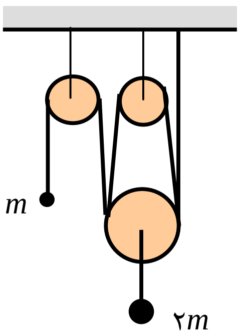


شکل ۳-۵۵

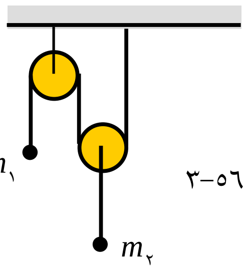
۳-۳۲ در مسئله ی ۳-۳۱ اگر دست شما از حالت سکون به حرکت آغاز کند و شتاب ثابت a داشته باشد نیروی دست شما در لحظه‌ای که دست به انتهای دیگر زنجیر می‌رسد چقدر است؟ (*راهنمایی:* فرض کنید x مسافتی است که دست شما جابه‌جا می‌شود و x را برحسب تابعی از زمان ، t ، بنویسید.

۳-۳۳ در سامانه‌ی قرقره‌های شکل (۳-٥٦) با دو جرم m_1 و m_2 شتاب جرم‌ها و کشش ریسمان را پیدا کنید. ریسمان و قرقره ها بدون جرم‌اند.

۳-۳۴ ماشین آتوود شکل (۳-۵۷) سه قرقره‌ی بدون جرم دارد. جرم $2m$ با ریسمان کوتاهی از قرقره‌ی پایینی آویزان است. ریسمان دراز دیگری دو بار از زیر قرقره‌ی پایینی و یک بار از روی هر دو قرقره



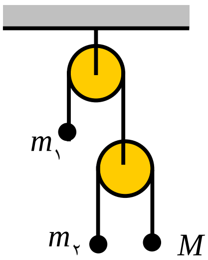
شکل ۳-۵۷



شکل ۳-٥٦

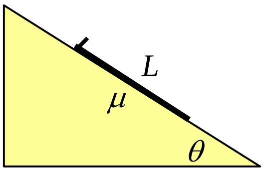
های بالایی گذشته است. وزنه‌ای به جرم m از انتهای آزاد ریسمان دراز آویزان است. شتاب‌ها را بیابید.

۳-۳۵ ماشین آتوود شکل (۳-۵۸) را در نظر بگیرید. قرقره‌ها و ریسمان ها بدون جرم‌اند. جرم‌ها را ازحالت سکون رها می‌کنیم. برحسب m_1 و m_2 مقدار M باید چقدر باشد تا m_1 بدون حرکت بماند؟ برای وجود این مقدار M چه رابطه ای باید بین m_1 و m_2 برقرار باشد ؟

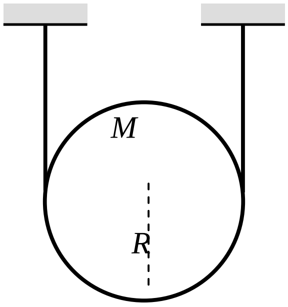


شکل ۳-۵۸

۳-۳۶ ریسمانی به طول L و با چگالی جرمی ρ در واحد طول روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ برابر شکل (۳- ۵۹)، دراز شده است. انتهای بالایی ریسمان را با میخ به سطح بسته‌ایم و ضریب اصطکاک میان ریسمان و سطح μ است. مقدارهای ممکن کشش در انتهای بالایی ریسمان کدامند؟



شکل ۵۹-۳



شکل ۶۰-۳

۳-۳۷ قرصی به جرم M وشعاع R با ریسمان بدون جرمی برابر شکل (۶۰-۳) در هوا نگه داشته شده‌است. سطح قرص بدون اصطکاک است.

(الف): کشش ریسمان را حساب کنید و نیروی عمودی در واحد طول را که ریسمان به قرص وارد می‌کند بدست آورید.

(ب): اینک فرض کنید بین ریسمان و قرص اصطکاک وجود دارد و ضریب اصطکاک μ است. کمینه مقدار شدنی کشش ریسمان در پایین ترین نقطه‌ی آن چیست؟

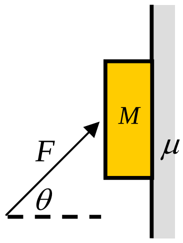
۳-۳۸ جرم m با ریسمان بدون جرم به طول ℓ به نوک مخروط بدون اصطکاک وصل است. نیم زاویه‌ی راس مخروط θ است. اگر جرم m با سرعت v روی دایره‌ی افقی حرکت کند ، کشش ریسمان و نیروی عمودی مخروط را پیدا کنید. برای این که جرم در تماس با رویه‌ی مخروط باقی بماند بیشینه سرعت v چقدر است؟ (شکل ۶۱-۳).

۳-۳۹ کتابی به جرم M را به دیوار عمودی تکیه می‌دهیم. ضریب اصطکاک میان کتاب و دیوار μ است. برای اینکه از افتادن کتاب جلوگیری کنیم، نیروی F را با زاویه‌ی θ نسبت به افق $(-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$ همانند شکل (۶۲-۳) به آن وارد می کنیم .

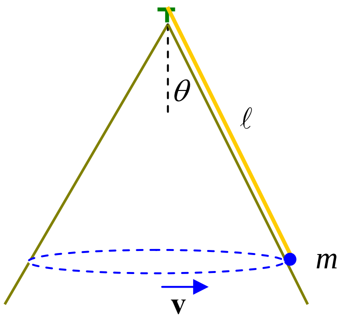
(الف): کمینه نیروی F لازم برای یک θ معین چقدر است؟

(ب): به ازای کدام θ این نیروی کمینه کوچکترین است؟ در این حالت نیروی کمینه را بیابید

(پ): مقدار حدی θ که کمتر از آن نیروی F برای نگه‌داری کتاب وجود نداشته باشد ، چیست؟



شکل ۶۲-۳



شکل ۶۱-۳

۳-۴۰ قطعه ای روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی با زاویه‌ی θ از حالت سکون به پایین می لغزد.

(الف): زاویه‌ی θ چقدر باشد تا قطعه مسافت افقی معینی را در کمترین زمان به پیماید؟

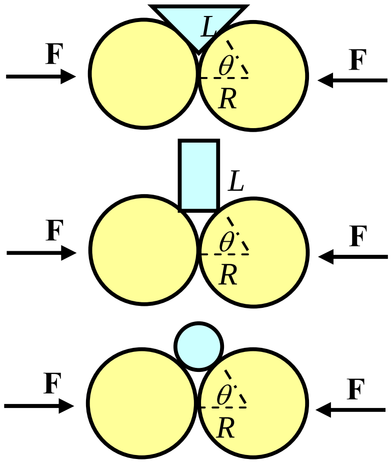
(ب): اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و قطعه μ باشد پرسش بالا را پاسخ دهید.

۳-۴۱ چگالی جرم سطحی هر یک از جسمهای تخت شکل (۶۳-۳) σ است. زاویه‌ی مرکزی بین خط افق و نقطه‌ی تماس جسمها با دایره θاست. در هر یک از حالت‌ها چه نیرویی باید به دایره‌ها وارد شود تا آنها را پهلوی هم نگه دارد (یعنی دایره-ها در تماس با هم باقی بمانند) ؟ به ازای چه مقدار θ این نیرو کمینه یا بیشینه است؟

(الف): مثلث متساوی الساقین به ضلع L.

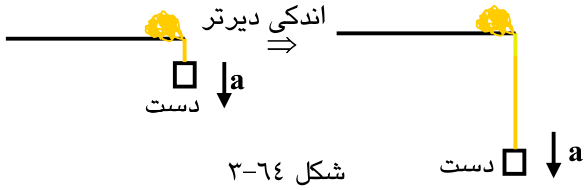
(ب): مستطیل به طول L .

(پ): یک دایره



شکل ۳-۶۳

۳-۴۲ کلاف نخی با چگالی جرم $\sigma\,\text{kg/m}$ بر لبه‌ی میزی قرار دارد. در آغاز، یک سر نخ به اندازه‌ی بسیار اندکی از کلاف بیرون آمده است (شکل ۳-۶۴). با دست این سر را می‌گیریم و با شتاب a به پایین می‌کشیم. دست چه نیرویی را، به صورت تابعی از زمان، به نخ وارد می کند؟ اندازه‌ی a را چنان بیابید که نیروی دست همواره صفر باشد (فرض کنید نخ با باز شدن از کلاف اصطکاکی با کلاف ندارد).



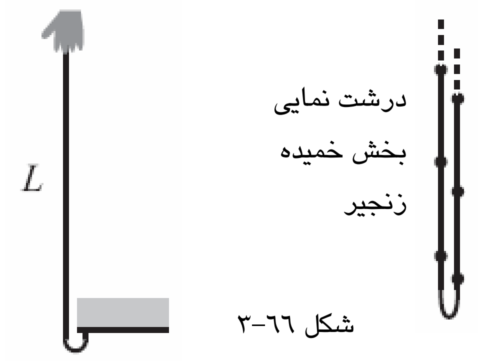
شکل ۳-۶۴

۳-۴۳ سامانه ی قرقره‌های شکل(۳-۶۵) را در نظر بگیرید. قرقره‌ها و ریسمان‌ها جرم ندارند و جرم قطعه‌ی به شکل L برابر M است. جرم قطعه‌ی آویزان m است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه‌ها μ است و سطح زمین اصطکاک ندارد.

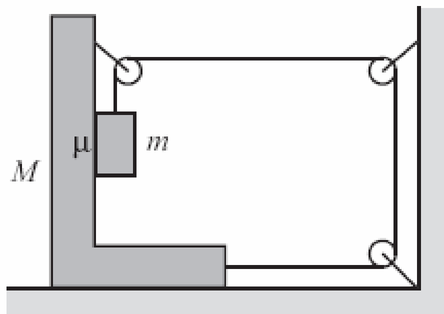
(الف): نمودار آزاد هردو قطعه را رسم کنید و مطمئن باشید که همه نیرو ها را در نظر گرفته‌اید.

(ب): شتاب قطعه‌ی به شکل L را پیدا کنید.

۳-۴۴ زنجیری به طول L و چگالی جرمی $\sigma\,\text{kg/m}$ در وضعیتی نگه داشته شده است که در سمت چپ شکل (۳-۶۶) دیده می‌شود. یک انتهای زنجیر به زیر میزی وصل است و طول بسیار اندکی از آن در زیر آویزگاه قرار دار. زنجیر را رها می‌کنیم تا بیفتد. آویزگاه چه نیرویی به زنجیر وارد می‌کند؟ زنجیر را به



شکل ۳-۶۶



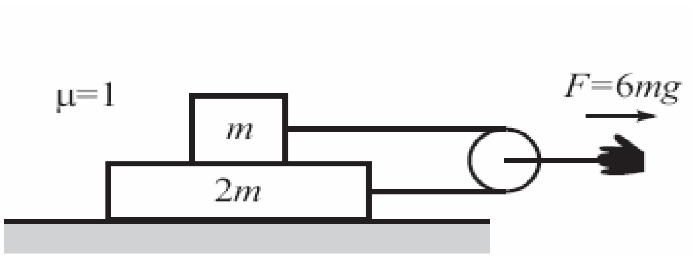
شکل ۳-۶۵

صورت جرم‌های نقطه‌ای فرض کنید که با ریسمان بدون جرم به هم وصل‌اند. هم چنین فرض کنید پهنای بخش خمیده‌ی زنجیر در مقایسه با طول آن ناچیز است. این یعنی پایین ترین قسمت زنجیر شل است و بنابراین، طول سمت چپ زنجیر سقوط آزاد می‌کند.

۳-۴۵ قطعه‌ای به جرم m روی قطعه‌ی دیگری به جرم $2m$ قرار دارد که بر روی میز افقی نشسته است. ضریب اصطکاک جنبشی میان همه سطح ها $\mu = 1$ است. ریسمان بدون جرمی را به هر دو قطعه وصل می‌کنیم و آن را چند بار برابر شکل (۳-۶۷) دور قرقره‌ای می‌پیچیم. قرقره را با نیروی $6mg$ می‌کشیم.

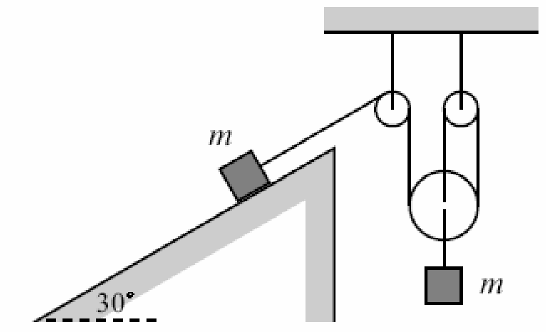
(الف): نمودار آزاد هر یک از قطعه ها را بکشید و همه‌ی نیروها را (افقی و عمودی) نشان دهید.

(**ب**): شتاب دست را حساب کنید



شکل ٦٧-٣

۴۶-۳ ماشین آتوود شکل (٦٨-٣) را با دو جرم m در نظر بگیرید. قرقره و ریسمان‌ها جرم ندارند و سطح بدون اصطکاک است. شتاب هر دو جرم را پیدا کنید.



شکل ٦٨-٣

حل مثال‌های تکمیلی

ت-۱ چون a ثابت است داریم: $x=(۱/۲)at^۲$ و $v=at$.

تکانه‌ی خاک‌انداز و اندرونه‌اش برابر است با $p=mv=(\sigma x)v=\sigma\left(\frac{۱}{۲}at^۲\right)(at)=\frac{۱}{۲}\sigma a^۲t^۳$

$$\Rightarrow\ F=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}\sigma a^۲t^۳)=\frac{۳}{۲}\sigma a^۲t^۲=\frac{۳}{۲}\sigma v^۲$$

هم چنین می‌توانستیم بنویسیم $p=\sigma x\dot{x}\Rightarrow F=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(\sigma x\dot{x})=\sigma\dot{x}^۲+\sigma x\ddot{x}$ و با جاگذاری $\dot{x}=at$ و $x=\frac{1}{2}at^2$ خواهیم داشت $F=(۳/۲)\sigma a^۲t^۲$ که همان پاسخ بالاست.

نکته: نیرو در شکل $F=\sigma\dot{x}^۲+\sigma x\ddot{x}$ به روشنی نشان می‌دهد که نیروی شما دو کار انجام می‌دهد: (۱) بخشی باید جرم موجود در خاک‌انداز را شتابیده کند و برابر است با $F=ma=(\sigma x)a$ و (۲) همچنین باید حلقه‌های جدیدی را که در حال سکون بودند به حرکت وا بدارد. این بخش عبارت است از

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=\frac{dm}{dt}v=\frac{\sigma dx}{dt}v=\sigma v^۲$$

ت-۲ شتاب a را به صورت dv/dt بنویسید. معادله‌ی $F=ma$ به صورت زیر در می‌آید:

$$F_{\circ}\sin\omega t=m\frac{dv}{dt}\ \Rightarrow\ \int_{\circ}^{t}\frac{F_{\circ}}{m}\sin\omega t\,dt=\int_{v_{\circ}}^{v}dv$$

$$\Rightarrow\ -\frac{F_{\circ}}{m\omega}\cos\omega t\,dt\Big|_{\circ}^{t}=v-v_{\circ}\ \Rightarrow\ v(t)=v_{\circ}+\frac{F_{\circ}}{m\omega}(۱-\cos\omega t)\qquad (۳-۸۷)$$

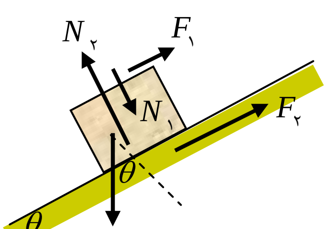
حال v را به صورت dx/dt بنویسید. خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt}=v_{\circ}+\frac{F_{\circ}}{m\omega}(۱-\cos\omega t)\ \Rightarrow\ \int_{x_{\circ}}^{x}dx=\int_{\circ}^{t}\left(v_{\circ}+\frac{F_{\circ}}{m\omega}(۱-\cos\omega t)\right)dt$$

$$\Rightarrow\ x-x_{\circ}=\left(v_{\circ}t+\frac{F_{\circ}t}{m\omega}-\frac{F_{\circ}t}{m\omega}\sin\omega t\right)\Bigg|_{\circ}^{t}\ \Rightarrow\ x(t)=x_{\circ}+v_{\circ}t+\frac{F_{\circ}t}{m\omega}-\frac{F_{\circ}t}{m\omega}\sin\omega t\qquad (۳-۸۸)$$

توجه کنید که در مقایسه با جسمی که با سرعت ثابت v_0 حرکت می‌کند، این جسم با گذشت زمان مسافت بزرگی پیش می‌افتد.

ت-۳ (الف): نیروهای وارد به قطعه عبارتند از دو نیروی عمودی و دو نیروی اصطکاک (یکی از سوی سطح شیب‌دار و یکی از سوی میله) و نیروی گرانش. نودار آزاد نیروها در شکل (۳-۶۹) دیده می‌شوند.



شکل ۶۹-۳

(ب): در امتداد سطح شتاب صفر است. بنابراین، جمع نیروها در امتداد سطح هم باید صفر باشد. یعنی $(۳m)g\sin\theta$ باید با جمع دو نیروی اصطکاک $F_۱$ و $F_۲$ برابر باشد. نیروهای اصطکاک باید با نیروهای عمودی به ترازمندی برسند. پس، داریم

$$F_۱ = \mu N_۱ = \mu mg \cos\theta \qquad (۳-۸۹)$$
$$F_۲ = \mu N_۲ = \mu\left(N_۱ + ۳mg\cos\theta\right) = ۴\mu mg\cos\theta \qquad (۳-۹۰)$$

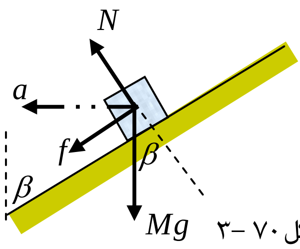
در نتیجه، به دست می‌آید

$$\left(۳m\right) g\sin\theta = \mu mg\cos\theta + ۴\mu mg\cos\theta \;\;\Rightarrow\;\; \mu = \left(۳/۵\right)\tan\theta \qquad (۳-۹۱)$$

به ازای $\tan ۳۶٫۹^\circ \approx ۴/۳$ داریم $\mu=(۳/۵)(۳/۴)=۲۰/۹=۰٫۴۵$. حالت‌های حدی: $\theta \to ۰$ داریم $\mu \to 0$ و $\theta \to ۹۰$ داریم $\mu \to \infty$ که هر دو پذیرفتنی‌اند.

ت-۴ اجازه دهید، برحسب v مسئله را حل کنیم.

$$v = r\omega = \left(h\tan\theta\right)\left(۲\pi/T\right) \;\;\Rightarrow\;\; T = \frac{۲\pi h\tan\theta}{v} \qquad (۳-۹۲)$$



شکل ۷۰-۳

نخست حالتی را در نظر بگیرید که سرعت بیشینه (T کمینه) است. (این همان مسئله‌ی حرکت اتومبیل در پیچ شیب‌دار است). اگر v بیشینه باشد، نیروی اصطکاک f به سوی راس قیف است؛ چون در این حالت، اصطکاک از سُریدن قطعه به طرف قاعده جلوگیری می‌کند. بنابراین، نمودار آزاد نیروها همانند شکل (۷۰ -۳) است. معادله‌های $F = ma$ در راستای سطح و عمود بر آن عبارتند از

$$f + mg\cos\beta = ma\sin\beta \;\;\Rightarrow\;\; f = m\left(\frac{v^۲}{h\tan\beta}\right)\sin\beta - mg\cos\beta \qquad (۳-۹۳)$$

$$N - mg\sin\beta = ma\cos\beta \;\;\Rightarrow\;\; N = m\left(\frac{v^۲}{h\tan\beta}\right)\cos\beta + mg\sin\beta \qquad (۳-۹۴)$$

اما μ با شرط $f \le \mu N$ محدود است . در نتیجه، داریم

$$\left(\frac{v^۲}{h\tan\beta}\right)\sin\beta - g\cos\beta \le \left(\left(\frac{v^۲}{h\tan\beta}\right)\cos\beta + g\sin\beta\right)$$
$$\Rightarrow\;\; v^۲\left(\sin\beta - \mu\cos\beta\right) \le gh\tan\beta\left(\mu\sin\beta + \cos\beta\right)$$
$$\Rightarrow\;\; v \le \sqrt{\frac{gh\tan\beta\left(\mu\sin\beta + \cos\beta\right)}{\sin\beta - \mu\cos\beta}} \qquad (۳-۹۵)$$

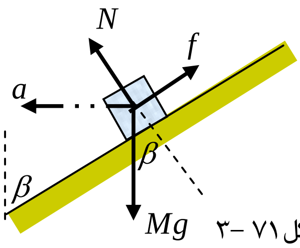
با استفاده از رابطه‌ی (۹۲-۳) نتیجه می‌گیریم که

$$T = \frac{۲\pi h\tan\beta}{v} \ge ۲\pi h\tan\beta\sqrt{\frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{gh\tan\beta\left(\mu\sin\beta + \cos\beta\right)}}$$
$$\Rightarrow\; T_{\min} = ۲\pi\sqrt{\frac{h\tan\beta\left(\sin\beta - \mu\cos\beta\right)}{g\left(\mu\sin\beta + \cos\beta\right)}} \qquad (۳-۹۶)$$

حالت حدی: این نتیجه فقط هنگامی درست است که $\mu \ge \tan\beta$ باشد؛ چون اگر $\mu < \beta$ باشد، آنگاه سطر دوم در رابطه‌ی (۹۵-۳) نشان می‌دهد که نابرابری به ازای هر مقدار v برقرار است، چون سمت چپ منفی است. بنابراین، اگر $\mu \le \tan\beta$ باشد،

قطعه می‌تواند با سرعت بینهایت حرکت کند و $T_{\min}=\circ$ می‌شود (با زاویه‌ی β به اندازه‌ی کافی کوچک هم قطعه به دیواره فشرده می‌شود و نیروی اصطکاک بسیار بزرگی تولید می‌کند.)

اگر $\beta \to ۹۰^\circ$ آنگاه خواهیم داشت $T_{\min}\to\infty$ و این هم پذیرفتنی است؛ چون در ارتفاع h، شعاع حرکت دایره‌ای قطعه، $r=h\tan\beta$ ، خیلی بزرگ می‌شود و بنابراین، حتی سرعت زاویه‌ای ω اندک هم به نیروی اصطکاک $m\omega^2 r$ بسیار زیادی نیز دارد. اینک حالت سرعت کمینه (T بیشینه) را در نظر بگیرید. تنها فرقی که این حالت با حالت بالا دارد در این ایت که این بار جهت f به سوی قاعده‌ی مخروط است، چون نیروی اصطکاک از سریدن قطعه به سوی راس قیف جلوگیری می‌کند. نمودار آزاد نیروها همانند شکل (۷۱-۳) است. محاسبه هم همانند بالاست و تنها جند علامت منفی جایگزین می‌شود. معادله‌های $F=ma$ عبارت‌اند از



شکل ۷۱-۳

$$-f+mg\cos\beta=ma\sin\beta \;\Rightarrow\; f=-m\left(\frac{v^{۲}}{h\tan\beta}\right)\sin\beta+mg\cos\beta \qquad (۳-۹۷)$$

$$N-mg\sin\beta=ma\cos\beta \;\Rightarrow\; N=m\left(\frac{v^{۲}}{h\tan\beta}\right)\cos\beta+mg\sin\beta \qquad (۳-۹۸)$$

از شرط محدود کننده‌ی $f\le\mu N$ داریم

$$-\left(\frac{v^{۲}}{h\tan\beta}\right)\sin\beta+g\cos\beta\le\mu\left(\left(\frac{v^{۲}}{h\tan\beta}\right)\cos\beta+g\sin\beta\right)$$
$$\Rightarrow\; gh\tan\beta\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)\le v^{۲}\left(\sin\beta+\mu\cos\beta\right)$$
$$\Rightarrow\; \sqrt{\frac{gh\tan\beta\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)}{\sin\beta+\mu\cos\beta}}\le v \qquad (۳-۹۹)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۹۲-۳) نتیجه می‌گیریم که بیشینه مقدار T عبارت است از

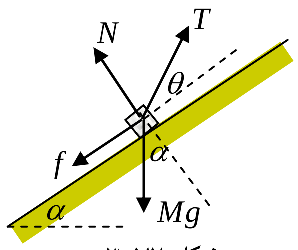
$$T=\frac{۲\pi h\tan\beta}{v}\le ۲\pi h\tan\beta\sqrt{\frac{\sin\beta+\mu\cos\beta}{gh\tan\beta\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)}}$$
$$\Rightarrow\; T_{\max}=۲\pi\sqrt{\frac{h\tan\beta\left(\sin\beta+\mu\cos\beta\right)}{g\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)}} \qquad (۳-۱۰۰)$$

نکته: همین نتیجه را می‌توانستیم با $\mu\to-\mu$ از دستاورد قسمت نخست هم به دست آوریم؛ چون در نمودار آزاد نیروها فقط f به $-f$ تبدیل شده است.

حالت حدی: نتیجه‌ی بالا تنها برای $\beta\le ۱/\mu$ درست است؛ چون اگر $\beta>۱/\mu$ باشد، سطر دوم در رابطه‌ی (۹۹-۳) نشان می-دهد که نابرابری به ازای هر مقدار v برقرار است؛ زیرا س نابرابری منفی است. پس، اگر $\beta\ge ۱/\mu$ باشد، قطعه می‌تواند در حال سکون بماند و $T=\infty$ باشد (نیروی اصطکاک به اندازه‌ای بزرگ است که می‌تواند به مولفه‌ی نیروی گرانش، $mg\cos\beta$ ، به سوی راس قیف چیره شود.)

اگر $\beta\to\circ^\circ$، آنگاه داریم $T_{\max}\to\circ$. این نتیجه پذیرفتنی است؛ چون شعاع حرکت دایره‌ای، $r=h\tan\beta$، بسیار کوچک است و بنابراین، برای این که نیروی عمودی $m\omega^{۲}r$ ناچیز نباشد، سرعت زاویه‌ای ω باید بسیار بزرگ باشد (و این به نیروی

اصطکاک بزرگی می‌انجامد که قطعه را نگه می‌دارد.)



شکل ۳-۷۲

ت-۵ نمودار آزاد نیروهای وارد به قطعه در شکل (۳-۷۲) دیده می‌شود. نیروی خالص عمود بر سطح شیب‌دار باید صفر باشد و در نتیجه، نیروی عمودی N عبارت است از $N = mg\cos\alpha - T\sin\theta$. برآیند نیروها در در امتداد سطح عبارت است از

$$F = T\cos\theta - Mg\sin\alpha - \mu\left(Mg\cos\alpha - T\sin\theta\right)$$
$$= T\left(\cos\theta + \mu\sin\alpha\right) - Mg\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right) \qquad (۳-۱۰۱)$$

بیشینه کردن F با بیشینه کردن کمیت $\cos\theta + \mu\sin$ هم‌ارز است. اگر از آن مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت $\tan\theta = \mu$ و این نتیجه‌ای است که به دنبالش بودیم.

ت-۶ کشش ریسمان را T بنامید. اگر وزنه‌ی سنگین آویزان دز زیر میز در حال سکون باشد، داریم $T = Mg$. اما، جرم کوچک‌تر روی میز، حرکت دایره‌ای دارد. بنابراین، همچنین داریم $T = mv^2/r$. پس:

$$\frac{mv^2}{r} = Mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}} \qquad (۳-۱۰۲)$$

ت-۷ بین دو قرقره‌ی خاکستری یک خط افقی بکشید. اگر قرقره‌ی سمت راست به اندازه‌ی d پایین برود، طول d در بالای خط افقی ظاهر می‌شود (چون طول $2d$ در بالای قرقره‌ی خاکستری بالایی ظاهر می‌شود؛ اما به اندازه‌ی d درست در زیر آن ناپدید می‌شود). این طول d باید از زیر خط افقی ناپدید شده باشد. طول d ریسمان که در بالای خط افقی ظاهر می‌شود، به طور مساوی بین دو بخش ریسمان که با قرقره‌ی پایینی در تماس‌اند تقسیم می‌شود. بنابراین، قرقره‌ی پایینی به اندازه‌ی $2d$ به بالا می‌رود. پس، داریم $2a_2 = a_1$. یعنی شتاب رو به بالای قرقره‌ی بالایی دو برابر شتاب رو به بالای قرقره‌ی پایینی است. معادله‌های $F = ma$ برای قرقره‌های بالایی و پایینی عبارت‌اند از

$$mg + T - 2T = ma_1, \qquad 2T - mg = ma_2 \qquad (۳-۱۰۳)$$

از این دو رابطه به همراه $2a_2 = a_1$ مقادیر شتاب‌ها به دست می‌آیند: $a_1 = 2g/5$ و به سوی پایین و $a_2 = g/5$ و به سوی بالا. مقدار T عبارت است از $T = 3mg/5$.

فصل ۴

حرکت در یک و در دو بعد

۴-۱ حل چند معادله ی دیفرانسیل

در این فصل وضعیت هایی را بررسی می‌کنیم که نیرو به صورت تابعی از زمان ، مکان ویا سرعت داده می‌شود و کار ما حل معادله‌ی دیفرانسیل $F=ma\equiv m\ddot{x}$ و یافتن مکان $x(t)$ است. برای این کار نخست برخی شیوه‌های حل معادله‌های ساده‌ی دیفرانسیل را خواهیم پروراند. اگر یاد بگیریم که چگونه از این شیوه‌ها استفاده کنیم، فهمیدن وضعیت‌های فیزیکی سامانه‌ها بسیاری آسان می‌شود .

نیرو می‌تواند افزون بر x، t و $v\equiv\dot{x}$ به توان‌های بالاتر x هم بستگی داشته باشد. این وضعیت‌ها خیلی نیستند و بنابراین به آنها نخواهیم پرداخت. پس، معادله‌ی دیفرانسیلی را که می‌خواهیم حل کنیم همانا $F=ma$ است (در این جا خود را به یک بعد محدود می‌کنم .) بگذارید آن را به صورت زیر بنویسیم

$$m\ddot{x}=F(t,x,v) \tag{۴-۱}$$

در حالت عمومی نمی‌توان این معادله را دقیق حل کرد و $x(t)$ را یافت. اما در بسیاری از مسئله‌ها که با آنها سروکار خواهیم داشت می‌توان آن را حل کرد. مسئله‌هایی که ما با آنها برخورد خواهیم کرد در یکی از سه گروه خاص قرار می‌گیرند: F فقط تابعی از t ، یا x و یا v باشد. در هر یک از این سه حالت خاص باید از شرایط اولیه‌ی داده شده، $x_\circ=x(t_\circ)$ و $v_\circ=v(t_\circ)$ ، استفاده کرد تا بتوان پاسخ نهایی را به دست آورد. این شرط‌های اولیه در حد انتگرال‌هایی نمایان می‌شوند که در زیر به آنها می‌پردازیم. (نیاز به دو شرط اولیه تصادفی نیست. هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو، دو ثابت انتگرال‌گیری دارد).

نکته: اگر بخواهید، می‌توانید از چند صفحه‌ای که در پی می‌آید بگذرید و بعدا به آن برگردید. آنها را برای کامل شدن متن در این جا می‌گنجانم. تلاش نکنید که شکل‌های متفاوت پاسخ معادله را به یاد بسپارید. همه‌ی قصه را می‌توان در یک جمله کوتاه کرد: می‌خواهیم $\ddot{x}$ رابه صورت dv/dt و یا به صورت $v\,dv/dx$ بنویسیم و سپس متغیرها را از هم جدا کنیم تا بتوانیم انتگرال بگیریم (رابطه ۴-۵ را ببینید) همین! نخست این حالت‌های خاص را توضیح می‌دهم و سپس به چند مثال می‌پردازم.

- F فقط تابعی از t است: $F=F(t)$

چون $a=d^2x/dt^2$ است ، کافی است دو بار از $F=ma$ انتگرال بگیریم تا $x(t)$ را به دست بیاوریم. بگذارید این کار را گام به گام انجام دهیم تا روش عمومی را بیاموزیم. نخست $F=ma$ را به صورت زیر بنویسید

$$m\frac{dv}{dt}=F(t) \tag{۴-۲}$$

و متغیرها را از هم جدا کنید (دو طرف را در dt ضرب کنید) و سپس از دو طرف انتگرال بگیرید.

$$m\int_{v_\circ}^{v(t)}dv'=\int_{t_\circ}^{t}F(t')dt' \tag{۴-۳}$$

ما علامت متغیر انتگرال‌گیری را با پرایم نشان دادیم تا با حدهای انتگرال‌گیری اشتباه نشود. در عمل این ریزه کاری به‌جا معمولا فراموش می‌شود. از رابطه‌ی (۴-۳) v برحسب زمان، $v(t)$ ، به دست می‌آید. پس از یافتن $v(t)$ می‌توان آن را به صورت $dx/dt\equiv v(t)$ نوشت و باز هم متغیرها را از هم جدا کرد و دوباره انتگرال گرفت تا $x(t)$ را به دست بیاید:

$$\int_{x_\circ}^{x(t)}dx'=\int_{t_\circ}^{t}v(x')dt' \tag{۴-۴}$$

این فرایندِ دو بار انتگرال‌گیری شاید پیچیده به نظر آید. این چنین هم است، اما سودمندی آن در وضعیت زیر روشن می‌شود.

- F فقط تابعی از x است: $F=F\left(x\right)$

در این حالت از

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx} \qquad (٤-٥)$$

استفاده کنید تا $F=ma$ را به صورت زیر بنویسید

$$mv\frac{dv}{dx}=F(x) \qquad (٤-٦)$$

اینک متغیرها از هم جدا می‌شوند. از دو طرف انتگرال بگیرید. به دست می‌آید

$$m\int_{v_\circ}^{v(t)}v'dv'=\int_{x_\circ}^{x}F\left(x'\right)dx' \qquad (٤-٧)$$

در سمت چپ رابطه‌ی بالا $v^2(x)$ ظاهر می‌شود. اگر از آن جذر بگیریم سرعت $v(x)$ برحسب x به دست می‌آید . پس از یافتن $v(x)$، با استفاده از $v(x)\equiv dx/dt$ جداسازی متغیرها ممکن می‌شود و خواهیم داشت

$$\int_{x_\circ}^{x(t)}\frac{dx'}{v\left(x'\right)}=\int_{t_\circ}^{t}dt' \qquad (٤-٨)$$

از این رابطه t برحسب x به دست می‌آید. می‌توان (در بنیاد) آن را وارون کرد و x را برحسب t به دست آورد. ناخوشایندی در این است که شاید نتوان همیشه از سمت چپ رابطه‌ی (٨-٤) انتگرال گرفت و حتی اگر توانستیم از عهده‌ی این کار برآییم ، شاید نتوانیم $t(x)$ را وارون کنیم و $x(t)$ را به دست آوریم.

- F فقط تابعی از v است: $F=F\left(v\right)$

$F=ma$ را به صورت زیر بنویسید

$$m\frac{dv}{dt}=F(v) \qquad (٤-٩)$$

متغیرها را جدا کنید و از دو طرف انتگرال بگیرید تا به دست آورید

$$m\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv'}{F(v')}=\int_{t_0}^{t}dt' \qquad (٤-١٠)$$

این رابطه، t را برحسب تابعی از v به دست می‌دهد و (در بنیاد) می‌توان آن را وارون و $v(t)$ را برحسب t به دست آورد. با انتگرال گرفتن از $dx/dt=v(t)$ آنگاه $x(t)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\int_{x_0}^{x(t)}dx'=\int_{t_0}^{t}v(t')dt' \qquad (٤-١١)$$

توجه: در حالت $F=F(v)$ اگر بخواهید v را برحسب تابعی از x حساب کنید، باید a را به صورت (dv/dx) بنویسید و از

$$m\int_{v_\circ}^{v(x)}\frac{v'dv'}{F(v')}=\int_{x_\circ}^{x}dx' \qquad (٤-١٢)$$

انتگرال بگیرید. سپس، اگر خواستید، با استفاده از رابطه‌ی (٨-٤) می‌توانید $x(t)$ را حساب کنید.

ما شرطهای اولیه را در حدهای انتگرال‌گیری اعمال کردیم. می‌توانستیم انتگرال‌ها را بدون حد حساب کنیم و ثابت‌های انتگرال-گیری را با شرایط اولیه به دست آوریم.

همان‌گونه که در بالا گفتم، نیازی نیست که سه فرایند بالا را به یاد بسپارید؛ چون این ها تغییر می‌کنند؛ بستگی به این دارد که چه چیزی داده شده‌است و چه چیزی را باید حساب کرد. آنچه را که باید به یاد داشت این است که $\ddot{x}$ را می‌توان به صورت dv/dt و یا $v\,dv/dx$ نوشت. یکی از این دو کارگر خواهد بود (آن یکی که به ظاهر شدن دو متغیر از سه متغیر t ، x و v در معادله‌ی دیفرانسیل می‌انجامد). از این جا به بعد کافی است متغیرها را از هم جدا کنید و هر چند بار که خواستید انتگرال بگیرید.

مثال ۱-۴ (نیروی گرانش): ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی ثابت $F=-mg$ است. ذره در ارتفاع h از حالت سکون رها می‌شود. در این مثال، نیرو ثابت است و در هر سه گروه بالا می‌گنجد. پس باید بتوان $y(t)$ را به دو روش زیر حساب کرد

(الف): $y(t)$ را با نوشتن a به صورت dv/dt بیابید.

(ب) : $y(t)$ را با نوشتن a به صورت $v\,dv/dx$ بیابید.

حل: **(الف)** از $F=ma$ داریم $dv/dt=-g$. اگر دو طرف را در dt ضرب وسپس انتگرال بگیریم خواهیم داشت $v=-gt+A$. در این جا A ثابت انتگرال‌گیری است (این مثال را با افزودن ثابت انتگرال گیری و سپس محاسبه‌ی آن از شرایط اولیه انجام می‌دهیم. در مثال بعدی ، شرایط اولیه را در حدهای انتگرال‌گیری خواهیم گنجاند). از شرط اولیه‌ی $v(\text{۰})=\text{۰}$ مقدار $A=\text{۰}$ به دست می‌آید. بنابراین، داریم $dy/dt=-gt$. دو طرف این رابطه را در dt ضرب کنید و انتگرال بگیرید. خواهیم داشت $y=B-gt^{\text{۲}}/\text{۲}$. از شرط اولیه $y(\text{۰})=h$ مقدار $B=h$ به دست می‌آید. پس

$$y=h-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}gt^{\text{۲}} \qquad (\text{٤-١٣})$$

(ب): این بار از $F=ma$ داریم $v\,dv/dy=-g$. جداسازی متغیر ها و انتگرال‌گیری به $v^{\text{۲}}/\text{۲}=-gy+C$ می‌انجامد. از شرط اولیه‌ی $v(h)=\text{۰}$ داریم $v^{\text{۲}}/\text{۲}=-gy+gh$. پس $v\equiv dy/dt=-\sqrt{\text{۲}g(h-y)}$. ریشه منفی پذیرفتنی است زیرا ذره سقوط می‌کند. با جداسازی متغیرها به دست می‌آید:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{h-y}}=-\sqrt{\text{۲}g}\int dt \qquad (\text{٤-١٤})$$

که با استفاده از شرط اولیه‌ی $y(\text{۰})=h$ خواهیم داشت $\text{۲}\sqrt{h-y}=\sqrt{\text{۲}g}t$ بنابراین، y عبارت است از $y=h-gt^{\text{۲}}/\text{۲}$ که همان پاسخ بخش (الف) است.

مثال ۲-۴ (فروافتادن توپ): توپی از ارتفاع h و از حالت سکون رها می‌شود. اگر نیروی پسار هوا (یعنی نیروی مقاومت هوا که نیروی بازدارنده است و در خلاف جهت حرکت توپ به آن وارد می‌شود) به صورت $F_d=-m\alpha v$ باشد، سرعت و ارتفاع توپ را به صورت تابعی از زمان بیابید.

حل: جهت مثبت y را رو به بالا فرض کنید. نیروی وارد به توپ عبارت است از

$$F=-mg-m\alpha v \qquad (\text{٤-١٥})$$

توجه کنید که چون توپ فرو می‌افتد در اینجا v منفی است. بنابراین، نیروی پسار رو به بالاست. اگر نیرو را به صورت $F=m\,dv/dt$ بنویسیم و متغیرها را جدا کنیم خواهیم داشت

$$\int_{\text{۰}}^{v(t)}\frac{dv'}{g+\alpha v'}=-\int_{\text{۰}}^{t}dt' \qquad (\text{٤-١٦})$$

نتیجه‌ی انتگرال‌گیری عبارت است از $\ell n(1+\alpha v/g)=-\alpha t$. آن را به شکل نمایی بنویسید، داریم

$$v(t)=-\frac{g}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \qquad (۴-۱۷)$$

با توجه به این که $dy/dt \equiv v(t)$ است، دوباره متغیرها را می‌توان جدا کرد و انتگرال گرفت. خواهیم داشت

$$\int_h^{y(t)} dy'=-\frac{g}{\alpha}\int_0^t(1-e^{-\alpha t'})dt' \qquad (۴-۱۸)$$

پس از انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$y(t)=h-\frac{g}{\alpha}(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})) \qquad (۴-۱۹)$$

دو نکته:

۱. بگذارید برخی حالت‌های حدی را بررسی کنیم. اگر t خیلی کوچک باشد (دقیق‌تر: اگر $\alpha t \ll ۱$ باشد) می‌توان از بسط $e^{-x} \approx ۱-x+x^۲/۲....$ استفاده و سرعت و مسافت را با تقریب حساب کرد.

در تقریب مرتبه‌ی اول، می‌توان از رابطه‌ی (۴-۱۷) نشان داد که $v(t)\approx -gt$. این نتیجه پذیرفتنی است، چون نیروی پسار در آغاز حرکت ناچیز و قابل چشم‌پوشی است و بنابراین، توپ اساسا سقوط آزاد می‌کند. از رابطه‌ی (۴-۱۹) هم خواهیم داشت $y(t)\approx h-gt^۲/۲$ و این مقداری است که انتظارش را داریم. هم‌چنین می‌توان حد t های بزرگ را بررسی کرد. در این حد $e^{-\alpha t}$ به صفر می‌گراید و از رابطه‌ی (۴-۱۷) خواهیم داشت $v(t)\approx -g/\alpha$ (این "سرعت حد" است و اندازه‌ی آن قابل پذیرش است؛ چون سرعتی است که به ازای آن ، نیروی کل، $-mg-m\alpha v$، صفرمی‌شود.) از رابطه‌ی (۴-۱۹) داریم $y(t)\approx h-(g/\alpha)t+g/\alpha^۲$. به نکته‌ی جالبی توجه کنید: برای t بزرگ، $g/\alpha^۲$ مسافتی است که توپ در مقایسه با توپ دیگری که حرکتش را با سرعت حد آغاز می‌کند، عقب می‌ماند.

۲. شاید گمان کنید که سرعت توپ در رابطه‌ی (۴-۱۷) به جرم m وابسته نیست ، چون m در آن نمایان نمی‌شود. با وجود این، m در α نهفته است. در واقع، α افزون بر m به سطح مقطع توپ، A، هم بستگی دارد. این بستگی به صورت $\alpha \propto A/m$ است. سطح مقطع، A، دو توپ هم‌اندازه که یکی فلزی و دیگری پلاستیکی است یکی است، اما جرم‌شان و در نتیجه α آنها متفاوت است و آهنگ افتادنشان هم فرق دارد.

در محیط‌های رقیق، مانند هوا، α، برای اجسام سنگین کوچک است و بنابراین اثرهای پسار در زمان های کوتاه محسوس نیست (اگر جمله‌ی بعدی بسط v را در نظر بگیریم خواهیم داشت $v(t)\approx -gt+(۱/۲)\alpha gt^۲$) اجسام سنگین به تقریب با آهنگ یکسان فرو می‌افتند. اما، اگر هوا خیلی غلیظ باشد، اجسام سنگین مختلف با آهنگ‌های متفاوت سقوط می‌کنند. شاید به خاطر این رفتارها بود که گالیله اندکی دیرتر به نتیجه‌ی خود دست یافت.

۲-۴ حرکت پرتابی

در بسیاری از کتاب‌های فیزیک پایه بخشی به حرکت پرتابی اختصاص داده می‌شود. در این کتاب‌ها همواره از اثر مقاومت هوا (پس کشی هوا یا پسار) چشم‌پوشی می‌شود. در بسیاری از مسئله‌ها این رویکردی به جاست. در مسئله‌های دیگر، پسار هوا اهمیت می‌یابد و باید بدانیم که چگونه آن را به حساب آوریم. به طور کلی و جدا از این که نیروی پسار تا چه اندازه در مسئله اهمیت دارد، باید روشی را بیابیم تا بتوانیم درجه‌ی اهمیت آن را تخمین بزنیم. اثر نیروی پسار جنبه‌های متفاوت دارد: در بسیاری از حالت‌ها، یک نیروی بازدارنده است که با سرعت یا توان‌هایی از سرعت جسم متناسب است. این را هر کسی که دوچرخه سوار شده باشد تجربه کرده‌است. وضعیت هایی وجود دارد که این چنین نیست: نیروی پسار هوا روی بال هواپیما

مولفه‌ی بزرگی دارد که جهتش غیر از جهت حرکت هواپیما ست و به برخاستن و به پرواز درآمدن آن می‌انجامد. بیشتر پرتابه‌ها در هوا و در شاره‌ها حرکت می‌کنند و بنابراین، هنگامی که از نیروی پسار سخن می‌گوییم خود را فقط به هوا مقید نخواهیم کرد.

پیش از آنکه به ویژگی‌های نیروی پسار بپردازم و اثر آن را بر روی پرتابه‌ها بررسی کنم به حرکت پرتابی در خلاء می‌پردازیم که ساده‌ترین حرکت در دو بعد است.

توپی را تصور کنید که به هوا پرتاب می‌شود (و نه لزوما عمودی). فرض کنید x و y به ترتیب مختصات افقی و عمودی مکان توپ‌اند. در راستای محور x ها نیرو صفر است، $F_x = ۰$ و در راستای محور y به پرتابه نیروی گرانش $F_y = -mg$ وارد می‌شود. اگر عمومی‌تر بگوییم ، معادله‌ی حرکت توپ، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ، عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} \qquad (۴-۲۰)$$

که در آن $\mathbf{g}$ شتابی است که گرانش زمین به جسم تحمیل می‌کند. $\mathbf{g}$ برداری است با اندازه ثابت $g = ۹{,}۸۱ \text{m/s}^۲$. جهت $\mathbf{g}$ قائم و رو به پایین است (در اینجا ما از اثر کوچکی که چرخش زمین بر روی $\mathbf{g}$ دارد، چشم پوشیدیم ؛ در جای دیگری به آن خواهیم پرداخت. از تغییرات $\mathbf{g}$ نسبت به ارتفاع چشم‌پوشی کردیم). اگر محور y ها را محور عمودی و رو به بالا انتخاب کنیم آنگاه $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$ و رابطه‌ی (۲۰-۴) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\ddot{x} = ۰ \quad , \quad \ddot{y} = -g \quad , \quad \ddot{z} = ۰ \qquad (۴-۲۱)$$

اگر محورهای x و y را چنان انتخاب بکنیم که پرتابه حرکت خود را در صفحه‌ی $x-y$ آغاز کند، همواره و برای همیشه حرکت در صفحه‌ی $x-y$ باقی می‌ماند. پس، حرکت دوبعدی است و در رابطه‌ی (۲۱-۴) نیازی به معادله‌ی $\ddot{z} = ۰$ نداریم. $\ddot{x} = ۰$ و $\ddot{y} = -g$ برای توصیف حرکت پرتابه بسنده اند.

توجه کنید که این دو معادله مستقل از یکدیگرند؛ یعنی در معادله‌ی مربوط به $\ddot{x}$ از y خبری نیست و در معادله‌ی مربوط به $\ddot{y}$ هم x وجود ندارد. بنابراین ، حرکت در راستاهای x و y کاملا از یکدیگر مستقل‌اند. آزمایش کلاسیک زیر این استقلال را نشان می‌دهد: گلوله‌ای را افقی شلیک کنید (یا تصور کنید که افقی شلیک شده است). هم‌زمان، گلوله‌ی دیگری را از همان ارتفاع تفنگ رها کنید. کدام گلوله زودتر با زمین برخورد می‌کند؟ (از پسار هوا و خمیدگی زمین چشم‌پوشی کنید.) پاسخ این است که هر دو گلوله هم‌زمان به زمین می‌رسند، زیرا اثر گرانش در راستای حرکت y برای هر دو گلوله یکسان و مستقل از این است که در امتداد محور x چه روی می‌دهد.

اگر مکان و سرعت اولیه (X, Y) و (V_x, V_y) باشند، به آسانی می‌توانیم از معادله‌های حرکت، رابطه‌های (۲۱-۴)، انتگرال بگیریم. خواهیم داشت

$$\dot{x}(t) = V_x \quad , \quad \dot{y}(t) = V_y - gt \qquad (۴-۲۲)$$

اگر یک بار دیگر از رابطه های (۲۲-۴) انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$x(t) = X + V_x t \quad , \quad y(t) = Y + V_y t - \frac{۱}{۲} g t^۲ \qquad (۴-۲۳)$$

معادله‌ی (۲۲-۴) برای سرعت‌ها و معادله‌ی (۲۳-۴) برای مکان‌ها همه‌ی آن چیزی است که برای حل مسئله‌های پرتابی نیاز داریم.

به مسئله با جزئیات بیشتری بنگریم: فرض کنید ذره‌ای به جرم m از مبدأ مختصات با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ در جهتی که با افق زاویه‌ی α می‌سازد پرتاب شده است. چون تنها شتاب موجود در مسئله در راستای محور y ها و برابر با $a_y=-g$ است، بنابراین در راستای محور x ها ذره شتاب ندارد: $a_x=\circ$. پس، معادله‌ی حرکت در راستای محور y ها عبارت است از $m\ddot{y}=-mg$ و در راستای محور x ها داریم $m\ddot{x}=\circ$. درواقع، مسئله را می‌توان دو حرکت یک‌بعدی همزمان پنداشت: یک حرکت شتاب‌دار در راستای محور y ها و دیگری، حرکت در راستای محور x ها که بدون شتاب انجام می‌گیرد و در نتیجه، حرکتی یکنواخت است. مؤلفه‌های بردار سرعت اولیه‌ی $\mathbf{v}_\circ$ در راستای این دو محور عبارت‌اند از

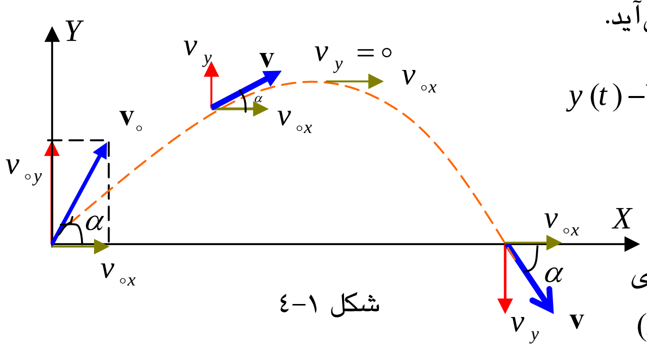
$$V_y\equiv v_{\circ y}=v_\circ\sin\alpha \qquad , \qquad V_x\equiv v_{\circ x}=v_\circ\cos\alpha=\text{ثابت} \tag{٤-٢٤}$$

که با جاگذاری در رابطه‌های (٤-٢٢) و (٤-٢٣) خواهیم داشت

$$v_y(t)=\dot{y}=-gt+v_\circ\sin\alpha \qquad , \qquad v_x(t)=\dot{x}=v_\circ\cos\alpha=\text{ثابت} \tag{٤-٢٥}$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_\circ t\sin\alpha+Y \qquad , \qquad x(t)=v_\circ t\cos\alpha+X \tag{٤-٢٦}$$

معادله‌های (٤-٢٥) و (٤-٢٦) با رابطه‌های (٤-٢٢) و (٤-٢٣) هم‌ارزند. از رابطه‌های (٤-٢٥) می‌بینیم که v_x با زمان تغییر نمی‌کند و همواره با مؤلفه‌ی x سرعت اولیه برابر است؛ چون در راستای محور x ها، شتاب مؤلفه ندارد. اگر زمان t را بین دو رابطه‌ی (٢٦-٥) حذف کنیم، معادله‌ی مسیر حرکت بدست می‌آید.



شکل ١-٤

$$y(t)-Y=-\left(\frac{g}{2v_\circ^2\cos^2\alpha}\right)[x(t)-X]^2+\tan\alpha[x(t)-X] \tag{٤-٢٧}$$

که برای زاویه‌ی $0<\alpha<\pi/2$ درست است.

رابطه‌ی (٤-٢٧) معادله‌ی یک سهمی است (شکل عمومی معادله‌ی سهمی به صورت $y=ax-bx^2$ است.) که از نقطه‌ی (X,Y) می‌گذرد و نشان می‌دهد که مسیر هر پرتابه‌ای یک سهمی است. در شکل (١-٤) این مسیر برای گزینه‌ی $(X,Y)=(0,0)$ نشان داده شده است. مسیر پرتابه با دانستن زاویه‌ی پرتاب α و سرعت اولیه‌ی پرتاب، $\mathbf{v}_\circ$، **کاملاً** شناخته شده است. از رابطه‌ی (٤-٢٥) اندازه‌ی سرعت در هر زمان بدست می‌آید: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ و در هر نقطه‌ی روی مسیر جهت بردار سرعت عبارت است از $\tan\beta=v_y/v_x$. اگر مکان اولیه‌ی پرتابه را در $(X,Y)=(\circ,\circ)$ فرض کنیم آنگاه در پایان پرواز، پرتابه دوباره به $y=\circ$ می‌رسد و با قرار دادن $y=\circ$ در رابطه‌ی (٤-٢٦) زمان پرواز، t_1، را می‌توان حساب کرد. خواهیم داشت

$$y=\circ=-\frac{1}{2}gt_1^2+v_\circ t_1\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad t_1=\frac{2v_\circ}{g}\sin\alpha \tag{٤-٢٨}$$

نقطه‌ی اوج، یا بیشینه ارتفاع پرتابه ، h، را باتوجه به اینکه در نقطه‌ی اوج، سرعت عمودی صفر است می‌توان حساب کرد. از رابطه‌ی (٤٥-٢٥) داریم: $v_y=\dot{y}=\circ=-gt_\circ+v_\circ\sin\alpha$ که در آن $t_\circ$ زمان لازم برای رسیدن پرتابه به نقطه‌ی اوج است:

$$t_\circ=v_\circ\sin\alpha/g \tag{٤-٢٩}$$

اگر این زمان را در معادله‌ی ارتفاع، y ، رابطه‌ی (٤-٢٦)، قرار دهیم خواهیم داشت:

$$y(t_\circ) \equiv (v_\circ \sin\alpha)\frac{v_\circ \sin\alpha}{g} - \frac{۱}{۲} g\left(\frac{v_\circ \sin\alpha}{g}\right)^۲ = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g} \qquad (۴-۳۰)$$

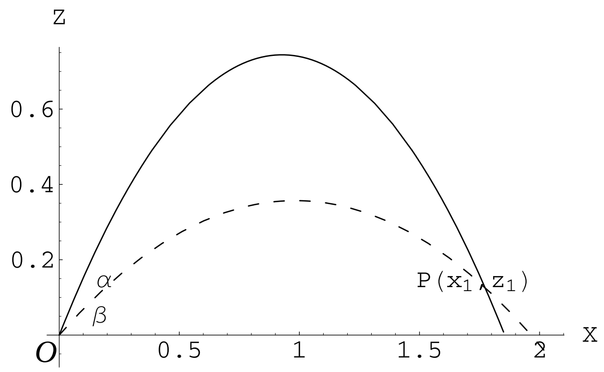
بُرد افقی پرتابه را نیز می‌توان از رابطه‌ی $x = v_\circ t\cos\alpha$ حساب کرد. زمان پرواز (یعنی زمان لازم برای بازگشت پرتابه به ارتفاعی که از آن ارتفاع پرتاب شده است (در این جا $y = ۰$) عبارت است از $t_۱$. اگر $t_۱$ را در $x = v_\circ t\cos\alpha$ قرار دهیم، مسافت افقی پیموده شده (برد R) را به دست می‌آوریم:

$$x = v_\circ t\cos\alpha = x(t_۱) \equiv R = \frac{۲v_\circ^۲}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\alpha \qquad (۴-۳۱)$$

بیشینه‌ی R به ازای $\sin ۲\alpha = ۱$ یا $\alpha = \pi/۴$ به دست می‌آید و برابر است با $R_{max} = v^۲/g$.

توجه کنید که واژه‌های برد و اوج فقط برای مسیر سهمی متقارن تعریف شده است. در مثال ۳-۴ این نکته روشن شده است.

مثال۳- ۴: از تفنگی دو گلوله شکلیک می‌شود. سرعت اولیه‌ی هر دو گلوله $v_\circ$ است. گلوله‌ی نخست با زاویه‌ی α و گلوله‌ی دوم با زاویه‌ی کوچک‌تر β شلیک می‌شوند. فاصله‌ی زمانی بین دو شلیک چقدر باید باشد تا این‌که دو گلوله در هوا باهم برخورد کنند؟



(شکل۲-۴)

حل: نقطه‌ی برخورد را P بنامید و فرض کنید مختصات آن $(x_۱, z_۱)$است. از رابطه $x = v_\circ t\cos\alpha$ می‌توان زمان پرواز هریک از گلوله‌ها از نقطه‌ی O تا P را حساب کرد. داریم:

$$t_\alpha = \frac{x_۱}{v_\circ \cos\alpha} \quad , \quad t_\beta = \frac{x_۱}{v_\circ \cos\beta} \qquad (۴-۳۲)$$

بازه‌ی زمانی Δt بین دو شلیک عبارت است از:

$$\Delta t = t_\alpha - t_\beta = \frac{x_۱}{v_\circ}\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\alpha\,\cos\beta} \qquad (۴-۳۳)$$

برای حذف $x_۱$ باید از معادله‌ی مسیر، رابطه‌ی(۲۷-۴)، استفاده کنیم. چون $y_۱$ هر دو گلوله یکی است ، پس داریم

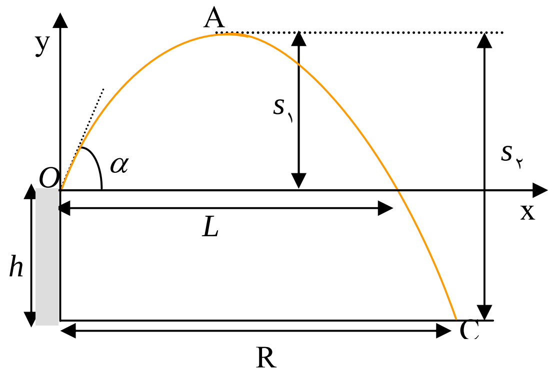
$$x_۱\tan\alpha - \frac{g\,x_۱^۲}{۲v_\circ^۲\cos^۲\alpha} = x_۱\tan\beta - \frac{g\,x_۱^۲}{۲v_\circ^۲\cos^۲\beta} \quad \Rightarrow \quad x_۱ = \frac{۲v_\circ^۲}{g}\frac{(\cos^۲\alpha\cos^۲\beta)(\tan\alpha - \tan\beta)}{\cos^۲\beta - \cos^۲\alpha} \qquad (۴-۳۴)$$

که اگر در رابطه‌ی (۳۲-۴) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\Delta t = \frac{۲v_\circ}{g}\frac{(\cos\alpha\cos\beta)(\tan\alpha - \tan\beta)}{\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{۲v_\circ}{g}\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta - \cos\alpha} \qquad (۴-۳۵)$$

مثال ۴-۴ گلوله‌ای از بالای صخره‌ای به ارتفاع h شلیک می‌شود. سرعت اولیه‌ی گلوله $v_\circ$ و زاویه‌ی پرتاب آن α است (شکل ۳-۴) . گلوله در چه فاصله‌ای از پای صخره با زمین برخورد می‌کند؟

حل: مبداء مختصات را نقطه‌ی شلیک گلوله انتخاب کنید. اگر $t_\circ$ زمان پرواز کل گلوله باشد، می‌دانیم که فاصله‌ی R برابر است



شکل ۳-۴

با $R = v_0 t_0 \cos\alpha$. اما داریم $t_0 = t_1 + t_2$ که در آن t_1 زمان لازم برای رسیدن گلوله از نقطه‌ی O به نقطه‌ی A و t_2 زمانی است که گلوله از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C می رسد. ارتفاع نقطه‌ی اوج، A، از سطح زمین را s_2 بنامید. می توانیم بنویسیم

$$s_2 = \frac{1}{2} g\, t_2^2 = s_1 + h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} + h \qquad (۴-۳۶)$$

و از اینجا داریم:

$$t_2 = \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \qquad (۴-۳۷)$$

پس، باتوجه به این که $t_1 = v_0 \sin\alpha / g$ ، خواهیم داشت:

$$R = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left[v_0 \sin\alpha + \left(v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh\right)^{1/2}\right] \qquad (۴-۳۸)$$

مثال ۵-۴ (الف): توپی با سرعت اولیه‌ی V از سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد تا در هنگام برخورد با زمین، توپ بیشترین فاصله‌ی افقی را پیموده باشد؟ زمین را تخت فرض کنید.

(ب): اگر شیب زمین رو به بالا و برابر زاویه‌ی β (یا شیب رو به پایین، اگر β منفی باشد) باشد، زاویه‌ی پرتاب بهینه چیست؟

حل: **(الف)** زاویه‌ی پرتاب را θ بنامید. سرعت افقی پرتابه همواره $V_x = V\cos\theta$ است. سرعت اولیه‌ی عمودی برابر است با $V_y = V\sin\theta$. اولین چیزی را که باید بیابیم زمانی است که پرتابه در هوا سپری می‌کند. آن را t بنامید. می‌دانیم که سرعت عمودی در زمان $t/2$ به صفر می‌رسد (یعنی $\dot{y}(t/2) = 0$) چون می‌کند؛ چون در نقطه‌ی اوج، حرکت پرتابه افقی است. بنابراین، از رابطه‌ی (۴-۲۲) داریم $V_y = g(t/2)$ و در نتیجه $t = 2V_y/g$. (**توجه** : می‌توانستیم زمان پرواز را از رابطه‌ی (۴-۲۳) هم به دست آوریم که می‌گوید وقتی توپ به زمین می‌رسد، $V_y t = gt^2/2$ است. در بخش (ب) ناگزیریم از این روش استفاده کنیم؛ چون مسیر توپ متقارن نیست) . مسافت افقی پیموده شده را رابطه‌ی (۴-۲۲) به ما می‌دهد و داریم $d = V_x t$. اگر به جای t مقدارش، $t = 2V_y/g$ ، را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$d = \frac{2V_x V_y}{g} = \frac{V^2(2\sin\theta\cos\theta)}{g} = \frac{V^2\sin 2\theta}{g} \qquad (۴-۳۹)$$

بیشینه‌ی $\sin 2\theta$ در $\theta = \pi/4$ است. بنابراین، بیشینه مسافت $d_{max} = V^2/g$ است.

نکته: می‌توان نشان داد که بیشینه ارتفاع به ازای $\theta = \pi/4$ برابر $V^2/4g$ است. این مقدار نصف ارتفاع بیشینه حالتی است که توپ عمودی به هوا پرتاب شود. توجه کنید که هر مسافت ممکنی را که بخواهید در این مسئله حساب کنید، بنا به تحلیل ابعادی، باید با V^2/g متناسب باشد و تنها باید ضریب عددی را بیابید.

(ب) : در اینجا هم مانند بخش (الف) نخست باید زمان t را که توپ در هوا سپری می‌کند، بیابیم. اگر شیب زمین β باشد، آنگاه معادله‌ی خط زمین (شیب) $y = (\tan\beta)x$ است. مسیر توپ برحسب t با رابطه‌های زیر داده می‌شود

$$x = (V\cos\theta)t \qquad , \qquad y = (V\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۴۰-۴}$$

که در آن θ زاویه‌ی پرتاب است و نسبت به افق (و نه نسبت به زمین) اندازه گیری می‌شود. ما به دنبال یافتن زمانی هستیم که به ازای آن $y = (\tan\beta)x$ باشد، چون در این زمان مسیر توپ و خط زمین با هم تلاقی می‌کنند. با استفاده از رابطه‌ی (۴۰-۴) دیده می‌شود که

$$(\tan\beta)x = (V\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad (\tan\beta)(Vt\cos\theta) = (V\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۴۱-۴}$$

از این رابطه‌ها می‌توان t را به دست آورد.

$$t = \frac{2V}{g}(\sin\theta - \tan\beta\cos\theta) \tag{۴۲-۴}$$

(البته $t = 0$ هم پاسخ است). با جاگذاری این مقدار t در معادله‌ی مربوط به x، رابطه‌ی (۴۰-۴)، فاصله‌ی افقی به دست می‌آید

$$x = \frac{2V^2}{g}(\sin\theta\cos\theta - \tan\beta\cos^2\theta) \tag{۴۳-۴}$$

حالا باید این رابطه را برای x بیشینه کنیم تا بیشینه مسافت در روی خط زمین (زمین شیب‌دار) به دست بیاید. برای این کار از رابطه‌ی (۴۳-۴) نسبت به θ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ خواهیم داشت $\tan\beta = -\cot 2\theta$ که اگر آن را به صورت $\tan\beta = -\tan(\pi/2 - 2\theta)$ بازنویسی کنیم، به دست می‌آید: $\beta = -(\pi/2 - 2\theta)$ ودر نتیجه

$$\theta = \frac{1}{2}(\beta + \frac{\pi}{2}) \tag{۴۴-۴}$$

چند نکته:

۱. به ازای $\beta \approx \pi/2$ داریم $\theta \approx \pi/2$. برای $\beta = 0$، داریم $\theta = \pi/4$. به ازای $\beta = -\pi/2$ داریم $\theta \approx 0$ که همگی پذیرفتنی‌اند.

۲. واقعیت جالب در باره‌ی حرکت پرتابی برای مسافت بیشینه این است که سرعت‌های اولیه و نهایی برهم عمود اند. نمایش این را به مسئله‌ها واگذارمی‌کنیم.

۳. با جاگذاری مقدار θ از رابطه‌ی (۴۴-۴) در رابطه‌ی (۴۳-۴) و با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که مسافت بیشینه‌ی پیموده شده در امتداد (شیب)، زمین شیب‌دار عبارت است از

$$d = \frac{x}{\cos\beta} = \frac{V^2/g}{1 + \sin\beta} \tag{۴۵-۴}$$

یا $V^2 = g(d + d\sin\beta)$. تفسیر این نتیجه از این قرار است: برای این که پرتابه بتواند از دیواری به بلندی h در فاصله‌ی L از نقطه‌ی پرتاب بگذرد باید کمینه سرعت آن $V^2 = g(\sqrt{L^2 + h^2} + h)$ باشد که با حدهای $h \to 0$ و $L \to 0$ همخوانی دارد.

۳-۴ حرکت در حضور نیروی پسار

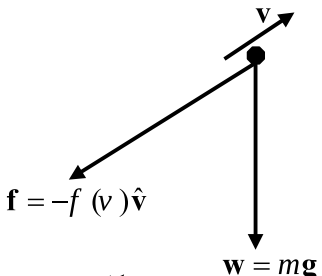
در آغاز بخش۲-۴ گفتم که بیشتر وقت‌ها جهت نیروی پسار در خلاف جهت سرعت جسمی است که حرکت می‌کند و از این رو،

حرکت جسم را دشوار می‌کند. حالت‌هایی هم وجود دارد که نیروی پسار مولفه‌ی بزرگی در راستایی غیر از راستای سرعت دارد؛ مانند نیروی پسار وارد به بال هواپیما. در این بخش می‌خواهیم حرکت جسم را (پرتابه را) در حضور نیروی پسار بررسی کنیم. اما فقط حالتی را در نظر خواهیم گرفت که این نیرو در راستای سرعت و در خلاف جهت آن است. یعنی فرض می‌کنیم که در جهت‌های دیگرمولفه‌ای ندارد. این وضعیت در شکل (٤-٤) نشان و با رابطه‌ی (٤-٤٦) بیان شده است.

$$\mathbf{f} = -f(v)\,\hat{\mathbf{v}} \qquad (٤-٤٦)$$

در این رابطه، $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ بردار یکه در راستای $\mathbf{v}$ است و $f(v)$ اندازه‌ی نیروی $\mathbf{f}$ است. تغییرات تابع $f(v)$ با سرعت می‌تواند پیچیده باشد. این پیچیدگی به ویژه هنگامی است که سرعت پرتابه به سرعت صوت نزدیک می‌شود. با وجود این، برای سرعت‌های کم با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم

$$f(v) = bv + cv^2 = f_{\text{lin}} + f_{\text{quad}} \qquad (٤-٤٧)$$



شکل ٤-٤

که در آن f_{lin} و f_{quad} به ترتیب جمله‌های متناسب با مرتبه‌ی اول و دوم سرعت‌اند. از نظر ریاضی رابطه‌ی (٤-٤٧) بدیهی است. هر تابع خوش رفتار f را می‌توان بسط تیلور داد: $f = a + bv + cv^2 + \cdots$. اگر v به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، سه جمله‌ی نخست باید تقریب خوبی از تابع $f(v)$ به دست بدهد. چون به ازای $v = 0$ داریم $f = 0$، پس جمله‌ی ثابت a باید صفر باشد. منشاء فیزیکی f_{lin} و f_{quad} متفاوت‌اند. جمله‌ی خطی f_{lin} نتیجه‌ی گران‌روی محیط است و عموما با گران‌روی و بزرگی جسم متناسب است. جمله‌ی مرتبه‌ی دوم ، f_{quad} ، از اینجا ناشی می‌شود که پرتابه به طور پیوسته با ذرات محیط برخورد می‌کند و به آنها شتاب می‌دهد. برای پرتابه‌ای کروی (مانند توپ یا قطره‌ی باران) ضرایب b و c در رابطه‌ی (٤-٤٧) به صورت زیرند

$$b = \beta D \qquad , \qquad c = \gamma D^2 \qquad (٤-٤٨)$$

D قطر کره است و ضریب‌های β و γ به سرشت محیط بستگی دارند. برای پرتابه‌ی کروی در هوا و در شرایط متعارف به تقریب داریم

$$\gamma = 0{,}25\ \mathrm{N\cdot s^2/m^4} \quad \text{و} \quad \beta = 1{,}6\times 10^{-4}\ \mathrm{N\cdot s/m^2} \qquad (٤-٤٩)$$

شیوه‌ی محاسبه‌ی این ثابت‌ها به مسئله‌ها واگذار شده است. به یاد داشته باشید که این مقدارها تنها برای جسم کروی که در شرایط متعارف در هوا حرکت می‌کنند درست‌اند. با وجود این، آنها تصویری تقریبی از اهمیت نیروی پسار، حتی برای اجسام غیرکروی، ارایه می‌دهند که در شاره‌های (مایع‌ها یا گازها) مختلف با دما وفشار معمولی حرکت می‌کنند.

بیشتر وقت ها یکی از این دو جمله‌ی رابطه‌ی (٤-٤٧) را در مقایسه با جمله‌ی دیگر نادیده می‌گیریم. این کار حل معادله‌ی قانون دوم نیوتون را ساده می‌کند. اما باید تصمیم بگیریم که کدام جمله نسبت به دیگری پراهمت است و از کدام یک می‌توان چشم پوشید. برای این کار باید این دو جمله را با هم مقایسه بکنیم: اگر مقدارهای داده شده در رابطه‌ی (٤-٤٩) را برای کره‌ای در هوا به کار ببریم کافی است تنها به جای D و v در رابطه‌ی زیر مقدار بگذاریم تا بدانیم از کدام جمله در برابر جمله‌ی دیگر می‌توان چشم‌پوشی کرد.

$$\frac{f_{quad}}{f_{lin}}=\frac{cv^{2}}{bv}=\frac{\gamma D}{\beta}v=(1{,}6\times10^{3}\ \mathrm{s/m^{2}})Dv \qquad (4-50)$$

مثال زیر این را نشان می‌دهد.

مثال ۶-۴ (توپ و قطره مایع): اهمیت نسبی جمله‌های خطی و مرتبه دو نیروی پسار را برای توپی به قطر $D=7\,\mathrm{cm}$ که با سرعت کم $v=5\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند، ارزیابی کنید. همین کار را برای قطره‌ی باران ($D=1\,\mathrm{mm}$ و $v=0{,}6\,\mathrm{m/s}$) و نیز برای قطره‌ی ریز روغن که در آزمایش میلیکان استفاده می‌شود ($D=1{,}5\,\mu\mathrm{m}$ و $v=5\times10^{-5}\,\mathrm{m/s}$) انجام دهید.

حل: اگر مقدارهای داده شده در رابطه‌ی (۴-۴۹) را در (۴-۵۰) جاگذاری کنیم (یادمان باشد که قطر را به متر تبدیل کنیم) برای توپ خواهیم داشت $f_{\rm quad}/f_{\rm lin}\approx 600$. پس، روشن است که برای توپ می‌توان از جمله‌ی مرتبه‌ی اول چشم‌پوشی کرد و کافی است فقط جمله‌ی مرتبه‌ی دو نیروی پسار را در نظر گرفت. اگر سرعت توپ زیاد می‌بود، نسبت $f_{\rm quad}/f_{\rm lin}$ حتی بزرگتر هم می‌شد. در سرعت‌های کم این نسبت خیلی بزرگ نیست، اگرچه، حتی برای $v=1\,\mathrm{m/s}$ اندازه‌ی آن ۱۰۰ است. در حقیقت، اگر v به اندازه‌ی کافی کو.چک باشد جمله‌ی خطی با جمله‌ی مرتبه‌ی دو قابل مقایسه می‌شود و هر دو جمله بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی می‌شوند. بنابراین، برای توپ و هر جسم همانند، همیشه به تقریب می‌توان از $f_{\rm lin}$ چشم پوشید و نیروی پسار را به صورت زیر پنداشت

$$\mathbf{f}=-cv^{2}\,\hat{\mathbf{v}} \qquad (4-51)$$

برای قطره‌ی باران داریم $f_{\rm quad}/f_{\rm lin}\approx 1$. پس، برای قطره‌ی باران دو جمله از یک مرتبه‌ی بزرگی‌اند و از هیچ کدام نمی‌توان چشم پوشی کرد و از این رو حل معادله‌ی حرکت هم دشوارتر است. اگر قطره خیلی بزرگ‌تر می‌بود و یا بسیار تندتر حرکت می‌کرد، جمله‌ی خطی قابل چشم پوشی می‌شد. اگر قطره خیلی کوچک‌تر می‌بود و یا بسیار آهسته‌تر حرکت می‌کرد، آنگاه از جمله‌ی مرتبه دو می‌توانستیم چشم بپوشیم . اما در حالت کلی برای قطره باران و اجسام همانند باید هر دو جمله‌ی $f_{\rm lin}$ و $f_{\rm quad}$ را در نظر گرفت. در مورد قطره روغن آزمایش میلیکان داریم $f_{\rm quad}/f_{\rm lin}\approx 10^{-7}$. در این حالت به کلی می‌توان از جمله‌ی مرتبه دو چشم پوشید و نیروی پسار را به صورت $\mathbf{f}=-bv\,\hat{\mathbf{v}}=-b\,\mathbf{v}$ در نظر گرفت.

پیام این مثال روشن است: نخست، برای برخی اجسام نیروی پسار خطی برجسته است و می‌توان از جمله‌ی مرتبه دو چشم پوشی کرد، به ویژه برای قطره مایع در هوا. اما برای اجسام اندکی درشت هم که در مایع با گران‌روی زیاد حرکت می‌کنند، مانند حرکت بلبرینگی در شیره ، می‌توان از نیروی پسار مرتبه‌ی دو چشم پوشید. از سوی دیگر برای بیشتر اجسام، مانند توپ تنیس، گلوله‌ی توپ و حتی برای انسانی که سقوط آزاد می‌کند، نیروی پسار چیره‌ی جمله‌ی مرتبه‌ی دو آن است. در این وضعیت‌ها می‌توان نیروی پسار خطی را نادیده گرفت. این وضعیت اندکی ناخوشایند است ؛ چون حل معادله‌ی حرکت نیوتون برای نیروی پسار خطی آسان‌تر از حل آن برای نیروی پسار مرتبه دو است.

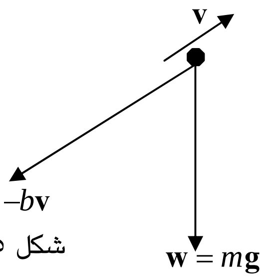
در پایان این بخش پیش‌گفتارمانند، به جاست که از *عدد راینولد* نام ببرم؛ پارامتر مهمی که در بحث‌های پیشرفته‌تر حرکت در شاره‌ها نمود پیدا می‌کند. همان طور که گفتیم، نیروی پسار خطی را می‌توان به گران‌روی محیطی که پرتابه در آن حرکت

می‌کند مربوط کرد . نیروی پسار مرتبه دو به لختی و در نتیجه به چگالی شاره مربوط است. بنابراین، می توان نسبت $f_{\text{quad}}/f_{\text{lin}}$ را به پارامترهای بنیادی η (گران‌روی) و چگالی شاره، ρ، مربوط کرد. به تقریب، مرتبه‌ی بزرگی نسبت f_{quad}/f_{lin} با عدد بدون بُعد $R \equiv Dv\,\rho/\eta$ قابل مقایسه است که عدد راینولد نام دارد. پس هر گاه عدد راینولد بزرگ باشد نیروی پسار مرتبه دو f_{quad} چیره است و اگر R کو‌چک باشد نیروی خطی f_{lin} برجسته است.

۴-۴ نیروی پسار خطی

وضعیتی را در نظر بگیرید که نیروی مقاومت هوا با مرتبه‌ی اول سرعت متناسب است: $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$. برای این نیرو حل معادله‌ی حرکت ساده است و حل عمومی آن در بخش ٤-١ توصیف شد. به پرتابه دو نیرو وارد می‌شود که در شکل (٤-٥) نشان داده شده‌اند. برای این پرتابه، قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، به صورت زیر درمی‌آید

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \qquad (٤-٥٢)$$



شکل ٤-٥

جنبه‌ی گیرای این رابطه از این قرار است: هیچ یک از جمله‌های سمت راست آن به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد. پس، در معادله‌ی حرکت $\mathbf{r}$ وجود ندارد (تنها مشتق مرتبه اول و دوم $\mathbf{r}$ وجود دارند.) در نتیجه، می‌توانیم $\ddot{\mathbf{r}}$ را به صورت $\dot{\mathbf{v}}$ بنویسیم. رابطه‌ی (٤-٥٢) به صورت زیر درمی‌آید

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \qquad (٤-٥٣)$$

که نسبت به $\mathbf{v}$ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است. ساده شدن معادله‌ی حرکت به این خاطر است که نیروها تنها به $\mathbf{v}$ وابسته‌اند و نه به $\mathbf{r}$. این یعنی باید معادله‌ی دیفرانسیل خطی را حل کنیم و سپس از آن انتگرال بگیریم و $\mathbf{r}$ را بیابیم. شاید مهم‌ترین جنبه‌ی ساده شدن معادله‌ی حرکت برای نیروی پسار خطی این است که معادله‌ی حرکت به آسانی به مولفه‌هایش تجزیه می‌شود. برای نمونه ، اگر جهت مثبت x را به سوی راست و جهت مثبت y را رو به پایین برگزینیم، رابطه‌ی (٤-٥٣) به دو معادله‌ی زیر تجزیه می‌شود.

$$m\dot{v}_y = mg - bv_y \qquad , \qquad m\dot{v}_x = -bv_x \qquad (٤-٥٤)$$

یعنی دو معادله‌ی جدا از هم به دست می‌آید، یکی برای v_x و دیگری برای v_y . در معادله‌ی v_x ، دیگر v_y وجود ندارد و در معادله‌ی v_y هم v_x نیست. توجه به این نکته مهم است که بدانیم چنین وضعیتی به خاطر این است که نیروی پسار نسبت به $\mathbf{v}$ خطی است. برای مثال، اگر نیروی پسار از مرتبه‌ی دو می بود

$$\mathbf{f} = -cv^{٢}\hat{\mathbf{v}} = -cv\mathbf{v} = -c\sqrt{v_x^{٢} + v_y^{٢}}\,\mathbf{v} \qquad (٤-٥٥)$$

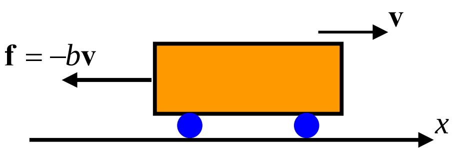
می‌بایست در رابطه‌ی (٤-٥٣) ، $-b\mathbf{v}$ را با رابطه‌ی (٤-٥١) جایگزین می‌کردیم. به جای دو معادله‌ی (٤-٥٤) آنگاه دو رابطه‌ی زیر به دست می‌آمدند.

$$m\dot{v}_x = -c\sqrt{v_x^{٢} + v_y^{٢}}\,v_x \qquad , \qquad m\dot{v}_y = mg - c\sqrt{v_x^{٢} + v_y^{٢}}\,v_y \qquad (٤-٥٦)$$

در هر یک از این معادله‌ها، هم v_x و هم v_y وجود دارد. اینها معادله‌های دیفرانسیل جفت شده‌اند و حل‌شان دشوارتر است.

چون رابطه‌های (٤-٥٤) جدا از هماند، می‌توان آنها را جدا از هم حل کرد و سپس پاسخ ها را برهم افزود. افزون براین، هر یک از این معادله‌ها مسئله‌ای را تعریف می‌کند که به نوبه‌ی خود جالب است. معادله‌ی مربوی به مولفه‌ی x در رابطه‌ی (٤-٥٣) معادله‌ی حرکت جسمی است (مانند ارابه‌ای که چرخ‌هایش اصطکاک ندارد) که در راستای افقی در محیطی با نیروی پسار خطی حرکت می‌کند. معادله‌ی دیگر در رابطه‌ی (٤-٥٤) معادله‌ی حرکت جسمی (مانند قطره روغن) است که در حضور نیروی پسار (مقاومت هوا) سقوط می‌کند. اینک این دو مسئله را حل می‌کنیم.

۱-۴-۴ حرکت افقی با نیروی پسار خطی



شکل ٦-٤

جسمی مانند ارابه‌ی شکل (٤-٦) را در نظر بگیرید که در محیطی با پسار خطی حرکت می‌کند. فرض کنید در زمان $t=0$ ارابه در $x=0$ و سرعتش $v_x = v_{x\circ}$ است. تنها نیروی وارد به ارابه، نیروی پسار $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$ است و در نتیجه، حرکت ارابه ناگزیر از آهسته شدن است. آهنگ آهسته شدن را رابطه‌ی (٤-٥٤) تعیین می‌کند که شکل عمومی آن به صورت زیر است

$$\dot{v}_x = -kv_x \tag{٤-٥٧}$$

و در آن $k = b/m$ است. این معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است و پاسخ آن می‌تواند تنها یک ثابت دلخواه داشته باشد. اگر $\dot{v}_x \equiv dv_x/dt$ قرار دهیم رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \tag{٤-٥٨}$$

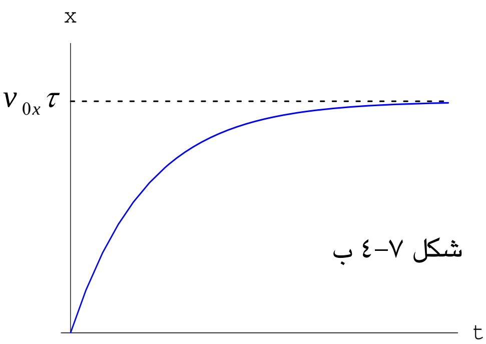
یا

$$\frac{dv_x}{v_x} = -kdt \tag{٤-٥٩}$$

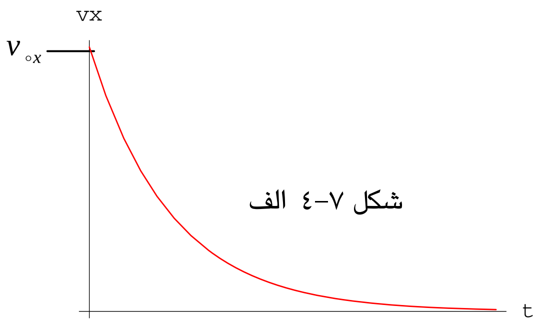
در رابطه ی (٤-٥٩) متغیرها از هم جدا هستند و می‌توان از دو طرف انتگرال گرفت. خواهیم داشت

$$\int_{v_{\circ x}}^{v_x(t)} \frac{dv'_x}{v'_x} = -k\int_{\circ}^{t} dt' \Rightarrow \ln v_x(t) - \ln v_{\circ x} = -kt \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = v_{\circ x}e^{-kt} = v_{\circ x}e^{-t/\tau} \tag{٤-٦٠}$$

پارامتر $\tau \equiv 1/k = m/b$ را برای نیروی پسار خطی معرفی کردم. می‌بینیم که حرکت ارابه به طور نمایی کُند می‌شود. این رفتار در شکل (٧-٤ الف) نشان داده شده است. بعد پارامتر τ زمان است و می‌بینیم که برای $t=\tau$ سرعت به $1/e$ مقدار اولیه‌ی کاهش می‌یابد و به ازای $t\to\infty$ سرعت صفر می‌شود



شکل ٧-٤ ب



شکل ٧-٤ الف

برای یافتن مکان پرتابه برحسب تابعی از زمان، باید از رابطه‌ی (٦٠-٤) یک بار نسبت به زمان انتگرال گرفت. کافی است در رابطه‌ی (٦٠-٤) قرار دهیم $v_x(t)=dx/dt$ و دو طرف را در dx ضرب کنیم. متغیرها از هم جدا می‌شوند و می‌توان انتگرال گرفت:

$$\frac{dx}{dt}=v_{0x}e^{-t/\tau}\Rightarrow dx=v_{0x}e^{-t/\tau}dt \quad\Rightarrow\Rightarrow\quad \int_0^{x(t)}dx=\int_0^t v_{0x}e^{-t'/\tau}dt'$$

$$\Rightarrow x(t)=\left[-v_{0x}\,\tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t=v_{0x}\,\tau(1-e^{-t/\tau}) \qquad (٤-٦١)$$

پس، دیده می‌شود که با آهسته شدن ارابه، مکان آن به مقدار $v_{\circ x}\tau$ میل می‌کند. این رفتار در شکل (٧-٤ ب) دیده می‌شود.

٢-۴-۴ حرکت قائم با نیروی پسار خطی

پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از ارتفاعی رها شده‌است و به آن نیروی پسار خطی هوا هم وارد می شود. پس، به جسم دو نیرو اثر می‌کند: گرانش و پسار هوا و هر دو در راستای قائم‌اند. اگر جهت مثبت y رو به پایین باشد از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ داریم

$$m\dot{v}_y=mg-bv_y \qquad (٤-٦٢)$$

چون در این جا جهت سرعت رو به پایین است ($v_y>\circ$) بنابراین، نیروی بازدارنده پسار رو به بالا و نیروی گرانش رو به پاین است. اگر v_y کوچک باشد، نیروی گرانش پراهمیت‌تر از نیروی پسار می‌شود و جسم افتان، رو به پایین شتابیده می‌شود. این رفتار ادامه می‌یابد تا این که با افزایش سرعت نیروی پسار بزرگ و بزرگ‌تر و با نیروی گرانش ترازمند شود. سرعتی که این ترازمندی به ازای آن برقرار می‌شود به سادگی از رابطه‌ی (٦٢-٤) به دست می‌آید. کافی است سمت راست معادله را برابر صفر قرار دهیم (یعنی برآیند دو نیرو صفر باشد). خواهیم داشت $mg-bv_y=\circ\Rightarrow v_y=mg/b$. سرعت

$$v_{term}\equiv v_y=mg/b \qquad (٤-٦٣)$$

سرعت حد، v_{ter} ، نام دارد. پس از آن که سرعت جسم به این مقدار حدی رسید با همین سرعت به فروافتادن خود ادامه می‌دهد. چون سرعت حد به b و m بستگی دارد ، اندازه‌ی آن برای اجسام مختلف متفاوت است. برای مثال، اگر شکل و ابعاد دو جسم یکسان باشد (b برای هر دو یکسان) سرعت حد جسم پرجرم بیشتر می‌شود، و این چیزی است که انتظار داریم.

مثال ٧-۴ (سرعت حد قطره مایع کوچک): سرعت حد قطره روغن کوچک آزمایش میلیکان (به قطر $D=١{,}٥\mu\text{m}$، چگالی $\rho=٨٤٠\ \text{kg/m}^٣$) را بیابید. این کار را برای قطره شبنمی به قطر $D=٠{,}٢\text{mm}$ هم انجام دهید.

حل: از مثال ٤-٤ می‌دانیم که نیروی پسار خطی در مورد این اجسام برجسته اند. بنابراین ، سرعت حد با رابطه‌ی (٦٣-٤) داده می‌شود. بنا به رابطه‌ی (٤٨-٤)، $b=\beta D$ است. در یکاهای SI $\beta=١{,}٦\times١٠^{-٤}$ است. جرم قطره $m=\rho D^٣/٦$ است. پس ، برای نیروی پسار از رابطه‌ی (٦٣-٤) به دست می‌آید

$$v_{ter}=\frac{\rho\pi D^٢ g}{٦\beta} \qquad (٤-٦٤)$$

این نتیجه‌ی جالبی است و نشان می‌دهد که برای چگالی معینی، سرعت حد با $D^٢$ متناسب است. یعنی وقتی سرعت افزایش یافت و نیروی پسار مهم شد، کره‌ی بزرگتر تندتر از یک کره‌ی کو‌چک، اما با همان چگالی، فرو می‌افتد. به زبان اعداد، برای قطره روغن داریم

$$v_{\text{term}} = \frac{(840)\times\pi\times(1.5\times10^{-6})^{2}\times(9.8)}{6\times(1.6\times10^{-4})} = 6.1\times10^{-5}\ \text{m/s} \qquad (۴-۶۵)$$

در آزمایش میلیکان قطره روغن به طور فزاینده کندتر فرو می‌افتد و می‌توان با استفاده از میکروسکپ سرعت آن اندازه گرفت. برای قطره‌ی شبنم خواهیم داشت $v_{\text{term}} = 1.3\ \text{m/s}$ و این سرعت قطره‌های ریز باران است. برای قطره‌های درشت باران سرعت حد به طور چشم‌گیری بیشتر است؛ برای قطره‌ی درشت (و تند) ناگزیریم که جمله‌ی مرتبه دو را هم در معادله‌ی حرکت در نظر بگیریم تا بتوانیم سرعت حد قابل اعتمادی به دست آوریم.

تا کنون در باره‌ی سرعت حد پرتابه‌ای که قائم حرکت می‌کند سخن گفتیم. اما به جاست که بگوییم چگونه پرتابه به این سرعت می‌رسد. این با معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی (۴-۶۲)، تعیین می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت (به یاد بیاورید که $v_{\text{term}} = mg/b$).

$$m\dot{v}_y = -b\,(v_y - v_{ter}) \qquad (۴-۶۶)$$

این معادله‌ی دیفرانسیل را می‌توان به روش‌های گوناگون حل کرد. آسان‌ترین روش این است که به شباهت آن با معادله‌ی (۴-۵۳) توجه کنیم که در سمت راست به جای v_x حالا $(v_y - v_{\text{term}})$ نشسته است. پاسخ معادله‌ی (۴-۵۴) یک تابع نمایی بود. شگرد حل معادله‌ی کنونی این است که متغیر جدید $u \equiv (v_y - v_{\text{ter}})$ را تعریف کنیم. این متغیر در معادله‌ی $m\dot{u} = -bu$ صدق می‌کند (چون v_{term} مقدار ثابتی است). پس ، پاسخ معادله ی (۴-۶۶) عبارت است از

$$v_y - v_{\text{term}} = Ae^{-t/\tau} \qquad (۴-۶۷)$$

اگر در زمان $t = 0$ داشته باشیم $v_y = v_{0y}$ ؛ آنگاه $A = v_{0y} - v_{\text{term}}$ می‌شود و پاسخ نهایی v_y برحسب زمان عبارت است از

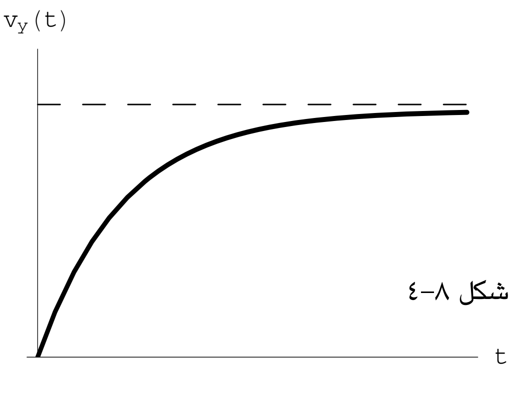
$$v_y(t) = v_{\text{term}} + (v_{0y} - v_{\text{term}})e^{-t/\tau} \qquad (۴-۶۸)$$

$$= v_{0y}e^{-t/\tau} + v_{\text{term}}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (۴-۶۹)$$

رابطه‌ی (۴-۶۹) سرعت $v_y(t)$ را به صورت جمع دو جمله به دست می‌دهد: برای $t = 0$ جمله‌ی اول برابر است با v_{0y} ، اما با افزایش t به صفر می‌گراید. جمله‌ی دوم هنگامی صفر می‌شود که $t = 0$ باشد، اما برای $t \to \infty$ به v_{term} میل می‌کند . به ویژه ، برای $t \to \infty$ داریم $v_y(t) \to v_{\text{term}}$.

بگذارید نتیجه‌ی (۴-۶۹) را برای حالتی که $v_{0y} = 0$ است (یعنی پرتابه از حالت سکون رها شود) اندکی بیشتر بررسی کنیم. برای این حالت رابطه‌ی (۴-۶۹) به شکل زیر درمی‌آید

$$v_y(t) = v_{\text{term}}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (۴-۷۰)$$



شکل ۸-۴

در شکل (۸-۴) این رابطه رسم داده شده است. می‌بینیم که v_y در زمان $t = 0$ از صفرآغاز می‌شود و به طور مجانبی با $t \to \infty$ به سرعت حد $v_y \to v_{\text{term}}$ میل می‌کند. اهمیت τ را برای جسم افتان به آسانی می‌توان از رابطه‌ی (۴-۷۰) دید. هنگامی که $t = \tau$ است، می بینیم که $v_y = v_{\text{term}}(1 - e^{-1}) = 0.63v_{\text{term}}$ است. این یعنی در زمان τ سرعت

جسم به٦٣٪ سرعت حد رسیده است. محاسبه‌های همانندی را می‌توان برای زمان‌های $t=0$ ، $t=2\tau$ و غیره انجام داد. در زمان $t=3\tau$ سرعت جسم به ۹۵٪ سرعت حد می رسد. البته سرعت جسم هرگز به سرعت حد نمی‌رسد مگر در $t=\infty$. با وجوداین ، زمان مشخصه‌ی τ سنجه‌ی خوبی است برای این که بدانیم سرعت جسم با چه آهنگی به v_{term} می‌گراید.

مثال ۸-۴ (زمان مشخصه برای دو قطره مایع): زمان مشخصه، τ، را برای قطره روغن وقطره شبنم مثال (٤-٥) حساب کنید.

حل: زمان مشخصه، τ، با $\tau\equiv 1/k=m/b$ تعریف شد و v_{ter} با رابطه‌ی (٤-٦٣) به صورت $v_{ter}=mg/b$ داده شده است. پس، می‌توان رابطه‌ی سودمند زیر را نوشت

$$v_{\text{term}}=g\tau \qquad (٤-٧١)$$

توجه کنید که این رابطه اجازه می‌دهد تا به v_{term} به صورت سرعتی بنگریم که *اگر جسم افتان شتاب ثابتی برابر g می‌داشت* در زمان τ به دست می‌آورد. همچنین توجه کنید که زمان τ سنجه‌ی وارونی است که اهمیت نیروی پسار را نشان می‌دهد: هنگامی که ضریب b مقاومت هوا کوچک است هردو v_{term} و τ بزرگ‌اند و هنگامی که ضریب b بزرگ است، هردوی v_{term} و τ کوچک‌اند.

برای هدف کنونی ما اهمیت رابطه‌ی (٤-٧١) این است: چون سرعت‌های حد هر دو قطره را حساب کرده‌ایم، می‌توان از آن استفاده کرد و τ را به دست آورد. برای قطره روغن در آزمایش میلیکان داریم $v_{\text{term}}=6{,}1\times10^{-5}\ \text{m/s}$ و برای قطره شبنم $v_{\text{term}}=1{,}3\ \text{m/s}$ است. پس برای قطره روغن داریم

$$\tau=\frac{v_{\text{term}}}{g}=\frac{6{,}1\times10^{-5}}{9{,}8}=6{,}2\times10^{-6}\text{s} \qquad (٣-٧٢)$$

و برای شبنم $\tau=v_{\text{term}}/g=0{,}13\text{s}$.

مهم نیست که حرکت جسم افتان از حالت سکون آغاز شود یا نه؛ همیشه می‌توان مکان y آن را به صورت تابعی از زمان یافت. کافی است از رابطه‌ی (٤-٦٩) انتگرال گرفت.

$$v_y(t)=v_{\text{term}}+(v_{\circ y}-v_{\text{term}})e^{-t/\tau} \qquad (٤-٦٩)$$

با فرض این که جایگاه اولیه‌ی پرتابه $y=0$ است ، خواهیم داشت

$$y(t)=\int_\circ^t v_y(t')dt'=v_{\text{term}}t+(v_{\circ y}-v_{\text{term}})\tau(1-e^{-t/\tau}) \qquad (٤-٧٣)$$

اینک می‌توان این معادله را با معادله‌ی (٤-٦١) برای $x(t)$ ترکیب کرد و در محیط با پسارخطی، مدار هر پرتابه‌ای را که هم حرکت افقی و هم عمودی دارد، حساب کرد. این کار را در بخش ٤-٥ انجام می‌دهیم.

۴-۵ مسیر و بُرد در محیط پسار خطی

در آغاز بخش ٤-٤ حرکت پرتابه‌ای که در جهت دلخواهی حرکت می‌کرد، بررسی شد. دیدیم که می‌توان معادله‌های حرکت را

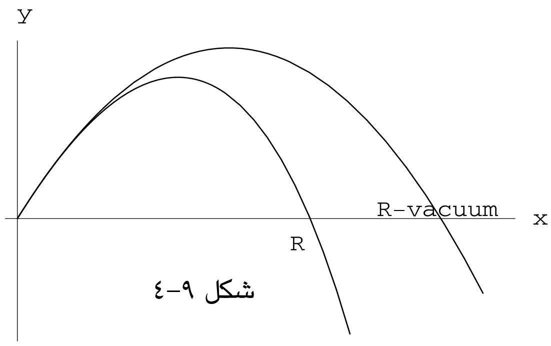
به دو راستای حرکت جدا از هم تجزیه کرد : یکی برای حرکت افقی و دیگری برای حرکت عمودی پرتابه. معادله‌های حرکت با رابطه‌های (۴-۵۴) داده شد. این دو معادله را حل کردیم و پاسخ‌شان را با رابطه‌های (۴-۶۱) و (۴-۷۳) بیان کردیم. حالا می‌خواهیم این پاسخ ها را با هم ترکیب کنیم و مسیر هر پرتابه‌ی دلخواهی را که در راستایی دلخواه در محیطی با پسار خطی حرکت می‌کند به دست آوریم. در بحث حاضر اندکی به صرفه است که جهت مثبت y را *رو به بالا* انتخاب کنیم. در این صورت باید علامت v_{term} را عوض کنیم (یقین پیدا کنید که این نکته را می‌فهمید). دو معادله‌ی مسیر حالا به صورت زیر درمی‌آیند

$$x(t)=v_{\circ x}\,\tau(1-e^{-t/\tau})$$
$$y(t)=(v_{\circ y}+v_{\text{term}})\,\tau(1-e^{-t/\tau})-v_{\text{term}}t \qquad (۴-۷۴)$$

اگر از معادله‌ی اول t را به دست آوریم و در دومی قرار دهیم، t بین این دو معادله حذف می‌شود و معادله‌ی مسیر یا مدار پرتابه به دست می‌آید. خواهیم داشت

$$y=\frac{v_{\circ y}+v_{\text{term}}}{v_{\circ x}}x+v_{\text{term}}\tau\ell n(1-\frac{x}{v_{\circ x}\tau}) \qquad (۴-۷۵)$$

این رابطه پیچیده‌تر از آن به نظر می‌رسد که روشنگر باشد. من آن را به همراه حالتی که مقاومت هوا وجود ندارد در شکل (۹-۴) رسم کرده‌ام. به یاری این شکل می‌توان برخی جنبه‌های رابطه‌ی (۷۵-۴) را دید. برای مثال، اگر به جمله‌ی دوم سمت راست نگاه کنید، می‌بینید که با $x\to v_{\circ x}\tau$ شناسه‌ی تابع لگاریتمی به صفر میل می کند و در نتیجه جمله‌ی لگاریتمی و y هردو به ∞ می‌گرایند. یعنی مسیر در $x=v_{\circ x}\tau$ یک مجانب عمودی دارد (که در شکل نشان داده نشده است). به عنوان تمرین ببینید که اگر نیروی پسار را کم کنید وسرانجام به صفر برسانید؛ مسیر پرتابه به مسیر بدون نیروی پسار میل می کند.



شکل ۹-۴

- **برد افقی**

همان‌گونه که در آغاز حرکت پرتابی دیدید، در نبود نیروی پسار (یعنی در خلاء) برد پرتابه به صورت

$$R_{vac}=\frac{2v_{\circ x}v_{\circ y}}{g} \qquad \text{(خلاء)} \qquad (۴-۷۶)$$

است. می‌خواهیم ببینیم این رابطه در حضور نیروی پسار چگونه تغییر می‌کند. برد R مقدار x به ازای $y=0$ ، در رابطه‌ی (۷۵-۴) ، است. پس R پاسخ معادله‌ی زیر است:

$$\frac{v_{\circ y}+v_{\text{term}}}{v_{\circ x}}R+v_{\text{term}}\tau\,\ell n(1-\frac{R}{v_{\circ x}\tau})=0 \qquad (۴-۷۷)$$

این معادله را نمی‌توان به طور تحلیلی با توابع ساده حل کرد. حل عددی آن شدنی است و در مسئله‌های محاسباتی آن را خواهید دید. حل عددی اما چندان احساسی از وابستگی پاسخ به پارامترهای مسئله به دست نمی‌دهد. رویکرد خوب دیگر یافتن حل تحلیلی *تقریبی* است. بسیاری وقت‌ها اثر نیروی پسار کوچک است. یعنی هر دوی v_{term} و τ بزرگ‌اند و جمله‌ی دوم در شناسه‌ی تابع لگاریتمی کوچک است. (چون τ در مخرج است). بنابراین، می‌توان تابع لگاریتمی را بسط تیلور داد (فصل ۲ را

ببینید). داریم

$$\ell n(1-\varepsilon)=-(\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^{2}+\frac{1}{3}\varepsilon^{3}+\cdots) \qquad (4-78)$$

می‌توان از این بسط بهره برد و برای τ بزرگ از جمله‌های فراتر از ε^{3} چشم‌پوشید. رابطه‌ی (۷۴-۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\left[\frac{v_{0y}+v_{\text{term}}}{v_{0x}}\right]R-v_{\text{term}}\tau\left[\frac{R}{v_{0x}\tau}+\frac{1}{2}(\frac{R}{v_{0x}\tau})^{2}+\frac{1}{3}(\frac{R}{v_{0x}\tau})^{3}\right]=0 \qquad (4-79)$$

این رابطه را به آسانی می توان ساده کرد. جمله‌ی دوم در کروشه‌ی اول با جمله‌ی اول در کروشه‌ی دوم حذف می‌شود. درهر جمله یک R وجود دارد پس یک پاسخ آن $R=0$ است. اما ما به دنبال این پاسخ نیستیم. v_{term}/τ را با g جایگزین کنید. معادله‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود

$$R=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}-\frac{2}{3v_{0x}\tau}R^{2} \qquad (4-80)$$

شاید برای شما عجیب باشد که معادله‌ی درجه دو را این گونه می‌نویسیم ، ولی ما را زودتر به پاسخ تقریبی که به دنبالش هستیم رهنمون می‌شود. نکته این است که جمله‌ی دوم سمت راست خیلی کوچک است. (در صورت کسر R به یقین کمتر از R_{vac} است و ما فرض می‌کنیم که در مخرج کسر τ خیلی بزرگ است.) بنابراین، در تقریب نخست داریم

$$R\approx\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}=R_{\text{vac}} \qquad (4-81)$$

این نتیجه‌ای است که انتظار داریم. یعنی اگر نیروی پسار کوچک باشد برد پرتابه به برد آن در نبود نیروی پسار نزدیک می‌شود. به یاری رابطه‌ی (۸۰-۴) می‌توان تقریب بهتری هم به دست آورد. جمله‌ی آخر در رابطه‌ی (۸۰-۴) تصحیحی است که به خاطر نیروی پسار باید به R_{vac} اعمال کرد. چون این جمله در مقایسه با R_{vac} کوچک است، به جای R در این جمله R_{vac} قرار دهید. با این کار در تقریب مرتبه دو خواهیم داشت

$$R\approx R_{R_{\text{vac}}}-\frac{2}{3v_{0x}\tau}(R_{R_{\text{vac}}})^{2}=R_{R_{\text{vac}}}\left(1-\frac{4}{3}\frac{v_{0y}}{v_{\text{term}}}\right) \qquad (4-82)$$

برای به دست آوردن تساوی دوم ، R_{vac} جمله‌ی دوم را با $2v_{0x}v_{0y}/g$ جایگزین کردم توجه کنید که با تصحیح پسار، همیشه R کوچکتر از R_{vac} می‌شود و این تصحیح تنها به نسبت v_{0y}/v_{term} بستگی دارد. اگر بخواهیم عمومی‌تر سخن بگوییم، درجه‌ی اهمیت پسار هوا را نسبت v/v_{term} ، سرعت پرتابه نشان می‌دهد. اگر در طول پرواز پرتابه، $v/v_{\text{term}}<<1$ آنگاه اثر پسار هوا بسیار کو.چک می‌شود. اگر v/v_{term} حدود ۱ یا بزرگ‌تر باشد آنگاه به یقین اثر پسار مهم است (و تقریب ما هم خوب نیست.).

۴-۶ نیروی پسار از مرتبه دوم سرعت

گاهی اهمیت f_{quad} برجسته‌تر می‌شود و می‌توان گفت که به پرتابه نیروی پسار از نوع $\mathbf{f}=-cv^{2}\hat{\mathbf{v}}$ وارد می‌شود. هنوز هم باید معادله‌ی حرکت، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را برای این نیرو حل کرد. به بیان دیگر داریم

$$m\ddot{\mathbf{x}}=m\dot{\mathbf{v}}=m\mathbf{g}+\mathbf{f} \qquad (4-83)$$

تفاوت این معادله با معادله‌ی حرکت با نیروی پسار خطی در این است که با $\mathbf{f}=-cv^{۲}\hat{\mathbf{v}}$ دیگر معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی (۸۳-٤) ، یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی نیست. با وجود این، هنوز هم این ادعا درست است که هر حرکت پرتابی ترکیبی از دو حرکت افقی و عمودی است. بنابراین، در اینجا نیز از رویکرد بخش ٤-٤ و ٤-٥ پیروی و حرکت در راستای افقی و عمودی را جدا از هم بررسی خواهیم کرد و در آخر آنها را در هم ادغام خواهیم کرد.

۴-۶-۱ حرکت افقی با پسار از مرتبه دوم سرعت

جسمی را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی پسار متناسب با مربع سرعت در جهت مثبت محور افقی x حرکت می‌کند؛ مثل یک ارابه. در این جا از اثر اصطکاک معمولی چشم‌پوشی می‌کنیم. می‌توان آن را در نیروی پسار ادغام کرد. مولفه‌ی x معادله‌ی حرکت (۸۳-٤) عبارت است از

$$m\frac{dv_x}{dt}=-cv_x^{۲} \qquad (٤-۸٤)$$

اگر دو طرف این معادله‌ی را به $v_x^{۲}$ تقسیم و در dt ضرب کنیم متغیرها در دو طرف آن از هم جدا می‌شوند. خواهیم داشت

$$m\frac{dv_x}{v_x^{۲}}=-c\,dt \qquad (٤-۸٥)$$

حال به سادگی می‌توان از دو طرف رابطه‌ی (۸٥-٤) انتگرال گرفت:

$$m\int_{v_{\circ x}}^{v}\frac{dv'_x}{v'^2_x}=-c\int_{\circ}^{t}dt' \qquad (٤-۸٦)$$

که در آن $v_{\circ x}$ سرعت اولیه در راستای x در زمان $t=\cdot$ است. پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$m\left(\frac{۱}{v_{\circ x}}-\frac{۱}{v_x}\right)=-ct \qquad (٤-۸۷)$$

و از اینجا سرعت برحسب زمان به دست می‌آید

$$v_x(t)=\frac{v_{\circ x}}{۱+cv_{\circ x}t/m}=\frac{v_{\circ x}}{۱+t/\tau} \qquad (٤-۸۸)$$

در این جا $\tau\equiv m/cv_{\circ x}$ است و با τ بخش پیشین فرق دارد. می‌توان دید که τ بُعد زمان دارد و به‌ازای $t=\tau$ داریم $v_x=v_{\circ x}/۲$. برای این که مکان افقی ارابه را بیابیم کافی است توجه کنیم که $v_x=dx/dt$ است و از رابطه‌ی (۸۸-٤) انتگرال بگیریم.

$$x(t)=x_{\circ}+t\int_{\circ}^{t}v_x(t')dt'=v_{\circ x}\tau\,\ell n(۱+t/\tau) \qquad (٤-۸۹)$$

در تساوی دوم، مکان اولیه، $x_{\circ}$ ، را صفر پنداشتم. اگر این نتیجه را با حالت نیروی پسار خطی مقایسه کنیم (رابطه‌های (٦۰-٤) و (٦۱-٤)) می‌بینیم که در هر دو حالت سرعت‌ها با $t\to\infty$ به صفر می‌گرایند. اما در حالت با نیروی پسار خطی، سرعت به طور *نمایی* به صفر میل می‌کند؛ حال آنکه با نیروی پسار مرتبه دو، سرعت بسیار آهسته‌تر و به صورت $۱/t$ به صفر می‌گراید. این تفاوت در رفتار سرعت، به رفتار کاملا متفاوت x برای نیروی پسار مرتبه دو می‌انجامد. در حالت با نیروی پسار خطی دیدیم که در حد $t\to\infty$ مسافت x به مقدار معین $mv_{\circ x}/b$ میل می‌کرد. اما از رابطه‌ی (۸۹-٤) روشن است که با نیروی

پسار مرتبه دو، وقتی $t \to \infty$ میل می‌کند، x بدون حد افزایش می‌یابد.

این تفاوت شگفت‌آور در رفتار x برای f_{lin} و f_{quad} را می‌توان به طور کیفی فهمید. برای f_{quad} نیروی پسار با $v^{۲}$ متناسب است . بنابراین، با کم شدن v نیروی پسار سریع تر کوچک می‌شود و نمی‌تواند ارابه را در مسافت محدودی از حرکت باز بدارد. به این خاطر است که فرض نیروی پسار مرتبه دو برای *همه‌ی سرعت‌ها* واقعی نیست. البته در اثر نیروی اصطکاک ارابه از حرکت باز می‌ماند، اما این قصه‌ی دیگری است.

۴-۶-۲ حرکت قائم در حضور نیروی پسار مرتبه دو سرعت

فرض کنید توپی را از بالای یک برج رها کردیم. جهت مثبت y را رو به پایین فرض کنید. معادله‌ی حرکت توپ عبارت است از

$$m\ddot{y} = m\dot{v}_y = mg - cv_y^{۲} \qquad (۴-۹۰)$$

پیش از آنکه این معادله را حل کنیم سرعت حد آن را بررسی می‌کنیم. سرعتی که دیگر تغییر نمی‌کند و دو جمله‌ی سمت راست یکدیگر را حذف می‌کنند. برای سرعت حد باید داشته باشیم $mg - cv_y^{۲} = ۰$ و بنابراین

$$v_{\text{term}} = \sqrt{\frac{mg}{c}} \qquad (۴-۹۱)$$

برای هر جسم معین (یعنی m، g و c معین) سرعت حد را می‌توان از این رابطه حساب کرد. برای توپی به جرم $m = ۰{,}۱۵\text{kg}$ و قطر $D = ۷\text{cm}$ سرعت حد $v_{\text{term}} \approx ۳۵\,\text{m/s}$ یا حدود $۱۲۰\ \text{km/h}$ است. می‌توان معادله‌ی (۴-۹۰) را اندکی بهتر نوشت. از رابطه‌ی (۴-۹۱) به جای c مقدار $mg/v_{\text{term}}^{۲}$ را قرار دهید و m ها را حذف کنید. خواهیم داشت

$$\dot{v}_y = g\left(۱ - \frac{v_y^{۲}}{v_{\text{term}}^{۲}}\right) \qquad (۴-۹۲)$$

این معادله با جداسازی متغیر ها حل پذیر است و داریم

$$\frac{d\,v_y}{۱ - v_y^{۲}/v_{\text{term}}^{۲}} = g\,dt \qquad (۴-۹۳)$$

حالا می‌توانیم از دو طرف انتگرال بگیریم. با فرض این که توپ از حالت سکون رها شده است، حدود انتگرال سمت چپ ۰ و v_y و حدود انتگرال سمت راست ۰ و t است. پس از انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\frac{v_{\text{term}}}{g}\arctan\left(\frac{v_y}{v_{\text{term}}}\right) = t \qquad (۴-۹۴)$$

و از این جا v_y به دست می‌آید:

$$v_y = v_{\text{term}}\tanh\left(gt/v_{\text{term}}\right) \qquad (۴-۹۵)$$

برای یافتن مکان عمودی کافی است از (۴-۹۲) انتگرال بگیریم. خواهیم داشت

$$y(t) = \frac{(v_{\text{term}})^{۲}}{g}\,\ell n\left[\cosh\left(gt/v_{\text{term}}\right)\right] \qquad (۴-۹۶)$$

۴-۶-۳ حرکت افقی و عمودی با نیروی پسار مرتبه دو سرعت

این بخش را با بررسی حرکت عمومی پرتابه تحت اثر نیروی پسار مرتبه دو به پایان می‌بریم. معادله‌ی حرکت پرتابه، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ ، به صورت زیر است

$$m\ddot{\mathbf{r}}=m\mathbf{g}-cv^{۲}\hat{\mathbf{v}}=m\mathbf{g}-cv\mathbf{v} \qquad (۴-۹۷)$$

اگر آن را به مولفه‌های افقی و عمودی تجزیه کنیم (جهت مثبت y رو به پایین است) خواهیم داشت

$$m\dot{v}_x=-c\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}\,v_x$$
$$m\dot{v}_y=-mg-c\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}\,v_y \qquad (۴-۹۸)$$

که دو معادله‌ی دیفرانسیل برای دو تابع $v_x(t)$ و $v_y(t)$ اند. اما هریک شامل هر دوی v_x و v_y اند. به ویژه ، هیچ کدام به معادله‌ی حرکت جسمی که فقط در راستای x یا فقط در راستای y حرکت کند شباهت ندارد. یعنی نمی‌توان با ترکیب دو پاسخ، فقط حرکت افقی و فقط حرکت عمودی ، پاسخی برای این حرکت به دست آورد. بدتر از آن، معادله‌های (۹۸-۴) را اصلا نمی‌توان به طور تحلیلی حل کرد. تنها روشی که بتوان آنها را حل کرد، روش عددی است و این نیز باید با شرایط اولیه انجام گیرد. یعنی نمی‌توان پاسخ عمومی را یافت؛ تنها پلسخ‌های خاص را می‌توان با حل عددی به دست آورد. در زیر چند مسئله‌ی محاسباتی آورده شده است تا خواننده خود را با حل عددی معادله‌های دیفرانسیل آشنا کند.

فیزیک محاسباتی ۱ ـ حرکت پرتابی در میدان گرانش یکنواخت

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که در میدان گرانشی یکنواخت حرکت می‌کند. فرض کنید حرکت در صفحه‌ی XZ است. معادله‌های حرکت عبارتند از: $\ddot{X}[t]=۰\,,\ \ddot{Z}[t]=-g$ که در آن Z ارتفاع پرتابه و X فاصله‌ی افقی آن است.

(الف): برای مسیرهائی که نقطه‌های آغاز و پایانی یکسان دارند اما زمان پروازشان متفاوت است، معادله‌های حرکت را حل کنید و برای چندین زمان متفاوت مسیرها را رسم کنید.

(ب): به ازای سرعت اولیه و زاویه‌ی پرتاب خاصی، معادله‌های حرکت را حل کنید. مکان نقطه‌ی اوج را پیدا کنید. برای زاویه‌های پرتاب متفاوت، مسیرها را رسم کنید و زاویه‌ای را که به بیشینه ارتفاع می‌انجامد بیابید.

فیزیک محاسباتی ۲ ـ مسیرهای بازتابی

بچه‌ای در فاصله‌ی $x_۰$ از دیوار عمودی قرار دارد و توپی را به سوی دیوار پرتاب می‌کند. توپ از ارتفاع $y_۰$ نسبت به زمین دست بچه را به طور افقی و با سرعت اولیه‌ی $v_{۰x}$ ترک می‌کند (یعنی $v_{۰y}=۰$). هنگامی که توپ با دیوار برخورد می‌کند جهت مولفه‌ی افقی سرعت عوض می‌شود و مولفه‌ی عمودی سرعت تغییر نمی‌کند. حرکت را بیابید و برای چند سرعت اولیه‌ی متفاوت مسیر را رسم کنید.

فیزیک محاسباتی ۳ـ سقوط جسم با پس‌کشی هوا

به ذره‌ای به جرم m نیروی ربایش گرانشی (با شتاب g) و نیروی مقاومت هوا وارد می‌شود. ذره را از نقطه‌ی $(۰,z_۰)$ رها می‌کنیم. سرعت اولیه صفر است. فرض کنید نیروی مقاومت هوا به طور خطی با سرعت متناسب است. حرکت ذره با معادله‌های زیر داده می‌شود.

$$m\ddot{Z}[t]=-mg-b\dot{Z}[t]$$

فرض کنید $b\geq ۰$ است.

(الف): برای شرایط اولیه‌ی $Z[۰]=Z_۰\ ,\ \dot{Z}[۰]=۰$ معادله‌های حرکت را حل کنید و سرعت حدی را به دست آورید. حد پاسخ معادله‌های حرکت را برای $b\to ۰$ (در نبود مقاومت هوا) حساب کنید و پاسخ سقوط آزاد را به دست آورید.

(ب): به ازای $b=\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱\right\}$ مکان ذره را به صورت تابعی از زمان t رسم کنید.

(پ): به ازای $b=\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱\right\}$ سرعت ذره را به صورت تابعی از t بکشید.

(ت): جدول دلخواهی برای نقاط $\{t,Z[t]\}$ بسازید که Z[t] دارای خطای آزمایش ۱۰٪ داشته باشد. در نرم‌افزار *Mathematica* از بسته‌ی **`Statistics`NonlinearFit`** و دستور **NonlinearFit** استفاده کنید و از روی این نقاط ضریب پسار b را بیابید. شکل برازش غیرخطی را به صورت $a_۱+a_۲t+a_۳\,Exp[-a_۴t]$ فرض کنید.

فیزیک محاسباتی ۴

ذره‌ای به جرم m را به هوا پرتاب می‌کنیم. ذره در راستای عمودی حرکت می‌کند. به ذره نیروی گرانش و نیروی پسار هوا وارد می‌شود. نیروی پسار هوا با مربع سرعت جسم متناسب است. معادله‌ی حرکت جسم برای حرکت رو به بالا $\ddot{Z}[t]=-g-\frac{b}{m}\dot{Z}[t]^۲$ و برای حرکت رو به پایین $\ddot{Z}[t]=-g+\frac{b}{m}\dot{Z}[t]^۲$ است. فرض کنید b مثبت است.

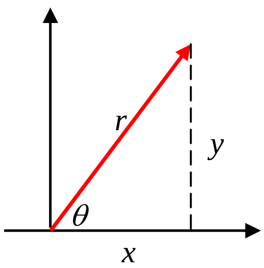
(الف): معادله‌ی حرکت رو به بالا را برای مکان و سرعت حل کنید.

(ب): زمان لازم برای رسیدن جسم به بالاترین نقطه‌ی مسیر را بیابید و سپس معادله‌ی حرکت رو به پایین را برای مکان و سرعت حل کنید.

(پ): مسیر حرکت ذره را رسم کنید و با حالتی که مقاومت هوا وجود ندارد مقایسه کنید.

۴-۷ حرکت در صفحه: مختصات قطبی، نگاهی دو باره

در فصل ۲ مختصات قطبی را شناساندیم و برخی حرکت‌ها را در این چارچوب مختصات بررسی کردیم. در این جا برای یادآوری و کاربردهای آن در فصل‌های آینده نکته‌های مهم آن را دوباره بازگو می‌کنیم. در مسئله‌هایی که حرکت در صفحه انجام می‌گیرد، بیشتر وقت‌ها کار کردن با مختصات قطبی r، θ می‌تواند مناسب‌تر از مختصات کارتزی x و y باشد. این که کدام چارچوب در مسئله‌ای مناسب‌تر است به ساختار و شکل مسئله بستگی دارد. برای نمونه، اگر می‌خواهیم حرکت دایره‌ای را بررسی کنیم، مختصات قطبی گزینه‌ی برتر است. برای این که بتوانیم از مختصات قطبی استفاده کنیم باید شکل قانون دوم نیوتن را در این چارچوب بدانیم. پس، نخستین کار ما این است که بدانیم $\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\ddot{\mathbf{r}}$ در مختصات قطبی به چه صورت در می آید. پیش از هر چیز به یاد



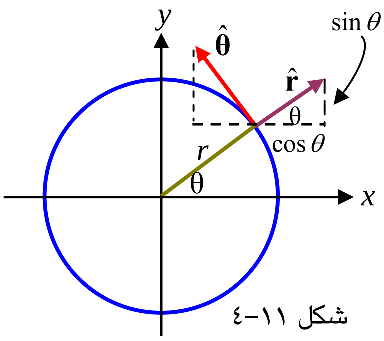
شکل ۱۰-٤

بیاورید که r ، θ با رابطه‌های زیر به x و y مربوط اند. شکل (۱۰-٤) را ببینید.

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta \tag{٤-٩٩}$$

در مختصات قطبی بردار $\mathbf{r}$ به صورت زیر نوشته می‌شود (فصل ۲ را ببینید.)

$$\mathbf{r} - r\,\hat{\mathbf{r}} \tag{٤-١٠٠}$$



شکل ۱۱-٤

هدف این بخش یافتن $\ddot{\mathbf{r}}$ است. پس، باید مشتق $\hat{\mathbf{r}}$ را حساب کنیم. سرانجام به مشتق $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نیز نیاز خواهیم داشت. $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردارهای یکه در مختصات قطبی‌اند. نکته‌ی مهم این است که در مختصات قطبی بردارهای یکه ($\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) با جابه‌جایی نقطه در روی صفحه تغییر می‌کنند؛ در حالیکه بردارهای یکه در مختصات کارتزی ($\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}$) بدون تغییر باقی می‌مانند. می‌توانیم $\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ و $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ را به صورت زیر حساب کنیم: با توجه به شکل (۱۱-٤)، $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ برحسب مختصات کارتزی به صورت زیر اند.

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\ \hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{y}} \tag{٤-١٠١}$$

مشتق نسبت به زمان این معادله‌ها عبارت اند از

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = -\dot\theta\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \dot\theta\cos\theta\hat{\mathbf{y}} \qquad , \qquad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot\theta\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - \dot\theta\sin\theta\hat{\mathbf{y}} \tag{٤-١٠٢}$$

و با توجه به رابطه‌ی (١٠١-٤) به دو رابطه‌ی زیبا و تمیز زیر می‌رسیم

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad , \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot\theta\hat{\mathbf{r}} \tag{٤-١٠٣}$$

اگر به جابه‌جایی کوچک $\mathbf{r}$ در راستای مماسی نگاه کنیم ، آنگاه این رابطه‌ها که رفتار بردارهای یکه‌اند، بدیهی خواهند بود. توجه کنید که بردارهای یکه با جابه‌جایی $\mathbf{r}$ در راستای شعاعی تغییر نمی‌کنند. حالا می‌توان از رابطه‌ی (١٠٠-٤) مشتق گرفت. داریم

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot r\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{٤-١٠٤}$$

این رابطه پذیرفتنی است، چون $\dot r$ سرعت در راستای شعاع است. $r\dot\theta$ سرعت در راستای مماسی است که بیشتر وقت ها به صورت $r\omega$ ($\omega\equiv\dot\theta$ سرعت زاویه‌ای یا بسامد زاویه‌ای است) نوشته می‌شود. اگر از رابطه‌ی (١٠٤-٤) نسبت به زمان مشتق بگیریم $\ddot{\mathbf{r}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot r\,\hat{\mathbf{r}} + \dot r\,\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot r\,\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot\theta\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\\ &= \ddot r\,\hat{\mathbf{r}} + \dot r(\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \dot r\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot\theta(-\dot\theta\hat{\mathbf{r}})\\ &= (\ddot r - r\,\dot\theta^{2})\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{٤-١٠٥}$$

و سرانجام، از برابری $m\ddot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نیروهای شعاعی و مماسی به دست می‌آیند:

$$F_r = m\,(\ddot r - r\dot\theta^{2}) \qquad , \qquad F_\theta = m\,(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) \tag{٤-١٠٦}$$

بگذارید ببینیم هر یک از چهار جمله در رابطه‌ی (١٠٦-٤) چه تفسیری دارد.

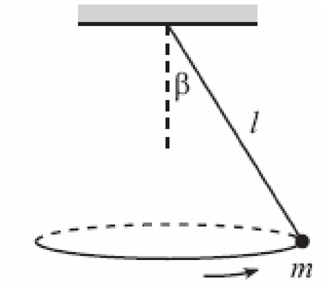
- جمله‌ی $m\ddot r$ روشن است: در حرکت دایره‌ای این جمله یعنی $F = ma$ در راستای شعاع.
- جمله‌ی $mr\ddot\theta$ نیز روشن است: برای حرکت دایره‌ای ، این جمله همان $F = ma$ در راستای مماسی است؛ چون $r\ddot\theta$

مشتق دوم فاصله‌ی $r\theta$ در امتداد پیرامون دایره است.

- جمله‌ی $-mr\dot{\theta}^2$: در حرکت دایره‌ای این جمله می‌گوید که نیروی شعاعی عبارت است از $-m(r\dot{\theta})^2/r = -mv^2/r$ که نیرویی آشنا است و شتاب مرکزگرای v^2/r را به وجود می‌آورد.
- جمله‌ی $2m\dot{r}\dot{\theta}$ اما چندان بدیهی نیست. این نیرو به نیروی *کوریولیس* مربوط است. از چند جانب به این جمله می‌توان اندیشید. یکی این که وجود آن برای پایسته ماندن تکانه‌ی زاویه‌ای لازم است. در فصل۱۲ در باره‌ی نیروی کوریولیس گفتنی زیادی خواهیم داشت.

مثال ۹-۴ (آونگ دایره ای): جرم m از ریسمان بدون جرم به طول ℓ آویزان است. شرایط چنان فراهم شده است که همانند شکل (۱۲-٤) جرم m روی دایره‌ای افقی حرکت کند و ریسمان با خط قائم زاویه‌ی ثابت β بسازد. بسامد زاویه‌ای ، ω، این حرکت را بیابید.

حل: جرم روی دایره حرکت می‌کند. پس نیروی شعاعی افقی باید $F_r = mr\dot{\theta}^2 \equiv mr\omega^2$ (با $r = \ell \sin\beta$) و به سوی مرکز دایره باشد. نیروهای وارد به جرم عبارت‌اند از نیروی کشش ریسمان ، T ، و نیروی گرانش mg . این نیروها در شکل (۱۳-٤) نشان داده شده اند. در راستای قائم شتاب وجود ندارد. بنابراین، از $F = ma$ در راستای قائم و شعاعی به ترتیب خواهیم داشت:

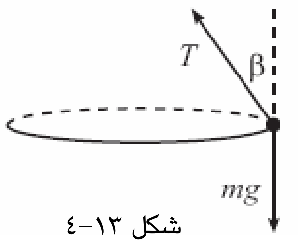


شکل ۱۲-٤

$$T\cos\beta - mg = 0 \qquad (٤-١٠٧)$$
$$T\sin\beta = m(\ell\sin\beta)\omega^2$$

از حل این معادله‌ها ω به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\beta}} \qquad (٤-١٠٨)$$



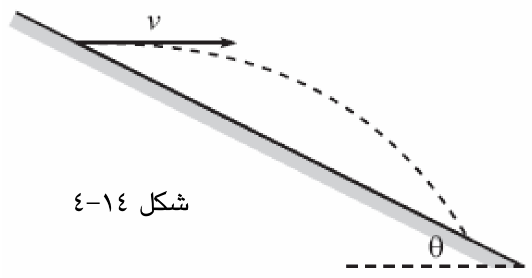
شکل ۱۳-٤

اگر $\beta \approx 90^\circ$ باشد، آنگاه $\omega \to \infty$ و این پذیرفتنی است. برای $\beta \approx 0^\circ$ داریم $\omega \approx \sqrt{g/\ell}$ که بسامد آونگ ساده با طول ℓ است.

مثال‌های تکمیلی

ت-۱ به جسمی به جرم m نیروی $F(t)=F_{\circ}\cos\omega t$ وارد می‌شود. اگرمکان و سرعت اولیه‌ی جسم به ترتیب $x_{\circ}$ و $v_{\circ}$ باشند، $x(t)$ و $v(t)$ را بیابید.

ت-۲ به ذره‌ای به جرم m نیروی $F=-m\alpha v^{۲}$ وارد می‌شود. مکان اولیه‌ی ذره مبداء مختصات است و سرعت اولیه‌ی آن $v_{\circ}$ است. $x(t)$ و $v(t)$ را بیابید. همچنین، رابطه‌ای تقریبی برای $x(t)$ به دست آورید و توضیح دهید که چرا این پاسخ پذیرفتنی است.



شکل ۱۴-٤

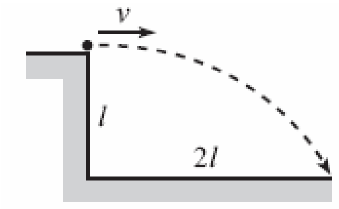
ت-۳ شیب سرپایینی سطحی با افق θ است (شکل ۱۴-٤). از روی این سطح پرتابه‌ای با سرعت v به طور افقی پرتاب می‌شود. پس از چه مدت، پرتابه در روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید؟

ت-۴ توپی با سرعت v به سوی دیواری به بلندی h و در فاصله‌ی d پرتاب می‌شود.

(الف): توپ با چه زاویه (یا زاویه‌های) θ باید پرتاب شود که بتواند درست از فراز دیوار بگذرد.

(ب): بیشینه مقدار d (برحسب v، h و g) که به ازای آن یک چنین زاویه‌ای وجود دارد، چیست؟

(پ): در حد $v\to\infty$ مقدار (تقریبی) دو پاسخ شما برای θ کدامند؟ چرا این پاسخ‌ها پذیرفتنی اند؟

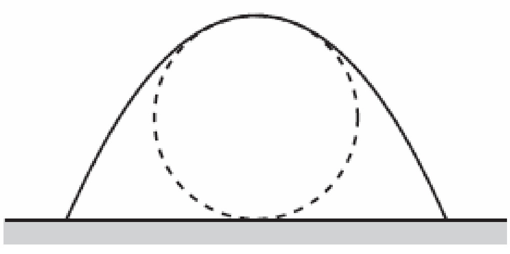


شکل ۱۵-٤

ت-۵ از بالای صخره‌ای به ارتفاع ℓ توپی با سرعت v افقی پرتاب می‌شود (شکل ۱۵-٤). برای این که توپ در فاصله‌ی ۲ℓ از پای صخره فرود بیاید، v چقدر باید باشد؟

ت-۶ توپی با سرعت v_0 به سوی دیواری در فاصله‌ی ℓ پرتاب می‌شود. برای این که توپ در بیشینه ارتفاع ممکن با دیوار برخورد کند، $v_{\circ}$ چقدر باید باشد. فرض کنید $\ell<v_{\circ}^{۲}/g$ است (چرا؟)

ت-۷ پرتابه‌ای با سرعت v و با زاویه‌ی θ پرتاب می‌شود. شعاع خم مسیر سهمی را در دو حالت زیر به دست آورید. (شعاع مسیر، شعاع دایره‌ای است که در نقطه‌ی مورد نظر بر مسیر مماس است).


شکل ۱٦-٤

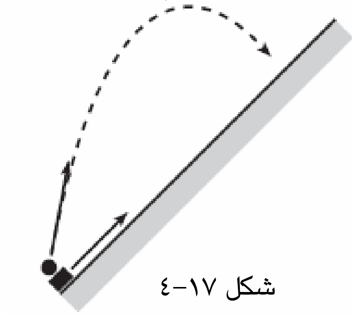
راهنمایی: برای این دو قسمت توجه کنید که سرعت و شتاب نسبی را در آغاز مسیر و در بالاترین نقطه می‌شناسید.

(الف) در بالاترین نقطه‌ی مسیر

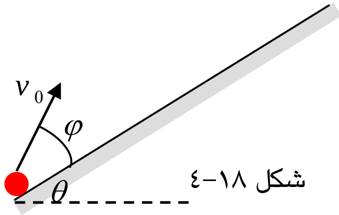
(ب) در آغاز مسیر. (شعاع خم

(پ): برای این که شعاع مسیر در بالاترین نقطه نصف بیشینه ارتفاع پرتابه باشد (شکل ۱٦-٤) زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

ت-۸ در یک لحظه، ارابه‌ای از سطح شیب‌داری با شیب β (نسبت به افق) بالا می‌رود و گلوله‌ای از درون آن با زاویه‌ی θ نسبت به افق شلیک می‌شود. برابر شکل (۱۷-٤) ارابه و گلوله، هر دو از یک نقطه حرکت‌شان را آغاز می‌کنند. اگر بخواهیم در لحظه‌ای که ارابه به بیشینه ارتفاع مسیرش در روی سطح شیب‌دار می‌رسد، گلوله به درون ارابه فرو افتد، مقدار θ(برحسب β) چقدر باید باشد؟ اگر $\beta=٤٥^{\circ}$ باشد، θ را حساب کنید (شاید فکر کردید که فراموش کردم سرعت‌های اولیه‌ی ارابه و گلوله را



شکل ۴-۱۷



شکل ۴-۱۸

بدهم. برای حل مسئله واقعا به آنها نیازی نیست).

ت-۹ پرتابه‌ای از نقطه‌ی P پرتاب می‌شود. حرکت پرتابه به گونه‌ای است که فاصله‌اش همواره از نقطه‌ی P در حال افزایش است. بیشینه زاویه‌ای که پرتابه ممکن است نسبت به افق پرتاب شده باشد، کدام است؟

ت-۱۰ بر روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی θ دارد، برابر شکل (۴-۱۸) توپی با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ و با زاویه‌ی φ نسبت به سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود.

(الف): مسافتی را که توپ بر روی سطح شیب‌دار می‌پیماید حساب کنید (پاسخ برحسب $v_\circ$، g، θ و φ خواهد بود)

(ب): به ازای چه مقدار φ، برد (مسافت در امتداد سطح شیب‌دار) بیشینه می‌شود؟

ت-۱۱ ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}=\omega$ حرکت می‌کند. معادله‌ی مسیرآن $r=r_\circ e^{\beta t}$ است. $r_\circ$ و β مقدارهای ثابت اند. به ازای چه مقدارهای β شتاب شعاعی، a_r ، ذره صفر است؟

مسئله‌ها

- **حل معادله‌ی دیفرانسیل**

۴-۱ (**نیروی نمایی**): به ذره‌ای با جرم m نیروی $F=ma_\circ e^{-bt}$ وارد می‌شود. مکان و سرعت اولیه صفرند. $x(t)$ را بیابید.

۴-۲ (**نیروی $-kx$**): ذره‌ای با جرم m تحت تاثیر نیروی $F(x)=-kx$ است $(k>\circ)$. مکان اولیه‌ی ذره $x_\circ$ و سرعت اولیه‌ی آن صفر است. $x(t)$ را بیابید.

۴-۳ (**نیروی kx**): ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی $F(x)=kx$ است $(k>\cdot)$. مکان اولیه‌ی ذره $x_\circ$ و سرعت اولیه‌ی آن صفر است. $x(t)$ را بیابید.

۴-۴ (**نیروی $-bv^2$**): به ذره‌ای با جرم m نیروی $F(v)=-bv^{۲}$ وارد می‌شود. مکان اولیه‌ی ذره صفر و سرعت اولیه‌ی آن $v_\circ$ است. $x(t)$ را بیابید.

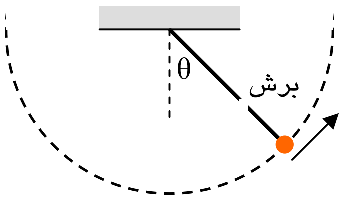
۴-۵ (**زنجیر افتان**) : زنجیری به طول ℓ را به طور کشیده در روی میز افقی بدون اصطکاک نگه داشته‌ایم. طول $y_\circ$ زنجیر از سوراخی در روی میز آویزان است. زنجیر را رها می‌کنیم. زنجیر از سوراخ سُر می‌خورد. طول بخش آویزان زنجیر از سوراخ را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید. سرعت زنجیری درست هنگامی که از سطح میز جدا می‌شود چقدر است؟

۴-۶ (**پرتاب توپ**): توپی را با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ به طور قائم به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر نیروی پسار هوا به صورت $F_d=-m\alpha v$ داده شده باشد، سرعت توپ، v_f ، را درست پیش از برخورد با زمین پیدا کنید. در مقایسه با توپی که در خلاء پرتاب می‌شود، توپ ما زمان بیشتر یا کمتری را در هوا سپری می‌کند؟

۴-۷ (**نیروی $-cv^{۳/۲}$**) : در زمان $t=\cdot$ سرعت جرم m برابر با $v_\circ$ است. این ذره روی محور x ها حرکت می‌کند و به آن نیروی $F(v)=-cv^{۳/۲}$ وارد می‌شود. از رابطه‌ی (۴-۱۰) استفاده کنید و سرعت v را برحسب زمان t و دیگر پارامترهای مسئله بیابید.

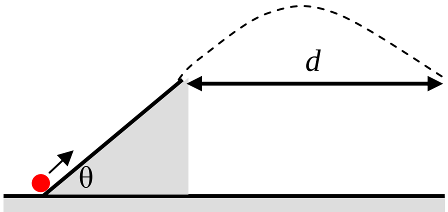
- **حرکت پرتابی**

۴-۸ **(بریدن ریسمان آونگ)**: آونگی برابر شکل (۱۹-٤) از ریسمان بدون جرم و وزنه‌ای به جرم m در انتهای آن تشکیل شده است. وزنه و جرم را از حالت افقی رها می‌کنیم. وزنه رو به پایین تاب می‌خورد و سپس حرکت خود را رو به بالا پی می‌گیرد. هنگامی که ریسمان با خط عمود زاویه‌ی θ می سازد آن را می‌بریم. θ چقدر باید باشد تا جرم بیشترین مسافت افقی را در زمانی به پیماید که دوباره به ارتفاع بریده شدن ریسمان برمی‌گردد ؟ (سرعت جرم وقتی به اندازه‌ی h سقوط کند با $v=\sqrt{۲gh}$ داده می‌شود.)



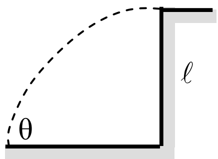
شکل ۱۹-٤

۴-۹ **(شلیک توپ) :** اگر توپی را قایم شلیک بکنیم بیشینه ارتفاع گلوله‌ی آن L می شود. گلوله‌ی دیگری را با همان سرعت در راستای سطح شیب داری به طول L و شیب θ شلیک می کنیم، شکل (۲۰-٤) را ببینید. برای اینکه گلوله در زمان بازگشت به ارتفاع بالای سطح شیب‌دار مسافت افقی d را به پیماید، زاویه ی شیب θ چقدر باید باشد؟



شکل ۲۰-٤

۴-۱۰ **(پرتاب توپ)**: توپی با سرعت v و با زاویه‌ی θ نسبت به افق از نقطه‌ای به فاصله‌ی ℓ از پای صخره‌ای به بلندی ℓ پرتاب می‌شود (شکل ۲۱-٤). برای این که توپ در لحظه‌ی برخورد با لبه‌ی صخره کسیرش افقی باشد، مقدارهای v و θ چقدر باید باشند ؟



شکل ۲۱-٤

۴-۱۱ **(بیشینه سطح زیر خم مسیر)**: توپی با سرعت v از سطح زمین پرتاب می‌شود. برای اینکه سطح زیر خم مسیر بیشینه باشد، زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

۴-۱۲ **(توپ جهنده)**: توپی به بالا پرتاب می‌شود و به ارتفاع h می‌رسد. سپس فرو می‌افتد واز سطح زمین وامی‌جهد. پس از هر واجهش ارتفاع توپ کسر f از ارتفاع قبلی می‌شود. درست پیش از ایستادن کامل، توپ چه مسافت کلی را پیموده است؟ زمان کل این مسافت را حساب کنید. سرعت میانگین توپ را به دست آورید.

۴-۱۳ **(پرتاب توپ از بالای صخره)**: توپی با سرعت v از لبه‌ی صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌شود. توپ با چه زاویه‌ای نسبت به افق باید پرتاب شود تا بیشترین مسافت افقی را بپیماید؟ این مسافت بیشینه چقدر است؟ فرض کنید در پایین صخره ، زمین افقی است.

۴-۱۴ **(تغییر جهت حرکت)**: توپی را از ارتفاع h بالای زمین رها می‌کنیم. توپ در ارتفاع y از زمین از روی سطحی وامی‌جهد (بدون اینکه سرعتش کم شود). این سطح شیب‌دار است و در نتیجه توپ نسبت به افق با زاویه‌ی θ از روی آن وامی‌جهد. برای اینکه توپ در زمان برخورد با زمین بیشترین مسافت افقی را بپیماید، y و θ چقدر باید باشند؟

۴-۱۵ **(طول بیشینه‌ی مسیر)**: توپی باسرعت v از سطح زمین پرتاب می‌شود. اگر $\theta_\circ$ زاویه‌ی پرتابی باشد که به ازای آن طول مسیر پرتابه بیشینه می‌شود، نشان دهید که $\theta_\circ$ در رابطه‌ی زیر صدق می کند

$$\sin\theta_\circ \,\ell n\left(\frac{۱+\sin\theta_\circ}{\cos\theta_\circ}\right)=۱ \qquad (٤-۱۰۹)$$

با حل عددی می‌توانید نشان دهید که $\theta_\circ \approx ٥٦{,}٥^\circ$ است.

۴-۱۶ (باز هم تغییر جهت حرکت): توپی از ارتفاع h بالای زمین رها می‌شود. توپ در ارتفاع y ، بدون کاسته شدن از سرعتش، از سطحی وامی‌جهد. شیب سطح ٤٥° است و در نتیجه ، توپ افقی وامی جهد. y چقدر باید باشد تا اینکه توپ بیشترین مسافت افقی را بپیماید. این مسافت بیشینه را حساب کنید.

۴-۱۷ (فاصله‌های برابر): برای این که بیشینه ارتفاع پرتابه‌ای با فاصله‌ی افقی آن برابر باشد، زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

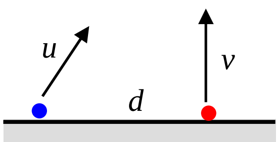
۴-۱۸ (پرتاب در باد): از بالای صخره‌ی عمودی به ارتفاع h توپی را افقی به سمت راست پرتاب می کنیم. باد افقی می‌وزد. اگر اثر باد روی توپ را هم‌ارز با نیروی ثابتی به سمت چپ در نظر بگیریم (ساده انگاری) سرعت توپ چقدر باید باشد تا توپ در پای صخره بر زمین فرود آید ؟

۴-۱۹ (بازهم پرتاب در باد): توپی را به سوی خاور پرتاب می‌کنیم. باد افقی و به سوی خاور می‌وزد. فرض کنید اثر باد روی توپ با نیروی ثابتی برابر با وزن توپ هم‌ارز است. توپ باید با چه زاویه‌ای پرتاب شود تا بیشینه مسافت افقی را بپیماید؟

۴-۲۰ (گرانش فزاینده): در سیاره‌ی فرضی گراویتوس، پرتابه‌ای با سرعت $v_\circ$ و با زاویه‌ی θ بالای افق شلیک می‌شود. گراویتوس ستاره‌ی عجیبی است و شتاب گرانش آن با زمان افزایش پیدا می‌کند. در این سیاره شتاب گرانش در لحظه‌ی شلیک صفر است. به بیان دیگر، $g(t)=\beta t$ و β ثابت داده شده است. پرتابه چه مسافت افقی را می‌پیماید؟ برای بیشینه شدن این مسافت، θ چقدر باید باشد؟

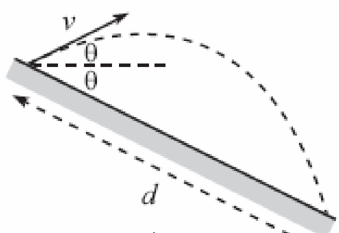
۴-۲۱ (برخورد پرتابه‌ها): دو گلوله در فاصله‌ی d از هم به طور هم‌زمان شلیک می‌شوند. گلوله‌ی سمت راست با سرعت v و عمودی شلیک می‌شود. شکل (۲۲-٤). می‌خوا هیم گلوله سمت چپ را هم‌زمان و با سرعت مناسب $\mathbf{u}$ چنان شلیک کنیم تا وقتی هر دو گلوله به بیشینه ارتفاع خود رسیدند، با هم برخورد کنند. $\mathbf{u}$ چگونه باید باشد (مولفه‌های افقی و عمودی آن را مشخص کنید) ؟

برای فاصله‌ی معین d باید v چقدر باشد تا u کمینه شود؟



شکل ۲۲-٤

۴-۲۲ (زاویه های برابر): شیب یک سطح سرازیری θ است. پرتابه‌ای از روی این سطح با سرعت v و با زاویه‌ی θ به بالای افق شلیک می‌شود (شکل ۲۳-٤ را ببینید.) مسافت d که پرتابه در امتداد سطح می‌پیماید چقدر است؟ در حالت حدی $\theta \to ٩٠^\circ$ مقدار d چقدر می‌شود؟ به ازای چه مقدار θ ، *مسافت افقی* بیشینه می شود؟



شکل ۲۳-٤

۴-۲۳ (ارابه، گلوله و سطح شیب‌دار): ارابه‌ای روی سطحی شیب‌دار نگه داشته شده است و در آن لوله‌ای چنان جاسازی شده است که محور لوله به سطح شیب‌دار عمود است. ارابه را رها می‌کنیم تا روی سطح حرکت کند. در زمانی دیرتر گلوله‌ای از درون لوله شلیک می‌شود. آیا گلوله سرانجام به درون لوله فرومی‌افتد؟ (*راهنمایی:* مختصات را هوشیارانه برگزینید.)

- **حرکت در محیط با نیروی پسار**

۴-۲۴ (کدام مهم است): رابطه‌ی (٤٦-٤) نسبت f_{quad}/f_{lin} را به دست می‌دهد. برای توپ تنیس به قطر ٧cm در چه سرعتی این دو نیروی پسار از اهمیت یکسان برخوردارند؟ برای چه بازه‌ی تقریبی سرعت‌ها می‌توان نیروی پسار را فقط از مرتبه‌ی دو به حساب آورد؟ در شرایط متعارف آیا چشم‌پوشی از نیروی پسار خطی تقریب خوبی است؟ این پرسش‌ها را برای یک توپ بسکتبال با قطر ٧٠ cm نیز پاسخ دهید.

۴-۲۵ (افتادن توپ در محیط با نیروی پسار): پرتابه‌ای با سرعت اولیه‌ی $v_{\circ y}$ رو به پائین پرتاب شده است. نیروی پسار هوا

با سرعت متناسب است. اگر $v_{\circ y}$ از سرعت حد v_{term} بیشتر باشد، تغییرات سرعت با زمان چگونه است؟ برای حالتی که $v_{\circ y} = ۲v_{\text{term}}$ است، تابع $v_y(t)$ را برحسب زمان رسم کنید.

۴-۲۶ (**حرکت افقی اتومبیل**): اتومبیلی با سرعت $v_{\circ}$ در راستای محور x ها حرکت می‌کند. نیروی پسار هوا با توان اول سرعت متناسب است و اتومبیل در زمان $t = ۰$ در مکان $x = ۰$ است. معادله‌ی حرکت اتومبیل را بنویسید. سرعت و مکان اتومبیل را به صورت تابعی از زمان به دست آورید و آنها را رسم کنید.

۴-۲۷ (**نیروی پسار مرتبه دو**): جسمی در راستای محور x ها حرکت می‌کند. نیروی پسار هوا با توان دوم سرعت متناسب است و نیروی دیگری به جسم وارد نمی‌شود (از اصطکاک چشم‌پوشی شده است.) معادله‌ی حرکت را بنویسید. سرعت و مکان جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید و آنها را رسم کنید.

۴-۲۸ (**یک مقایسه**): در بخش ۲-٤-٤ دیدیم که سرعت ذره‌ای که از حالت سکون رو به پائین رها می‌شود به صورت $\dot{y} = \frac{g}{k}(۱-e^{-kt})$ است. در آغاز حرکت که سرعت در راستای y، اندک است نیروی پسار هوا باید بی‌اهمیت باشد و رابطه‌ی بالا باید با سرعت سقوط آزاد در خلاء، $v_y = gt$، سازگار باشد. (**الف**) این گزاره را ثابت کنید. (**ب**) نشان دهید که مکان جسم رها شده نیز برای زمان‌های کوتاه t به صورت $y = ۱/۲\, gt^۲$ در می‌آید.

۴-۲۹ (**پسار با** $-cv^{۳/۲}$): جرم m در زمان $t = ۰$ دارای سرعت $v_{\circ}$ است و در راستای محور x در محیطی حرکت می‌کند که نیروی پسار آن به صورت $F(v) = -cv^{۳/۲}$ است. سرعت جسم را برحسب زمان بیابید. در چه هنگامی این جسم به حالت سکون می‌رسد (اگر برسد)؟

۴-۳۰ (**نیروی نمایی**): جرم m مقید به حرکت در راستای محور x است و به آن نیروی $F(v) = -F_{\circ}e^{v/c}$ وارد می شود. $F_{\circ}$ و c مقدارهای ثابت اند. اگر سرعت اولیه در زمان $t = ۰$ مثبت باشد ($v_{\circ} > ۰$) آنگاه $v(t)$ را بیابید. در چه هنگامی این جرم به ایست لحظه‌ای می‌رسد؟ از $v(t)$ انتگرال بگیرید و $x(t)$ را به دست آورید. جرم در هنگامی که به ایست لحظه‌ای می‌رسد چه مسافتی را پیموده است؟

۴-۳۱ (**باز هم پسار** $-cv^{۳/۲}$): سرعت ذره‌ای به جرم m در مبداء مختصات برابر $v_{\circ}$ است. جسم در راستای محور x حرکت می‌کند و نیروی پسار $F(v) = -cv^{۳/۲}$ به آن وارد می‌شود. معادله‌ی حرکت جسم را بنویسید. از $a = v\, dv/dx$ استفاده کنید و x را برحسب تابعی از v به دست آورید. نشان دهید که ذره سرانجام مسافت $۲m\sqrt{v_{\circ}}/c$ را خواهد پیمود.

۴-۳۲ (**نیروی پسار با دو جمله**): جسمی را در نظر بگیرید که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. نیروی پسار وارد به آن به صورت $f = -bv - cv^۲$ است. قانون دوم نیوتن را برای این نیرو بنویسید و با جداسازی متغیرها v را به دست آورید. رفتار v را برحسب زمان رسم کنید. وابستگی زمانی آن را برای t های بزرگ توضیح دهید و بگویید کدام جمله در قانون نیرو برای t بزرگ برجسته می‌شود.

۴-۳۳ (**نیروی $cv^۲$ و حرکت بالا رونده**): توپ تنیس با سرعت $v_{\circ}$ به طور عمودی به بالا پرتاب می‌شود. اندازه‌ی نیروی پسار هوا به صورت $f = cv^۲$ است. معادله‌ی حرکت را برای مسیر رو به بالای توپ (جهت مثبت y رو به بالا) بنویسید و نشان دهید که می‌توان آن را به شکل $\dot{v} = -g[۱+(v/v_{\text{term}})^۲]$ نوشت. با استفاده از $a = \dot{v} = v\, dv/dy$ متغیرهای معادله حرکت را جداسازی کنید (یعنی همه‌ی جمله‌های دارای v را در یک طرف و جمله‌هایی که در آن ها y وجود دارد در طرف دیگر تساوی جمع آوری بکنید) و آن را حل کنید- ازدو طرف انتگرال بگیرید و y را برحسب v به دست آورید. نشان دهید که بیشینه ارتفاع توپ تنیس $y_{\max} = \left(v_{\text{term}}^۲/۲g\right)\ell n\left(v_{\text{term}}^۲ + v_{\circ}^۲\right)\big/v_{\text{term}}^۲$ است.

۴-۳۴ (**نیروی** $cv^{۲}$ **و حرکت پایین رونده**): دوباره توپ تنیس مسئله‌ی ۳۳-٤ را در نظر بگیرید و معادله‌ی حرکت آن را برای مسیر رو به پایین بنویسید. (توجه کنید که با نیروی پسار مرتبه دو سرعت، معادله‌ی حرکت رو به پایین و رو به بالا تفاوت دارند و باید جداگانه بررسی شوند.) v را برحسب y به دست آورید. حرکت رو به پایین توپ از $y_{\max}$ بالا (مسئله ۳۲-٤) آغاز می‌شود. نشان دهید که در هنگام بازگشت توپ به زمین سرعت آن $v_{\text{term}}v_{\circ}\big/\sqrt{v_{\text{term}}^{۲}+v_{\circ}^{۲}}$ است.

- **حرکت در صفحه- مختصات قطبی**

۴-۳۵ (**شتاب قائم**): حلقه‌ای به شعاع R در صفحه‌ی قائم قرار دارد. در بالاترین نقطه‌ی آن دانه‌ی تسبیحی قرار دارد. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم و دانه‌ی تسبیح روی حلقه سُر می‌خورد. در کدام نقاط روی حلقه شتاب دانه تسبیح در راستای قائم است؟ (روشن است که دو تا از این نقطه ها بالاترین و پایین ترین نقطه‌های حلقه‌اند که در آنجا $a\approx ۰$ است. دو نقطه‌ی دیگر در دو سوی حلقه وجود دارند. آنها را بیابید) این شتاب قائم چقدر است؟ **توجه**: ما هنوز پایستگی انرژی را بررسی نکرده‌ایم، با وجود این، شما از این واقعیت استفاده کنید که سرعت دانه‌ی تسبیح وقتی به اندازه‌ی h سقوط می‌کند برابر است با $v=\sqrt{۲gh}$.

۴-۳۶ (**شتاب افقی**): حلقه‌ای به شعاع R در صفحه‌ی قائم قرار دارد. در بالاترین نقطه آن دانه‌ی تسبیحی قرار دارد. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم و دانه‌ی تسبیح روی حلقه سُر می‌خورد. در کدام نقاط روی حلقه شتاب دانه تسبیح در راستای افقی است؟ **توجه**: ما هنوز پایستگی انرژی را بررسی نکرده‌ایم ، با این وجود، شما از این واقعیت استفاده کنید که سرعت دانه‌ی تسبیح وقتی به اندازه‌ی h سقوط می‌کند برابر است با $v=\sqrt{۲gh}$.

۴-۳۷ (**بیشینه نیروی افقی**): حلقه‌ای به شعاع R در صفحه‌ی قائم قرار دارد. در بالاترین نقطه‌ی آن دانه‌ی تسبیحی قرار دارد. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم و دانه‌ی تسبیح روی حلقه سُر می‌خورد. مولفه‌ی افقی نیرو را که حلقه به دانه‌ی تسبیح وارد می‌کند در نظر بگیرید. در کدام نقاط روی حلقه این نیرو به بیشینه یا کمینه‌ی موضعی خود می‌رسد؟ مانند مسئله‌ی بالا از $v=\sqrt{۲gh}$ استفاده کنید.

۴-۳۸ (**یافتن** F_r **و** F_θ): در مختصات کارتزی یک بردار عمومی به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathbf{r}=x\ \hat{\mathbf{x}}+y\ \hat{\mathbf{y}}=r\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}}+r\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (٤\text{-}۱۱۰)$$

دو بار ازاین رابطه مشتق بگیرید و رابطه‌ی (۱۰۳-٤) را به دست آورید. با استفاده از (۹۸-٤) نشان دهید که نتیجه را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱۰۲-٤) درآورد. توجه کنید که برعکس $\hat{\mathbf{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}}$ در این جا $\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}$ با زمان تغییر نمی‌کنند.

۴-۳۹ (**نیروی** $F_\theta=۳m\dot{r}\dot{\theta}$): نیروی وارد به ذره‌ای فقط مولفه‌ی زاویه‌ای دارد: $F_\theta=۳m\dot{r}\dot{\theta}$. نشان دهید که $\dot{r}=\pm\sqrt{Ar^{٤}+B}$ است . A و B ثابت‌های انتگرال گیری‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. اگر ذره از مکانی با $r\neq ۰$ شروع به حرکت بکند، نشان دهید که در زمان محدودی به $r=\infty$ می‌رسد. (این نیرو هیچ فیزیک خاصی دربر ندارد. تنها حل $F=ma$ را شدنی می‌کند.)

۴-۴۰ (**نیروی** $F_\theta=۲m\dot{r}\dot{\theta}$): به ذره‌ای نیروی $F_\theta=۲m\dot{r}\dot{\theta}$ وارد می‌شود . نشان دهید $r=Ae^{\theta}+Be^{-\theta}$ است. A و B ثابت‌های انتگرال گیری‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.(این یک نیروی فیزیکی است. اگر ذره‌ای روی یک میله‌ی راست افقی باشد و میله را حول یک انتهایش با سرعت ثابتی بچرخانیم، آنگاه نیروی عمودی وارد به ذره از سوی میله برابراست با $۲m\dot{r}\dot{\theta}$.)

۴-۴۱ (**نیروی** $F_\theta=m\dot{r}\dot{\theta}$): به ذره‌ای نیروی $F_\theta=m\dot{r}\dot{\theta}$ وارد می‌شود. نشان دهید $\dot{r}=\sqrt{A\ell n\,r+B}$ است. A و B ثابت

های انتگرال‌گیری‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. (این نیرو هیچ فیزیک خاصی دربر ندارد. تنها حل $F=ma$ را شدنی می‌کند.)

۴-۴۲ (**بیش از یک زاویه‌ی پرتاب**): پرتابه‌ای با سرعت $۱۰۰\ \mathrm{m/s}$ با زاویه‌ی ۶۰° نسبت به افق پرتاب شده است. از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی کنید. بیشینه ارتفاع پرتابه و برد آن را حساب کنید. چه زاویه‌ی پرتاب دیگری می‌تواند همان برد را به وجود آورد؟ زمان پرواز پرتابه را برای هر دو حالت حساب کنید.

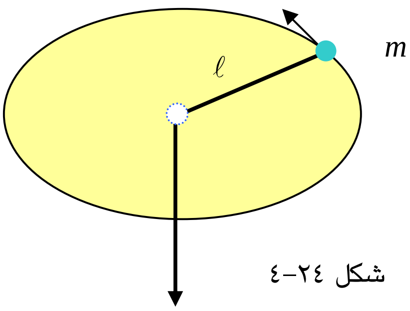
۴-۴۳ (**پرتاب از زمین شیب‌دار**): پرتابه‌ای با سرعت v و زاویه‌ی α نسبت به افق پرتاب می‌شود. از نیروی پسار هوا چشم پوشی کنید و (**الف**): معادله‌ی مسیر پرتابه را به دست آورید. (**ب**): اگر شیب زمین β درجه باشد، نشان دهید که برد پرتابه (اندازه گیری افقی) برابر است با

$$R=\frac{۲v^{۲}}{y}\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (۴-۱۱۱)$$

(**پ**): برای این که پرتابه بیشینه برد را داشته باشد، زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

۴-۴۴ (**زاویه‌ی پرتاب**): سرعت پرتابه‌ای در نقطه‌ی اوجش $\sqrt{۶/۷}$ سرعت کل پرتابه در نیم راه اوج آن است (یعنی هنگامی که ارتفاعش نصف ارتفاع اوج است). زاویه‌ی پرتاب را حساب کنید.

۴-۴۵ (**جرمی روی میز**): ذره‌ای به جرم m به انتهای ریسمانی به طول ℓ بسته شده است. ذره در روی میز افقی بدون اصطکاک با سرعت زاویه‌ای ω بر روی یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد. انتهای دیگر ریسمان از سوراخ ریزی در روی میز می‌گذرد. این انتهای آزاد ریسمان را از زیر میز به آرامی می‌کشیم (به طوری که کشش ریسمان ثابت بماند) و شعاع مسیر دایره‌ای ذره کاهش پیدا می‌کند شکل (۴-۲۴) . هنگامی که طول آن بخش از ریسمان که در روی میز است به $\ell/2$ می‌رسد، سرعت زاویه‌ای ذره چقدر است؟ نشان دهید که افزایش انرژی جنبشی ذره با کار نیرویی که ریسمان را می کشد، برابر است.



شکل ۴-۲۴

پاسخ مثال‌های تکمیلی

ت-۱ شتاب a در رابطه‌ی $F=ma$ به صورت dv/dt بنویسید. داریم

$$F_\circ \cos\omega t = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_\circ^t \frac{F_\circ}{m}\cos\omega t' dt' = \int_{v_\circ}^v dv'$$

$$\Rightarrow \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t'\Big|_0^t = v - v_\circ \Rightarrow \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t = v - v_\circ$$

$$\Rightarrow v(t) = v_\circ + \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t \qquad (۴-۱۱۲)$$

برای یافتن مکان $x(t)$ اینک v را به صورت dx/dt بنویسید. داریم

$$\frac{dx}{dt} = v_\circ + \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t \Rightarrow \int_{x_\circ}^x dx' = \int_{v_\circ}^v \left(v_\circ + \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t'\right)dt'$$

$$\Rightarrow x - x_\circ = \left(v_\circ t' - \frac{F_\circ}{m\omega^۲}\cos\omega t'\right)\Bigg|_\circ^t \Rightarrow x - x_\circ = v_\circ t - \frac{F_\circ}{m\omega^۲}\cos\omega t + \frac{F_\circ}{m\omega^۲}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_\circ + v_\circ t - \frac{F_\circ}{m\omega^۲}\cos\omega t + \frac{F_\circ}{m\omega^۲} \qquad (۴-۱۱۳)$$

توجه کنید که به ازای $t=۰$ به دست می‌آید: $v(t=\circ)=v_\circ$ و $x(t=\circ)=x_\circ$ که درست‌اند.

ت-۲ شتاب a به صورت dv/dt بنویسید. داریم

$$-m\alpha v^۳ = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\int_\circ^t \alpha\, dt' = \int_{v_\circ}^v \frac{dv'}{v'^۳} \Rightarrow -\alpha t = -\frac{۱}{۲v'^۲}\Bigg|_{v_\circ}^v$$

$$\Rightarrow -۲\alpha t = \frac{۱}{v_\circ^۲} - \frac{۱}{v^۲} \Rightarrow v(t) = \frac{۱}{\sqrt{\dfrac{۱}{v_\circ^۲} + ۲\alpha t}} \qquad (۴-۱۱۴)$$

برای یافتن $x(t)$ حالا v را به صورت dx/dt بنویسید.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{۱}{\sqrt{\dfrac{۱}{v_\circ^۲} + ۲\alpha t}} \Rightarrow \int_\circ^x dx' = \int_\circ^t \frac{dt'}{\sqrt{\dfrac{۱}{v_\circ^۲} + ۲\alpha t'}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{۱}{\alpha}\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲} + ۲\alpha t'}\Bigg|_\circ^t = \frac{۱}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲} + ۲\alpha t} - \frac{۱}{v_\circ}\right) = \frac{۱}{\alpha v_\circ}\left(\sqrt{۱ + ۲\alpha v_\circ^۲ t} - ۱\right) \qquad (۴-۱۱۵)$$

ت-۳ حل ۱ محورهای دستگاه مختصات را افقی و قائم در نظر بگیرید. موقعیت x پرتابه در این چارچوب $x=vt$ و موقعیت قائم آن $y=-gt^2/2$ است. وقتی پرتابه در روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید که

$$\frac{y}{x} = -\tan\theta \Rightarrow \frac{-gt^۲/۲}{vt} = -\tan\theta \Rightarrow t = \frac{۲v\tan\theta}{g} \qquad (۴-۱۱۶)$$

حل ۲ این بار محورهای مختصات را در امتداد سطح شیب‌دار و عمود بر آن در نظر بگیرید. سرعت اولیه در راستای محور عمود بر سطح شیب‌دار $v\sin\theta$ و در امتداد سطح $v\cos\theta$ است. شتاب گرانش در راستای محور قائم $g\cos\theta$ است. در این مختصات داریم

$$x = vt\cos\theta \quad , \quad y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\cos\theta \tag{۴-۱۱۷}$$

$$\dot{x} = v\cos\theta \quad , \quad \dot{y} = v\sin\theta - gt\cos\theta \tag{۴-۱۱۸}$$

زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج ($\dot{y} = 0$) دو برابر زمانی است که جسم در هوا پرواز می‌کند. بنابراین،

$$t = 2\frac{v\sin\theta}{g\cos\theta} = \frac{2v}{g}\tan\theta \tag{۴-۱۱۹}$$

ت-۴ زمان لازم برای رسیدن پرتابه به دیوار عبارت است از $(v\cos\theta)t = d \;\Rightarrow\; t = d/v\cos\theta$. در این زمان ارتفاع پرتابه برابر است با $y = (v\sin\theta)t - gt^2/2$. می‌خواهیم این ارتفاع برابر h باشد. پس:

$$h = (v\sin\theta)\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)^2 \;\Rightarrow\; h = d\tan\theta - \frac{gt^2}{2v^2}\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{۴-۱۲۰}$$

برای به دست آوردن θ از رابطه‌ی زیر استفاده کنید"

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 \tag{۴-۱۲۱}$$

بنابراین، می‌توان نوشت

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2v^2}\left(\tan^2\theta + 1\right) \;\Rightarrow\; \tan^2\theta - \frac{2v^2}{gd}\tan\theta + \left(1 + \frac{2v^2h}{gd^2}\right) = 0 \tag{۴-۱۲۲}$$

$$\Rightarrow\quad \tan\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{2v^2}{gd} \pm \sqrt{\frac{4v^4}{g^2d^2} - 4\left(1 + \frac{2v^2h}{gd^2}\right)}\right) = \frac{v^2}{gd} \pm \frac{v^2}{gd}\sqrt{1 - \frac{g^2d^2}{v^4} - \frac{2gh}{v^2}} \tag{۴-۱۲۳}$$

(ب): فقط هنگامی برای θ پاسخی وجود دارد که عبارت زیر علامت رادیکال مثبت باشد. پس

$$1 - \frac{g^2d^2}{v^4} - \frac{2gh}{v^2} > 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{2gh}{v^2} > \frac{g^2d^2}{v^4} \;\Rightarrow\; \frac{v^4}{g^2}\left(1 - \frac{2gh}{v^2}\right) > d^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{v^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}} > d \tag{۴-۱۲۴}$$

(پ): وقتی $v \to \infty$ میل کند، جمله‌ی g^2d^2/v^4 در رابطه‌ی (۴-۱۲۳) قابل چشم‌پوشی است و بنابراین

$$\tan\theta \approx \frac{v^2}{gd} \pm \frac{v^2}{gd}\sqrt{1 - 2gh/v^2} \approx \frac{v^2}{gd} \pm \frac{v^2}{gd}\left(1 - gh/v^2\right)$$

$$\Rightarrow\quad \tan\theta = \frac{v^2}{gd} \pm \left(\frac{v^2}{gd} - \frac{h}{d}\right) \tag{۴-۱۲۵}$$

برای علامت "+" داریم

$$\tan\theta \approx \frac{2v^2}{gd} - \frac{h}{d} \tag{۴-۱۲۶}$$

این پاسخ به ازای $v \to \infty$ به بینهایت میل می‌کند و خواهیم داشت $\tan\theta = \infty \;\Rightarrow\; \theta = ۹۰^\circ$. این پاسخ پذیرفتنی است، چون پرتابه تقریبا عمودی پرتاب می‌شود و زمان طولانی پرواز در فضا ضرب‌درمقدار اندک v_x اندازه‌ی "میانگین" d را به دست می‌دهد. برای علامت" − "خواهیم داشت $\tan\theta \approx h/d$. این پاسخ هم پذیرفتنی است؛ چون در این حالت پرتابه اساسا در ارتفاع دیوار مستقیم به سوی دیوار پرتاب می‌شود. وچنان سریع به این نقطه می‌رسد که زمانی برای اثر کردن نیروی گرانش بای نمی گذارد.

ت-۵ از مولفه‌ی x حرکت داریم $x = ۲\ell = vt \quad \Rightarrow \quad t = ۲\ell/v$ و از مولفه‌ی y حرکت: $y = \ell = gt^۲/۲$

$$\Rightarrow \; \frac{۱}{۲} g\left(\frac{۲\ell}{v}\right)^۲ = \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{۲g\ell^۲}{v^۲} = \ell \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{۲g\ell} \qquad (۴-۱۲۷)$$

ت-۶ نخست ببینیم چرا باید $\ell < v^۲/g$ باشد. مسافت افقی که توپ می‌پیماید $\left(v^۲/g\right)\sin ۲\theta$ است (نگاه کنید به رابطه‌ی (۳۹-۴) در مثال ۵-۴). بیشینه مقدار آن $v^۲/g$ است. پس ، اگر $\ell > v^۲/g$ باشد، توپ به دیوار نخواهد رسید. زمان لازم برای این که توپ به دیوار برسد $\left(\ell/v_x\right) = \left(\ell/v\cos\theta\right)$ است. ارتفاع توپ در این زمان برابر است با

$$y = (v\sin\theta)t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$= (v\sin\theta)\left(\frac{\ell}{v\cos\theta}\right) - \frac{۱}{۲}g\left(\frac{\ell}{v\cos\theta}\right)^۲ = \ell\tan\theta - \frac{g\ell^۲}{۲v^۲}\frac{۱}{\cos^۲\theta} \equiv H(\theta) \qquad (۴-۱۲۸)$$

می‌خواهیم تابع $H(\theta)$ بیشینه باشد. از آن نسبت به θ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۰ = \frac{dH}{d\theta} = \frac{\ell}{\cos^۲\theta} - \frac{g\ell^۲}{۲v^۲}\left(\frac{-۲}{\cos^۳\theta}\right)(-\sin\theta) \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{g\ell^۲}{v^۲}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{v^۲}{g\ell} \qquad (۴-۱۲۹)$$

توجه کنید که چون ما احتیاج داریم $\ell < v^۲/g$ باشد، باید داشته باشیم $\tan\theta > 1 \Rightarrow \quad \theta > ۴۵^\circ$ باید باشد. هم‌چنین توجه کنید که وقتی توپ با دیوار برخورد می‌کند در بالاترین ارتفاع مسیرش **نیست**. (اگر ℓ فقط اندکی کم‌تر از $v^۲/g$ بود، حتما به دیوار هم نمی‌رسید).

ت-۷ **(الف)**: در بالاترین نقطه‌ی مسیر، $v_y = 0$ و سرعت کل برابر $v_x = v\cos\theta$ است. در این نقطه شتاب بر مسیر عمود و برابر g است. بنابراین:

$$a = \frac{v^۲}{r} = \frac{(v\cos\theta)^۲}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(v\cos\theta)^۲}{g} \qquad (۴-۱۳۰)$$

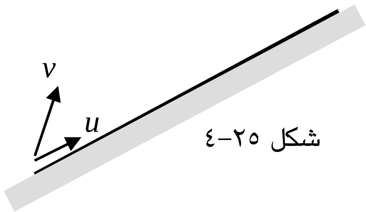
(ب): سرعت در آغاز حرکت v و مولفه‌ی شتاب که بر مسیر عمود باشد برابر $g\cos\theta$ است (مولفه‌ی شتاب در امتداد مسیر در یافتن شعاع مسیر نقشی ندارد. وقتی دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر خم مسیر مماس باشد، شعاع آن بر مسیر عمود است.)

$$\Rightarrow \quad r = \frac{v^۲}{a} = \frac{v^۲}{g\cos\theta} \qquad (۴-۱۳۱)$$

(پ): بیشینه ارتفاع عبارت است از $\left(v_y^۲/۲g\right) = (v\sin\theta)^۲/۲g$ و ما می‌خواهیم

$$r=\frac{۱}{۲}h_{\max}\ \Rightarrow\ \frac{(v\cos\theta)^{۲}}{g}=\frac{۱}{۲}\frac{(v\sin\theta)^{۲}}{۲g}\ \Rightarrow\ ٤\cos^{۲}\theta=\sin^{۲}\theta\ \Rightarrow\ \tan\theta=۲\ \Rightarrow\ \theta=٦۳{,}٤^{\circ} \qquad (٤-۱۳۲)$$

ت-۸ حل ۱ سرعت‌های اولیه‌ی ارابه را u و گلوله را v بنامید (شکل ۲۵-٤) .
رویکرد ما برای حل این مسئله از این قرار است که (۱) زمان فرود آمدن گلوله روی سطح شیب‌دار را مساوی زمان رسیدن ارابه به بیشینه ارتفاع آن قرار خواهیم داد. (۲) برای این زمان مسافت‌ها را در امتداد سطح مساوی هم قرار خواهیم داد. گلوله وقتی در روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید که $y/x=\tan\beta$ است.



شکل ۲۵-٤

$$\frac{y}{x}=\frac{(v\sin\theta)t-(۱/۲)gt^{۲}}{(v\cos\theta)t}=\tan\beta$$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{۲v\cos\theta}{g}(\tan\theta-\tan\beta) \qquad (٤-۱۳۳)$$

ارابه وقتی به بیشینه ارتفاع خود می‌رسد که $t=u/g\sin\beta$ باشد؛ چون شتاب در امتداد سطح شیب‌دار $g\sin\beta$ است. مسافتی که ارابه در روی سطح می‌پیماید $x=-(۱/۲)(g\sin\beta)t^{۲}+ut$ است وارابه وقتی به بیشینه ارتفاع خود می‌رسد که سرعتش در امتداد سطح شیب‌دار صفر شود $\dot{x}=-gt\sin\beta+u=0$ و از اینجا زمان $t=u/g\sin\beta$ به دست می‌آید. از برابری این دو زمان داریم

$$\frac{u}{g\sin\theta}=\frac{۲v\cos\theta}{g}(\tan\theta-\tan\beta)\ \Rightarrow\ u=۲v\sin\theta\cos\theta(\tan\theta-\tan\beta) \qquad (٤-۱۳٤)$$

حالا از این که مسافت‌های ارابه و گلوله در امتداد سطح شیب‌دار باید مساوی باشد استفاده می‌کنیم. مسافتی را که گلوله در راستای افقی می‌پیماید $(v\cos\theta)t$ است. اگر آن را بر $\cos\beta$ تقسیم کنیم، مسافت گلوله در امتداد سطح به دست می‌آید. پس،

$$\frac{(v\cos\theta)t}{\cos\beta}=ut-\frac{۱}{۲}(g\sin\beta)t^{۲}\ \Rightarrow\ \frac{v\cos\theta}{\cos\beta}=u-\frac{۱}{۲}(g\sin\beta)\left(\frac{u}{g\sin\beta}\right) \qquad (٤-۱۳٥)$$

و بنابراین

$$v\cos\theta=\frac{۱}{۲}u\cos\beta \qquad (٤-۱۳٦)$$

این پاسخ پذیرفتنی است: سزعت افقی گلوله با میانگین سرعت افقی ارابه برابر است. از ترکیب رابطه‌های (۱۳٤-٤) و (۱۳٦-٤) به دست می‌آید

$$v\cos\theta=\frac{۱}{۲}\left(۲v\sin\beta\cos\theta(\tan\theta-\tan\beta)\right)\cos\beta$$
$$\Rightarrow\quad ۱=\sin\beta\cos\beta(\tan\theta-\tan\beta) \qquad (٤-۱۳۷)$$

به ازای $\beta=٤٥^{\circ}$ داریم

$$۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\tan\theta-۱)\ \Rightarrow\ \tan\theta=۳\quad\therefore\quad\theta=۷۱{,}٦^{\circ} \qquad (٤-۱۳۸)$$

حل ۲ محورهای مختصات را موازی و عمود بر سطح شیب‌دار در نظر بگیرید. ارابه و گلوله حرکت خود را از یک مکان آغاز می‌کنند و شتاب هر دو در امتداد سطح یکی است: $-g\sin\beta$. بنابراین، مولفه‌ی سرعت آنها در امتداد سطح باید برابر باشد؛

چون در این صورت است که مولفه‌ی سرعت‌ها در امتداد سطح همواره برابر خواهند بود. این بدان معنی است که در این چارچوب، گلوله همواره بالای سرِ ارابه خواهد بود. از برابری این مولفه‌های اولیه‌ی سرعت خواهیم داشت

$$v\cos(\theta-\beta)=u \qquad (٤-١٣٩)$$

حالا می‌خواهیم گلوله وقتی بر روی سطح فرود بیاید که ارابه در روی سطح شیب‌دار در دورترین فاصله‌اش از نقطه‌ی آغاز است. زمان لازم برای این که گلوله با سطح برخورد کند عبارت است از $۲v\sin(\theta-\beta)/g\cos\beta$ چون $g\cos\beta$ مولفه‌ی شتاب عمود بر سطح است و $v\sin(\theta-\beta)$ سرعت اولیه در راستای y است. زمانی را که طول می‌کشد تا ارابه به دورترین فاصله در روی سطح برسد $u/g\sin\beta$ است؛ چون $g\sin\beta$ شتاب در امتداد سطح شیب‌دار است. از برابری این دو زمان داریم

$$\frac{۲v\sin(\theta-\beta)}{g\cos\beta}=\frac{u}{g\sin\beta} \qquad (٤-١٤٠)$$

از ترکیب رابطه‌های (٤-١٣٩) و (٤-١٤٠) به دست می‌آید

$$\frac{۲v\sin(\theta-\beta)}{g\cos\beta}=\frac{v\cos(\theta-\beta)}{g\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad ۲\tan(\theta-\beta)\tan\beta=۱ \qquad (٤-١٤١)$$

این رابطه‌ای است که θ را تعیین می‌کند. و با رابطه‌ی (٤-١٣٧) هم‌ارز است. می‌توانید این را نشان دهید.

ت-۹ مسافت‌های افقی و عمودی عبارتند از

$$x=(v_\circ\cos\theta)t \quad , \qquad y=(v_\circ\sin\theta)t-\frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (٤-١٤٢)$$

مربع فاصله تا نقطه‌ی P عبارت است از

$$\ell^۲=x^۲+y^۲=(v_\circ t\cos\theta)^۲+(v_\circ t\sin\theta-gt^۲/۲)^۲=v_\circ^۲t^۲-v_\circ gt^۳\sin\theta+\frac{۱}{٤}g^۲t^٤ \qquad (٤-١٤٣)$$

می‌خواهیم مشتق ℓ هرگز صفر نباشد. این بدان معنی است که مشتق $\ell^۲$ هرگز صفر نیست (چون در $\ell=\circ$ نیستیم). مشتق وقتی **صفر است** که

$$\circ=\frac{d\ell^۲}{dt^۲}=v_\circ^۲-\frac{۳}{۲}v_\circ gt\sin\theta+\frac{۱}{۲}g^۲t^۲ \quad\Rightarrow\quad g^۲t^۲-۳v_\circ gt\sin\theta+۲v_\circ^۲=\circ$$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{۳v_\circ g\sin\theta\pm\sqrt{۹v_\circ^۲g^۲\sin^۲\theta-۸v_\circ^۲g^۲}}{۲g^۲} \qquad (٤-١٤٤)$$

اگر $۹v_\circ^۲g^۲\sin^۲\theta-۸v_\circ^۲g<\circ$ باشد، t پاسخ حقیقی **ندارد**. در نتیجه $\sin\theta<۲\sqrt{۲}/۳$ است که متناظر با $\theta=۷۰{,}۵^\circ$ است. برای زاویه‌های کم‌تر از این مقدار، $\ell^۲$ (یا ℓ) یک تابع افزایشی برحسب t است.

ت - ۱۰ حل ۱ (الف): محورهای دستگاه مختصات را افقی و عمودی در نظر بگیرید. داریم

$$x=v_\circ\cos(\theta+\varphi)t \quad , \qquad y=v_\circ\sin(\theta+\varphi)t-\frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (٤-١٤٥)$$

توپ وقتی بر روی سطح فرود می‌آید که $y/x=\tan\theta$ باشد:

$$\frac{v_\circ \sin(\theta+\varphi)t - gt^۲/۲}{v_\circ \cos(\theta+\varphi)t} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad v_\circ \sin(\theta+\varphi) - \frac{۱}{۲}gt = \tan\theta\, v_\circ \cos(\theta+\varphi) \tag{٤-١٤٦}$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی، به دست می‌آید

$$t = \frac{۲v_\circ}{g}\left[\left(\cancel{\sin\theta\cos\varphi} + \cos\theta\sin\varphi\right) - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\cancel{\cos\theta\cos\varphi} - \sin\theta\sin\varphi\right)\right] \tag{٤-١٤٧}$$

یا

$$t = \frac{۲v_\circ}{g}\left(\cos\theta\sin\varphi + \frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}\sin\varphi\right) = \frac{۲v_\circ}{g\cos\theta}\left(\cos^۲\theta + \sin^۲\theta\right)\sin\varphi \;= \frac{۲v_\circ \sin\varphi}{g\cos\theta} \tag{٤-١٤٨}$$

برای این زمان ، مسافت در امتداد سطح عبارت است از

$$d = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{v_\circ \cos(\theta+\varphi)t}{\cos\theta} = \frac{v_\circ \cos(\theta+\varphi)}{\cos\theta}\frac{۲v_\circ \sin\varphi}{g\cos\theta}$$

$$= \left(\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos^۲\theta}\right)\sin\varphi\cos(\theta+\varphi) \tag{٤-١٤٩}$$

(**ب**) : برای بیشینه کردن این باید مشتق $\sin\varphi\cos(\theta+\varphi)$ را نسبت به φ حساب کنیم و مساوی صفر قرار دهیم

$$\cdot = \frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\cos(\theta+\varphi) = \cos\varphi\cos(\theta+\varphi) - \sin\varphi\sin(\theta+\varphi)$$

$$= \cos\left(\varphi + (\theta+\varphi)\right) = \cos(\theta+۲\varphi) \quad \Rightarrow \quad \theta + ۲\varphi = ۹۰^\circ \quad \Rightarrow \therefore \varphi = ٤٥^\circ - \frac{\theta}{۲} \tag{٤-١٥٠}$$

حل ۲ دستگاه مختصات را چنان برگزینید که محور x در امتداد سطح شیب‌دار و محور y آن عمود بر سطح باشند. شتاب در امتداد سطح $-g\sin\theta$ و در راستای عمود بر سطح $-g\cos\theta$ است . مولفه‌های سرعت اولیه عبارت‌اند از $v_\circ\cos\varphi$ و $v_\circ\sin\varphi$. زمان کل حرکت برابر است با

$$T = \frac{۲v_{\circ y}}{g\cos\theta} = \frac{۲v_\circ \sin\varphi}{g\cos\theta} \tag{٤-١٥٠}$$

این نتیجه با پاسخ بالا سازگار است. پس، مسافت کل در امتداد سطح شیب‌دار عبارت است از

$$d = (v_\circ\cos\varphi)t - \frac{۱}{۲}(g\sin\theta)t^۲ = (v_\circ\cos\varphi)\left(\frac{۲v_\circ\sin\varphi}{g\cos\theta}\right) - \frac{۱}{۲}(g\sin\theta)\left(\frac{۲v_\circ\sin\varphi}{g\cos\theta}\right)^۲$$

$$= \frac{۲v_\circ^۲\sin\varphi}{g\cos^۲\theta}(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) = \left(\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos^۲\theta}\right)\sin\varphi\cos(\theta+\varphi) \tag{٤-١٥١}$$

این نتیجه هم با حل ۱ سازگار است. قسمت (ب) مانند بالا ست.

ت-۱۱

$$\mathbf{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^۲\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot\theta + ۲\dot r\dot\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\beta^۲ r_\circ e^{\beta t} - r_\circ e^{\beta t}\omega^۲\right)\hat{\mathbf{r}} + ۲\beta r_\circ \omega e^{\beta t}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{٤-١٥٢}$$

اگر $\beta = \pm\omega$ باشد قسمت شعاعی **a** صفر می‌شود. در نگاه نخست به نظر عجیب است که وقتی $r = r_\circ e^{\beta t}$ است، شتاب شعاعی ذره صفر باشد. خطای این گونه اندیشیدن این است که می‌پندارد فقط $\ddot r$ در a_r سهیم است؛ جمله‌ی $-r\dot\theta^۲$ هم بخشی از شتاب شعاعی است و نمی‌توان آن را نادیده گرفت.

ناسازه در این است که اگرچه $a_r = ۰$ است، سرعت شعاعی $v_r = \dot{r} = r_\circ \omega e^{\beta t}$ با زمان در راستای شعاع افزایش پیدا می‌کند.
پاسخ ناسازه این است که حالت خاص در مختصات کارتزی می‌تواند گمراه کننده باشد. در مختصات قطبی $v_r \neq \int a_r(t)dt$
چون در $\int a_r(t)dt$ واقعیت این که بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ توابعی از زمان‌اند به حساب نمی‌آیند.

فصل ۵

پایستگی انرژی و تکانه

۵-۱ قانون های پایستگی

قانون‌های پایستکی در فیزیک اهمیت زیادی دارند. برای فهمیدن کمی و کیفی این که در سامانه‌ی فیزیکی چه می گذرد کمک زیادی می‌کنند.

هنگامی که می‌گوییم چیزی "پایسته" است ، منظور این است که آن چیز با زمان تغییر نمی‌کند. در یک سامانه‌ی فیزیکی (مانند غلتیدن توپی از بالای تپه و یا برهم‌کنش مجموعه‌ای از ذرات) اگر کمیتی پایسته باشد، حرکت پایانی سامانه به مقدار زیادی مقید می‌شود. اگر بتوان به تعداد کافی کمیت پایسته برای یک سامانه نوشت (معمولا می‌توانیم، دستکم برای مسئله‌هایی که ما در این کتاب بررسی می‌کنیم) می‌توان حرکت پایانی آن را به یک حالت شدنی محدود کرد و بنابراین، مسئله را حل کرده‌ایم.

پایستگی انرژی و تکانه دو تا از اصلی‌ترین قانون‌های پایستگی در فیزیک‌اند. قانون پایستگی سوم، قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای، هم اصلی است و در فصل ۸ به آن خواهیم پرداخت.

برای حل مسئله حتما *ضروری* نیست که از پایستگی انرژی و تکانه استفاده کنیم. در مکانیک ،قانون‌های پایستگی از قانون‌های نیوتون به دست می‌آیند و بنابراین، اگر دوست داشتید می‌توانید از $F = ma$، اصول اولیه و غیره برای حل مسئله استفاده کنید. اما به زودی خسته و دلسرد می‌شوید. نکته‌ی اصلی در باره‌ی قانون‌های پایستگی این است که کار را آسان‌تر می‌کنند و ابزاری برای فهمیدن رفتار کلی سامانه فراهم می‌آورند.

۵-۱-۱ پایستگی انرژی در یک بعد

ذره‌ای با جرم m را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند و به آن نیروی $F = F(x)$ وارد می‌شود. یعنی نیرو تنها تابعی از مکان ذره است. معادله‌ی حرکت این ذره بنابه $F = ma$ عبارت است از

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{۵-۱}$$

اگر بنویسیم $\ddot{x} \equiv a = v\, dv/dx$ آنگاه رابطه‌ی (۵-۱) به صورت زیر در می‌آید

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x) \tag{۵-۲}$$

متغیرهای این معادله‌ی دیفرانسیل از هم جدا پذیرند. اگر v ها را در یک طرف و x ها را در سوی دیگر نگه داریم و از دو طرف انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\int mv'dv' = \int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \tag{۵-۳}$$

یا

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = E + \int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \tag{۵-٤}$$

در رابطه‌ی (۵-٤) ، E ثابت انتگرال‌گیری است و مقدارش به گزینه‌ی $x_\circ$ بستگی دارد.

اگر **تابع انرژی پتانسیل**، $V(x)$، را با رابطه‌ی زیر تعریف کنیم

$$V(x) \equiv -\int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \tag{۵-۵}$$

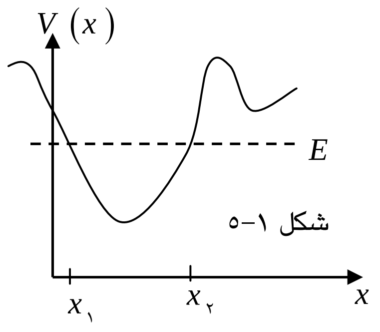
می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \qquad (٥-٦)$$

جمله‌ی نخست سمت چپ رابطه‌ی (٦-٥) **انرژی جنبشی** است: $T \equiv mv^2/2$. چون رابطه‌ی (٦-٥) در همه‌ی نقاط مسیر حرکت ذره برقرار است، پس جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذره مقدار ثابتی است. یعنی اگر ذره انرژی پتانسیل از دست بدهد (یا به دست آورد) آنگاه سرعتش افزایش (یا کاهش) پیدا می‌کند. رابطه‌ی (٦-٥) بیان **قانون پایستکی انرژی** است.
هر دو کمیت E و $V(x)$ به گزینه‌ی دلخواه x_0 در رابطه‌ی (٤-٥) بستگی دارند. این بدان معنی است که E و $V(x)$ به تنهایی بی‌معنی‌اند. فقط تفاوت E ها وتفاوت $V(x)$ ها در دو نقطه یا دو حالت معنی دارند؛ این تفاوت‌ها مستقل از گزینه‌ی x_0 اند. برای مثال، گفتن این که در ارتفاع y انرژی پتانسیل گرانشی جسمی $-\int F\,dy = -\int(-mg)\,dy = mgy$ است معنی ندارد. باید بگوییم mgy انرژی پتانسیل نسبت به سطح زمین است (اگر x_0 را سطح زمین برگزینیم). اگر می‌خواستیم می‌توانستیم بگوییم انرژی پتانسیل نسبت به نقطه‌ای در ۷ متری زیر زمین $mgy + (7\text{m})mg$ است. اگرچه غیر معمول، اما این گزاره کاملا درست است.
اگر رابطه‌ی (٦-٥) را در دو نقطه‌ی x_1 و x_2 بنویسیم واز یکدیگر کم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}mv^2(x_2) - \frac{1}{2}mv^2(x_1) = V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x')\,dx' \qquad (٥-٧)$$

حالا روشن است که فقط اختلاف انرژی‌ها اهمیت دارند. اگر انتگرال رابطه‌ی (٧-٥) را *کار* انجام یافته روی ذره برای حرکت از مکان x_1 به مکان x_2 تعریف کنیم، آنگاه *قضیه‌ی کار- انرژی* را به دست می‌آوریم.
قضیه ١- ٥ ***تغییر انرژی جنبشی ذره بین دو نقطه‌ی x_1 و x_2 با کار انجام یافته بر روی ذره برای رفتن از نقطه‌ی x_1 به نقطه‌ی x_2 برابر است.***
اگر جهت‌های نیرو و حرکت یکی باشند (یعنی علامت‌های $F(x)$ و dx در رابطه‌ی (٧-٥) یکسان باشند) کار مثبت است و سرعت افزایش می‌یابد. اگر جهت نیرو در خلاف جهت حرکت باشد، کار منفی است و سرعت کاهش می‌یابد.
با انتخاب نقطه‌ی مرجع x_0 برای انرژی پتانسیل، تابع $V(x)$ کاملا مشخص می‌شود. اگر خم $V(x)$ و خط مربوطه به مقدار ثابت E را با هم رسم کنیم (شکل ١-٥ را ببینید) تفاوت آن دو، انرژی جنبشی را به دست می‌دهد. ذره نمی‌تواند به جاهایی برود که $V(x) > E$ است. چون در این صورت انرژی جنبشی آن منفی می‌شود و این بی‌معنی است ؛ چون بنابه تعریف، انرژی جنبشی $mv^2/2$ است که همواره یک کمیت مثبت است. نقاطی که در آنها $V(x) = E$ است " نقاط بازگشت" اند. در این نقطه‌ها ذره می‌ایستد (انرژی جنبشی و در نتیجه سرعتش صفر می‌شود) و جهت حرکتش را عوض می کند.



شکل ١-٥

شکل (١-٥) ذره‌ای را نشان می‌دهد که بین نقطه‌های x_1 و x_2 به دام افتاده است و بین این دو نقطه پس و پیش می‌رود و در نوسان است. از این دیدگاه، تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ بسیار سودمند است؛ چون ویژگی‌های عمومی حرکت را بدون انجام محاسبه آشکار می‌کند.
نکته١: در رابطه‌ی (٧-٥) به نقطه‌ی مرجع x_0 اشاره نشده است؛ با این وجود، این رابطه‌ای با معنی و درست است. پس، به نظر بی‌خردانه می‌آید که نقطه‌ی مرجع x_0 را وارد بحث خود کردیم. این کار به گونه‌ای شبیه این است که برای یافتن تفاوت عددهای ١٧ و ٨ اول اندازه‌ی این عددها را نسبت به ٥ بسنجیم (که می‌شود ١٢و ٣) و سپس٣ را از ١٢ کم کنیم و٩ را به دست آوریم. این تفریق ساده در مورد انتگرال‌ها دشوار است. بنابراین، به سود ماست که یک بار برای همیشه انتگرال را انجام دهیم

و همه‌ی مکان‌ها را با عدد معین $V(x)$ بسنجیم و سپس اگر خواستیم اختلاف V ها را حساب کنیم. ♣

نکته ۲: اگر نیرو تنها به x بستگی داشته باشد، همواره می‌توان تابعی از $\dot{x}=v$ و x یافت که مقدار آن با زمان تغییر نمی‌کند (پایسته می‌ماند). این گونه توابع را" انتگرال‌های اول" می‌گویند. انرژی E در رابطه‌ی (۶-۵) از این دست است. می‌توان آن را به گونه‌ی دیگری هم به دست آورد. انرژی جنبشی را در نظر بگیرید

$$T \equiv \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{۸-۵}$$

اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت :

$$\dot{T} = m\dot{x}\ddot{x} = m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x} \tag{۹-۵}$$

اگر از (۹-۵) نسبت به زمان انتگرال بگیریم، داریم:

$$T = \int F(x)\dot{x}dt = \int F(x)\frac{dx}{dt}dt = \int F(x)dx \tag{۱۰-۵}$$

با توجه به تعریف *انرژی پتانسیل*:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx' \tag{۵-۵}$$

رابطه‌ی (۱۰-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T + V = E = \text{ثابت} \tag{۶-۵}$$

که همان رابطه‌ی (۶-۵) است. باز هم یادآوری می‌کنم: در رابطه‌ی (۵-۵) حد پایین انتگرال، x_0، ثابت دلخواه است که به ثابت انتگرال‌گیری در (۱۰-۵) مربوط است. این بدان معنی است که در انرژی کل E یک مقدار افزودنی دلخواه هم وجود دارد.
توجه داشته باشید که رابطه‌ی (۵-۵) را می‌توان وارون نوشت و نیرو را از انرژی پتانسیل به دست آورد.

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \equiv -V'(x) \tag{۱۱-۵}$$

می‌بینیم که در یک بعد، نیروهایی که تنها به x بستگی دارند به پایستگی انرژی می‌انجامند. نیروهای از این دست **نیروی *پایستار*** نام دارند. برای پایستار بودن نیرو در سه بعد، کافی نیست که نیرو تنها تابعی از مکان باشد، بلکه شرط دیگری نیز لازم است. در بخش ۲-۱-۵ با جزییات بیشتری به نیروهای پایستار خواهیم پرداخت.

قانون پایستگی انرژی آگاهی‌های فراوانی درباره‌ی حرکت به دست می‌دهد. این آگاهی‌ها بدون این که مجبورباشیم ازچیزی انتگرال بگیریم و مکان x جسم را به صورت تابعی از زمان آوریم، به دست می‌آیند. اگر مکان و سرعت اولیه داده شده باشند، می‌توان مقدار ثابت E را حساب کرد. اگر در رابطه‌ی (۶-۵) به جای T مقدار $mv^2/2$ قراردهیم، ،خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = E - V(x) \tag{۱۲-۵}$$

که سرعت ذره را (به جز علامت آن) در هر مکانی به دست می‌دهد. چون انرژی جنبشی آشکارا مقدار مثبتی است، حرکت به ناحیه‌ای محدود است که در آن ناحیه $V(x) \le E$ است. دو مثال زیر می‌تواند به توضیح این نکته یاری کند. ♣

با داشتن $V(x)$ می‌توان به سادگی از آن مشتق گرفت و نیروی $F(x)$ را به دست آورد. اما اگر $F(x)$ داده شده باشد، برای یافتن $V(x)$ باید از $F(x)$ انتگرال‌گرفت که می‌تواند دشوارتر باشد. این دشواری بستگی به این دارد که قانون نیرو تا چه

اندازه پیچیده باشد.

مثال ۱-۵ (انرژی پتانسیل گرانشی): دو جرم M و m را در نظر بگیرید که فاصله‌شان r است. قانون گرانش نیوتون می‌گوید بین این دو جرم نیروی ربایشی با اندازه‌ی GMm/r^2 وجود دارد. انرژی پتانسیل این سامانه‌ی دوجرمی در فاصله‌ی r از یکدیگر نسبت به فاصله‌ی r_0 آنها ، عبارت است از

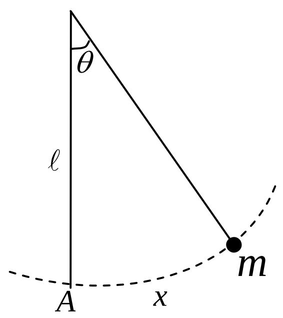
$$V(r)-V(r_0)=-\int_{r_0}^{r}\frac{-GMm}{r'^2}dr'=\frac{-GMm}{r}+\frac{GMm}{r_0} \qquad (۵-۱۳)$$

(علامت منها در انتگرالنده به خاطر ربایشی بودن نیرو است). ∞ گزینه‌ی مناسی برای r_0 است؛ چون در این صورت جمله‌ی دوم صفر می‌شود. از این پس این گزینه را حفظ خواهیم کرد. با این گزینه رابطه‌ی (۱۳-۵) به صورت زیر در می‌آید.

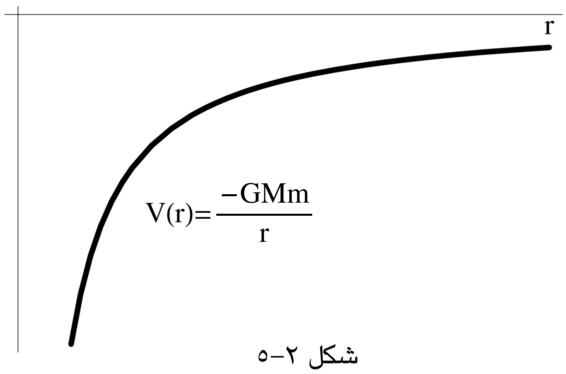
$$V(r)=-G\frac{Mm}{r} \qquad (۵-۱٤)$$

این تابع در شکل (۲-۵) نشان داده شده است.

مثال ۲-۵ (آونگ ساده): آونگ ساده‌ای از گلوله‌ای به جرم m تشکیل شده است که برابر شکل (۳-۵) از میله‌ی سبکی (از جرم میله چشم‌پوشی شده است) به طول ℓ آویزان است (در اینجا به جای ریسمان میله را جایگزین کرده‌ایم تا بتوانیم حرکت در نقطه‌ی آویز را هم بررسی کنیم). گلوله با سرعت v از مکان ترازمندی آغاز به حرکت می‌کند. برای مقدارهای متفاوت v چه نوع حرکت هایی شدنی است؟



شکل ۳-۵



شکل ۲-۵

حل: مسافتی را که گلوله می‌پیماید $x=\ell\theta$ است. θ جابه‌جایی زاویه‌ای گلوله از پائین‌ترین نقطه‌ی مسیر آن است. تابع انرژی پتانسیل نیروی بازگرداننده‌ی $F=-mg\sin\theta=-mg\sin(x/\ell)$ برابر است با

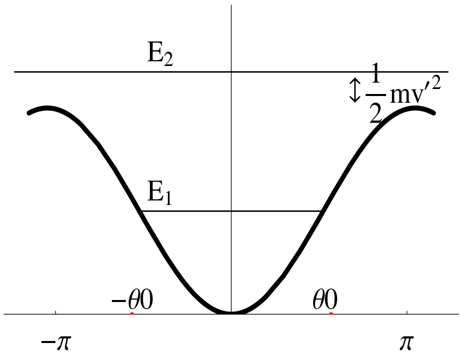
$$V=mg\ell[1-\cos(x/\ell)]=mg\ell(1-\cos\theta) \qquad (۵-۱۵)$$

نمودار این تابع در شکل (٤-۵) نشان داده شده است. (توجه کنید: نقاط $\theta=\pi,\ \theta=-\pi$ را می‌توانید ببینید.) حرکت از $\theta=0$ آغاز می‌شود و گلوله با سرعت v شروع به حرکت می‌کند. چون ثابت دلخواه موجود در V را چنان انتخاب کرده‌ایم که $V(0)=0$ باشد، در نتیجه انرژی کل $E=mv^2/2$ است. اگر $E<2mg\ell$ باشد (انرژی E_1 در شکل (٤-۵))، حرکت به

بین دو زاویه‌ی $\pm\theta_\circ$ محدود خواهد بود و داریم $V(\theta_\circ)=E$ یعنی:

$$mg\ell(1-\cos\theta_\circ)=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (5-16)$$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta_\circ=\frac{v^2}{2g\ell}$$



شکل ٤-٥

در این نقاط (یعنی در $\pm\theta_\circ$) انرژی جنبشی صفر می‌شود و گلوله‌ی آونگ به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. پس، حرکت نوسانی است و دامنه‌ی آن $\theta_\circ$ است. از سوی دیگر اگر گلوله را چنان هل دهیم که $E>2mg\ell$ (انرژی E_2 در شکل ٤-٥) باشد، آنگاه انرژی جنبشی هرگز صفر نمی‌شود.

هنگامی که گلوله به بالاترین نقطه عمودی خود می‌رسد هنوز انرژی آن مثبت است یعنی:

$$\frac{1}{2}mv'^2=E-2mg\ell=\frac{1}{2}mv^2-2mg\ell \qquad (5-17)$$

در چنین حالتی، حرکت به جای این که نوسانی باشد، چرخشی پیوسته می‌شود.

٥-١-٢ نیروهای پایستار

کار هر نیرویی (نیرو می‌تواند به x ، v ، t و یا هر چیز دیگری وابسته باشد) برروی یک جسم با رابطه‌ی

$$W\equiv\int Fdx \qquad (5-18)$$

تعریف می شود. (ما هنوز هم خود را به حرکت در یک بُعد محدود می‌کنیم. تعمیم رابطه‌ی بالا به سه بُعد را در بخش بعدی خواهیم دید.) اگر جسم از نقطه‌ی x_1 شروع به حرکت کند و به نقطه‌ی x_2 برود، بدون نگرانی از چگونگی حرکت (سرعت جسم می‌تواند زیاد یا کم شود و یا براثر نیروی دیگری جهتش را تغییر دهد) همواره می‌توان گفت که کار نیرو با تغییر در انرژی جنبشی جسم برابر است.

$$W\equiv\int_{x_1}^{x_2}Fdx=\int_{x_1}^{x_2}ma\,dx=\int_{x_1}^{x_2}m(\frac{vdv}{dx})dx=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (5-19)$$

برای برخی نیروها، کار مستقل از این است که جسم چگونه حرکت می‌کند. نیرویی که (در یک بعد) تنها به مکان وابسته باشد این ویژگی را دارد؛ چون انتگرال رابطه‌ی (٥-٧) فقط به نقاط آغازین و پایانی بستگی دارد. انتگرال $W\equiv\int F\,dx$ سطح زیر خم F برحسب x است و این سطح مستقل از این است که ذره چگونه از x_1 به x_2 می رود.

برای نیروهای دیگر، کار به چگونگی حرکت ذره بستگی دارد. نیروهایی که به t و v وابسته‌اند از این گروه اند. چون در این صورت مهم است که چه *هنگام* و با چه *سرعتی* ذره از x_1 به x_2 می‌رود. نیروی اصطکاک مثال معمول این گروه از نیروهاست. اگر قطعه‌ای را در روی میز از x_1 به x_2 بلغزانید، کار نیروی اصطکاک $-\mu mg\,|\Delta x|$ می‌شود. اما اگر همین قطعه را به مدت یک ساعت با دست روی میز به چپ و راست یا به پس و پیش هل دهید تا سرانجام به x_2 برسد، آنگاه مقدار کار منفی که اصطکاک روی قطعه انجام می‌دهد بسیار بزرگ خواهد بود. چون اصطکاک همواره با حرکت جسم مخالفت می‌کند، سهم آن در انتگرال $W\equiv\int F\,dx$ همیشه منفی است و هرگز حذف شدن رخ نمی‌دهد (برای هر جابه‌جایی جزیی مقدارهای منفی برهم

افزوده می‌شوند.). بنابراین، حاصل انتگرال یک عدد منفی بزرگ است.

در مورد نیروی اصطکاک موضوع از این قرار است که نیروی μmg فقط تابعی از مکان نیست. در هرمکان اصطکاک می‌تواند در جهت راست یا چپ باشد، بستگی به این دارد که ذره در کدام سو حرکت می‌کند. پس، اصطکاک به سرعت بستگی دارد. درست است که نیروی اصطکاک تابع *علامت* سرعت است اما همین کافی است که فقط به مکان وابسته بودن آن را نابود کند.

پس، **نیروی پایستار** را نیرویی تعریف می‌کنیم که کارش روی یک جسم برای رفتن از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر مستقل از این باشد که سفر چگونه انجام می‌گیرد. با توجه به بحثی که در بالا کردیم، می‌دانیم که نیروی یک بعدی وقتی پایستار است که فقط به x وابسته باشد (در دو یا سه بعد برای پایستار بودن نیرو شرط دیگری لازم است و در بخش۳-۵ به آن خواهیم پرداخت.) نکته این است: می‌توان برای هر نیرویی کار تعریف کرد؛ اما فقط برای نیروهای پایستار می‌توان از انرژی پتانسیل مربوط به آن نیرو سخن گفت. پتانسیل برای هر مقدار x یک عدد، $V(x)$، نسبت می‌دهد که با $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F dx$ داده می‌شود. اگر این انتگرال به مسیر بستگی داشته باشد، خوش تعریف نمی‌شود و نمی‌دانیم چه عددی به $V(x)$ نسبت بدهیم. پس تنها از انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای پایستار سخن می‌گوییم. سخن گفتن از انرژی پتانسیل نیروی اصطکاک، به ویژه، بی‌معنی است.

۳-۱-۵ کار و انرژی پتانسیل

وقتی که توپی فرو می‌افتد، آیا افزایش سرعت آن به خاطر کاری است که نیروی گرانش روی توپ انجام می‌دهد یا در اثر کاهش انرژی پتانسیل توپ است؟ خب، هردو (یا دقیق‌تر اگر بگوییم یکی از آنها). کار و انرژی پتانسیل دو بیان متفاوت از یک چیزاند (دستکم برای نیروهای پایستار این چنین است). هر کدام از این بیان‌ها را به کار ببریم به نتیجه‌ی درست می‌رسیم. اما باید هوشیار بود و از هر دو بیان استفاده نکرد و اثر گرانش را روی توپ "دوبار" به حساب نیاورد. از کدام بیان باید استفاده کرد به این بستگی دارد که چه چیزی را"سامانه" می‌نامیم؛ درست مانند $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و نمودار آزاد نیروها، این جا هم برای استفاده از انرژی و کار مشخص کردن سامانه مهم است.

قضیه‌ی کار- انرژی که با قضیه ۱-۵ بیان شد، به یک ذره مربوط بود. اگر با سامانه‌ای سروکار داشته باشیم که از چند بخش تشکیل شده باشد چه کنیم؟ قضیه‌ی عمومی کار- انرژی می‌گوید کاری که نیروی *خارجی* روی یک سامانه انجام می‌دهد با تغییر انرژی سامانه برابر است. این انرژی می‌تواند جنبشی، پتانسیل یا گرما (که در واقع انرژی جنبشی است) باشد. چون جرم نقطه‌ای ساختار درونی ندارد نمی‌توان آن را گرم کرد. ازاین رو، بیان عمومی قضیه‌ی کار–انرژی به قضیه‌ی ۱-۵ کاهش می‌یابد. اما برای دیدن این که اگر سامانه ساختار درونی داشته باشد چگونه باید با آن کنار آمد به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۵ (بالا بردن کتاب): کتابی را با سرعت ثابت از روی میز بلند می‌کنیم. چون سرعت ثابت است انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند. می‌خواهیم ببینیم برای گزینه‌های مختلف "سامانه" قضیه‌ی کار- انرژی چه می‌گوید.

- **سامانه=(کتاب)**: در این حالت نیروی دست و گرانش هر دو نسبت به سامانه نیروهای خارجی‌اند. کتاب سامانه‌ی ماست؛ چون انرژی آن تغییر نمی‌کند، پس بنابه قضیه‌ی کار- انرژی داریم

$$W_{\text{دست}} + W_{\text{گرانش}} \quad \Leftrightarrow \quad mgh + (-mgh) = ۰$$

- **سامانه =(کتاب+ زمین)** : در این صورت دست تنها نیروی خارجی است. نیروی گرانش بین کتاب و زمین نیروی داخلی است و انرژی پتانسیل داخلی تولید می‌کند. بنا به قضیه‌ی کار- انرژی داریم

$$W_{\text{دست}} = \Delta V_{\text{کتاب-زمین}} \quad \Leftrightarrow \quad mgh = mgh$$

- **سامانه= (کتاب+ زمین + دست)**: در این حالت هیچ نیروی خارجی وجود ندارد. انرژی درونی سامانه تغییر می‌کند. چون انرژی پتانسیل زمین- کتاب افزایش و انرژی پتانسیل *دست* کاهش پیدا می‌کنند. برای این که کتاب را بلند کنید باید مقداری کالری بسوزانید. پس، قضیه‌ی کار- انرژی می‌گوید

$$0=\Delta V_{\text{دست}}+\Delta V_{\text{کتاب-زمین}} \quad \Leftrightarrow \quad 0=mgh+(-mgh)$$

در حقیقت، کارآیی بدن انسان ۱۰۰٪ نیست و بنابراین، آنچه که به واقع در اینجا روی می‌دهد این است که انرژی پتانسیل دست بیشتر از mgh کاهش پیدا می‌کند و مقداری گرما تولید می‌کند. جمع این دو تغییر انرژی با $-mgh$ برابر است.

نتیجه: به سامانه می‌توان به گونه‌های متفاوت نگریست. انرژی پتانسیل در یک نگرش ممکن است مناسب و در نگرشی دیگر نامناسب باشد. در عمل آسان‌تر است که با انرژی پتانسیل کار کنیم. پس، در مورد توپی که رها می‌شود معمولا گرانش را در سامانه‌ی "توپ- زمین" نیروی داخلی می‌گیریم. اگر سامانه را فقط توپ فرض کنیم آنگاه نیروی گرانش نیروی خارجی است.

۵-۲ حرکت در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی؛ نوسانگر هماهنگ

ذره‌ی تنها هنگامی در حال ترازمندی است که نیروی کل وارد بر آن صفر باشد. برای نیروی پایستار این بدان معنی است که با توجه به رابطه‌ی (۵-۱۱) خم انرژی پتانسیل در مکان ترازمندی ذره، افقی باشد. یعنی مشتق پتانسیل که نیروست باید در نقطه‌ی ترازمندی صفر باشد. حالا حرکت ذره‌ای را در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی در نظر بگیرید. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنید نقطه‌ی ترازمندی در مبداء مختصات، $x=0$، است. مقدار ثابت موجود در V را چنان انتخاب کنید که پتانسیل در $x=0$ صفر شود: $V(0)=0$. اگر تنها به جابه‌جایی‌های کوچک علاقمند باشیم می‌توانیم $V(x)$را در همسایگی $x=0$، یعنی در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی، بسط تیلور- مک لورین بدهیم:

$$V(x)=V(0)+xV'(0)+\frac{1}{2}x^2V''(0)+\cdots \tag{۵-۲۰}$$

که در آن $V'=dv/dx$ و $V''=d^2v/dx^2$ و ... اند. جمله‌ی اول بسط بالا صفر است؛ چون مبداء پتانسیل را چنان انتخاب کردیم که $V(0)=0$ باشد. چون $x=0$ نقطه‌ی ترازمندی است، پس $V'(x=0)$ صفر است (چون در نقطه‌ی ترازمندی نیرو صفر است و V' به نیرو مربوط است.) . پس، جمله‌ی دوم بسط بالا هم صفر است. در ننتیجه، در همسایگی $x=0$ آنچه که باقی می‌ماند عبارت است از

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2V''(0) \tag{۵-۲۱}$$

یا

$$V(x)=\tfrac{1}{2}kx^2 \quad ; \qquad k=V''(0) \tag{۵-۲۲}$$

حرکت در همسایگی هر نقطه‌ی ترازمندی را با تقریب خوب می‌توان با این تابع پتانسیل توصیف کرد، آن را همه جا می‌بینیم. در مکانیک کوانتومی هم همان قدر اهمیت دارد که درمکانیک کلاسیک اهمیت دارد. از این رو بررسی جزئیات آن سودمند است.

نکته: تابع پتانسیل $V(x)$ را می‌توان در همسایگی هر کمینه‌ی موضعی بسط داد. لازم نیست که این بسط فقط در همسایگی $x=0$ باشد. فرض کنید نقطه‌ی ترازمندی در x_0 است. یعنی x_0 کمینه‌ی موضعی $V(x)$ است. بسط تیلور آن در نقطه x_0

عبارت است از

$$V(x)=V(x_\circ)+V'(x_\circ)(x-x_\circ)+\frac{1}{2!}V''(x_\circ)(x-x_\circ)^2+\frac{1}{3!}V'''(x_\circ)(x-x_\circ)^3+\cdots \qquad (۵-۲۳)$$

جمله‌ی اول، $V(x_\circ)$، یک عدد است و می‌توان از آن چشم پوشید؛ چون فقط اختلاف انرژی است که معنی دارد (یا به بیان هم‌ارز چون $F=dV/dx$). بنا به تعریف، در نقطه‌ی ترازمندی $V'(x_\circ)=0$ است و آنچه که باقی می‌ماند جمله‌ی $V''(x_0)$ و مرتبه‌های بالاتر است. اما برای جابه‌جایی‌های کوچک، مرتبه‌های بالاتر در مقایسه با جمله‌ی $V''(x_\circ)$ کوچک و کوچک‌تر می‌شوند و نادیده گرفتن آنها تقریب بسیار خوبی به دست می‌دهد (حتی اگر $V'''(x_\circ)$ خیلی بزرگتر از $V''(x_\circ)$ باشد، می‌توانیم بازه‌ی $x-x_\circ$ را به اندازه‌ی کافی کوچک انتخاب کنیم به طوری که جمله‌ی $V'''(x_\circ)$ قابل چشم پوشی بشود.) پس داریم

$$V(x)\approx\frac{1}{2}V''(x_\circ)(x-x_\circ)^2 \qquad (۵-۲۴)$$

و اگر $V''(x_\circ)$ را برابر "ثابت فنر"، k، بنامیم، آنگاه رابطه‌ی (۵-۲۴) همانند قانون هوک می‌شود: $V(x)=(1/2)k(x-x_\circ)$. بنابراین، اگر دور شدن ذره‌ای از نقطه‌ی ترازمندیش به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، می‌توان به برخی پرسش‌ها در باره‌ی حرکت ذره پاسخ داد. پرسش‌هایی مانند: آیا حرکت نوسانی است؟ بسامد آن چگونه به دامنه‌اش بستگی دارد؟ ♣

با نگاه کردن به رابطه‌ی (۵-۲۱) یا (۵-۲۴) می‌بینیم که بسامد این حرکت، $\omega=\sqrt{k/m}$، عبارت است از

$$\omega=\sqrt{V''(x_\circ)/m} \qquad (۵-۲۵)$$

مثال ۵-۴: ذره‌ای در پتانسیل $V(x)=A/x^2-B/x$ حرکت می‌کند. بسامد نوسان‌های کوچک آن را حول نقطه‌ی ترازمندی به دست آورید. پتانسیل بالا به حرکت سیاره مربوط است و دوباره آن را در فصل ۷ خواهیم دید.

حل: نخستین کاری که باید بکنیم محاسبه‌ی مکان ترازمندی، $x_\circ$ ، است. داریم

$$V'(x)=-\frac{2A}{x^3}+\frac{B}{x^2} \qquad (۵-۲۶)$$

با قرار دادن $V'(x)=0$ خواهیم داشت $x=2A/B\equiv x_\circ$. این نقطه‌ی ترازمندی ذره است. مشتق دوم $V(x)$ عبارت است از

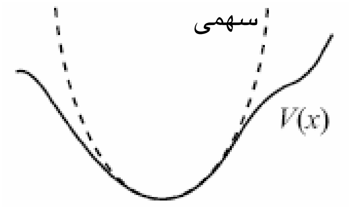
$$V''(x)=\frac{6A}{x^4}-\frac{2B}{x^3} \qquad (۵-۲۷)$$

با جایگزین کردن $x_\circ=2A/B$ برای x در رابطه‌ی (۵-۲۷) بسامد حرکت به دست می‌آید

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(x_\circ)}{m}}=\sqrt{\frac{B^4}{8mA^3}} \qquad (۵-۲۸)$$

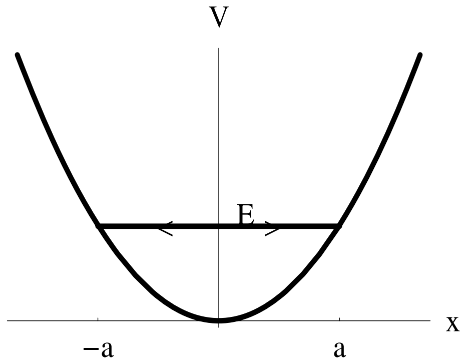
رابطه‌ی (۵-۲۵) نتیجه‌ی مهمی است. چون هر تابع $V(x)$ در بازه‌ی به اندازه‌ی کافی کوچک در همسایگی کمینه‌ی آن– نقطه‌ی ترازمندی– مانند شکل (۵-۵) شبیه یک سهمی است (به جز در حالت خاصی که $V''(x_\circ)=0$ است.) بنابراین، در رابطه‌ی (۵-۲۲) برای $k>0$ و هر انرژی $E>0$ دو نقطه وجود دارد که در آن دو نقطه $V(x)=E$ است. شکل (۵-۶ الف را ببینید) یعنی:

$$x = \pm a \quad , \quad a = \sqrt{\frac{۲E}{k}} \tag{۵-۲۹}$$

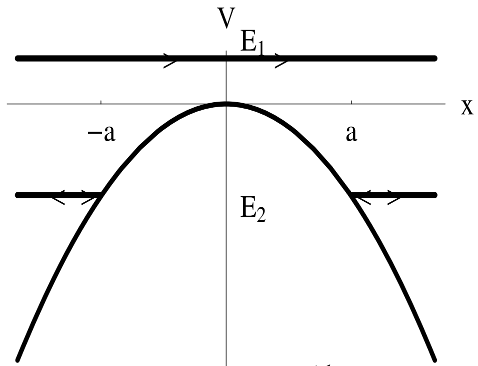


شکل ۵-۵

می‌بینیم که حرکت بین این دو نقطه نوسانی است. از سوی دیگر اگر $k < ۰$ باشد، خم رابطه‌ی (۵-۲۲) سهمی رو به پائین خواهد بود (شکل ۶-۵ ب). در این حالت دو نوع حرکت شدنی است. اگر $E < ۰$ باشد آنگاه ذره می‌تواند تا یک فاصله‌ی کمینه‌ی حدی به نقطه‌ی ترازمندی نزدیک شود، در آنجا توقف لحظه‌ای بکند و جهت خود را تغییر دهد (انرژی $E_۲$ در شکل۶-۵ ب را ببینید). اما اگر $E > ۰$ (شکل۶-۵ ب، انرژی $E_۱$) باشد، آنگاه ذره به اندازه‌ی کافی انرژی دارد که از مانع



شکل۶-۵ الف



شکل ۶-۵ ب

بگذرد و هرگز به حالت سکون در نیاید. در این صورت ذره برای همیشه به حرکت خود در همان سوی ادامه خواهد داد. در این حرکت سرعت ذره با نزدیک شدن به $x = ۰$ (نقطه‌ی ترازمندی) کاهش می‌یابد و سپس افزایش پیدا می‌کند. با توجه به رابطه‌ی (۵-۱۱) نیروی مربوط به تابع انرژی پتانسیل رابطه (۵-۲۲) عبارت است از:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۲}kx^{۲}\right) = -kx \tag{۵-۳۰}$$

اگر $k > ۰$ باشد، نیرو ربایشی و اگر $k < ۰$ باشد نیرو رانشی است. در هر دو حالت نیرو با فاصله از نقطه‌ی ترازمندی متناسب است.

اینک معادله‌ی حرکت (قانون دوم نیوتن) را می‌توان به گونه‌ی زیر نوشت:

$$m\ddot{x} + kx = ۰ \tag{۵-۳۱}$$

حل این معادله بسیار آسان است. با استفاده از پایستگی انرژی، رابطه‌ی (۵-۱۲)، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}m\dot{x}^{۲} = E - V(x) \Rightarrow \frac{۱}{۲}m\dot{x}^{۲} = E - \frac{۱}{۲}kx^{۲} \Rightarrow \dot{x}^{۲} = \frac{۲E}{m} - \frac{k}{m}x^{۲} \tag{۵-۳۲}$$

و یا داریم

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{۲E}{m} - \frac{k}{m}x^{۲}\right)^{۱/۲} \Rightarrow \int\left(\frac{۲E}{m} - \frac{k}{m}x^{۲}\right)^{-۱/۲}dx = \int dt \tag{۵-۳۳}$$

چون درآینده با معادله‌های از این دست بارها روبرو خواهیم شد، بررسی روش حلی که بتوان در مثال‌های دیگر هم به کار برد سودمند است. پیش از پرداختن به آن، پاسخ انتگرال (۵-۳۳) را به دست می‌آوریم و به کوتاهی به فرازهای فیزیکیِ پاسخ

می‌پردازیم. پاسخ انتگرال‌های از گونه‌ی (۳۳-۵) به صورت زیر است:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}=\sin^{-۱}\frac{u}{a}+c \qquad (۵-۳۴)$$

نخست رابطه‌ی (۳۳-۵) را به صورت بالا در بیاورید و سپس به جای u متغیر x قرار دهید:

$$\frac{dx}{\sqrt{k/m}\sqrt{(۲E/k)-x^{۲}}}=\int dt \qquad (۵-۳۵)$$

پاسخ به قرار زیر است:

$$\frac{۱}{\sqrt{k/m}}\sin^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۲E/k}}+A=t \qquad (۵-۳۶)$$

یا

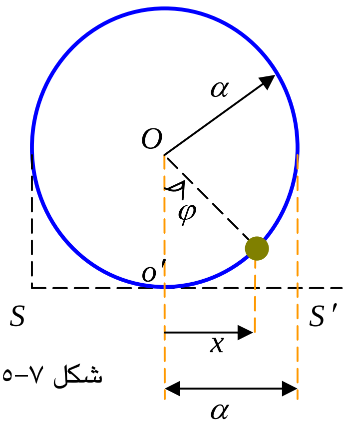
$$\sin^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۲E/K}}+B=\sqrt{k/m}t \qquad (۵-۳۷)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x=\sqrt{۲E/k}\sin\left(\sqrt{k/m}\,t+B\right) \qquad (۵-۳۸)$$

و یا به طور کلی: $x=\alpha\sin(\omega t+B)$ که در آن $\alpha\equiv\sqrt{۲E/k}$ و $\omega\equiv\sqrt{k/m}$ است. می‌بینیم که در این‌جا دو ثابت α و B وجود دارند. ثابت $\alpha\equiv\sqrt{۲E/k}$ همان a در رابطه‌ی (۲۹-۵) است؛ یعنی بیشینه‌ی جابه‌جایی از نقطه‌ی ترازمندی است. مفهوم‌های فیزیکی α و B را با مراجعه به شکل (۷-۵) می‌توان دریافت: خط SS' مولفه‌ی x حرکت ذره است و α بیشینه مقدار x از نقطه‌ی میانی، O'، خط SS' است. دایره‌ی به شعاع α را در نظر بگیرید که در $O'(x=۰)$ بر خط SS' مماس است. در هر لحظه از زمان، مکان x ذره را می‌توان با تصویر $\alpha\sin\varphi$ روی SS' نشان داد. فرض کنید $\varphi=\omega t$ است؛ یعنی اجازه دهیم زاویه‌ی φ به طور یکنواخت با آهنگ ω افزایش پیدا کند (ω **سرعت زاویه‌ای** یا **بسامد زاویه‌ای** نام دارد). آنگاه $x=\alpha\sin\omega t$ نمایش حرکت یکنواخت ذره بر روی مسیر دایره‌ای باسرعت زاویه‌ای ω است. پس، می‌بینیم که بیشینه مقدار x همان α است که دامنه یا بیشینه مقدار **جابه‌جایی** است. بسامد زاویه‌ای ω با رابطه‌ی $\omega=۲\pi f$ به بسامد واقعی f مربوط است. کمیت ωt یا $\omega t+B$ زاویه فاز و یا فاز حرکت نام دارد. به این ترتیب معنی *ثابت فاز* یا فاز اولیه B (به ازای $t=۰$) روشن است: در دایره‌ی مرجع، در زمان $t=۰$، اندازه‌ی زاویه‌ی فاز اولیه B است. اگر رابطه‌ی $x=\alpha\sin(\omega t+B)$ را با استفاده از اتحاد مثلثاتی بسط دهیم، روشنگری بیشتری به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x&=\alpha\sin(\omega t+B)=\alpha\sin\omega t\cos B+\alpha\cos\omega t\sin B \\ &=D\sin\omega t+F\cos\omega t \end{aligned} \qquad (۵-۳۹)$$



شکل ۷-۵

که در آن $D=\alpha\cos B$ و $F=\alpha\sin B$ اند. بنابراین، با تقسیم این دو بر هم داریم:

$$B=\tan^{-۱}\frac{F}{D} \qquad (۵-۴۰)$$

پس، می‌بینیم که در زمان $t=۰$، جابه‌جایی $x=F$ است، در نتیجه F مقدار اولیه‌ی

جابه‌جایی است. اگر از رابطه‌ی (۳۹-۵) نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = D\,\omega \cos \omega t - F\,\omega \sin \omega t \qquad (۵-٤۱)$$

از اینجا معنی D آشکار می‌شود. $D\omega$ مقدار اولیه (در زمان $t=0$) سرعت است. می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$D\,\omega = \alpha\,\omega \cos B = \sqrt{2E/k}\,\sqrt{k/m}\,\cos B = \sqrt{2E/m}\,\cos B \qquad (۵-٤۲)$$

اگر فاز اولیه، B، صفر باشد؛ یعنی حرکت از نقطه ترازمندی در $x=0$ آغاز شود، برای زمان $t=0$ داریم:

$$D\,\omega = \sqrt{2E/m} = \sqrt{\frac{2(mv^2/2)}{m}} = V \qquad (۵-٤۳)$$

۱-۲-۵ پاسخ معادله‌ی نوسانگر هماهنگ

اینک می‌خواهیم به معادله‌ی (۳۱-۵) برگردیم و آن را حل کنیم. معادله‌ی (۳۱-۵) یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو خطی است، یعنی شامل توان اول x و مشتق‌های آن است. چنین معادله‌هائی از ویژگی مهمی برخوردارند. پاسخ‌های آنها از اصل *برنهی* پیروی می‌کنند: اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ هر دو پاسخ معادله‌ی (۳۱-۵) باشند، آنگاه ترکیب خطی آنها نیز پاسخ است

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \qquad (۵-٤٤)$$

که در آن a_1 و a_2 مقادیر ثابت‌اند. به بیان دیگر، داریم

$$m\ddot{x} + kx = 0 = a_1(m\ddot{x}_1 + kx_1) + a_2(m\ddot{x}_2 + kx_2) = 0 \qquad (۵-٤۵)$$

فراتر از این، اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ پاسخ‌های مستقل خطی باشند (یعنی اگر یکی ضریبی از دیگری نباشد) آنگاه رابطه‌ی (٤٤-۵) در واقع پاسخ عمومی است. رابطه‌ی (۳۱-۵) از مرتبه‌ی دوم است و می‌توان با دو بار انتگرال گرفتن نسبت به زمان پاسخ را به دست آورد. پاسخ عمومی باید دو ثابت انتگرال‌گیری داشته باشد. بنابراین، برای یافتن پاسخ عمومی، آنچه که باید انجام داد، یافتن دو پاسخ مستقل $x_1(t)$ و $x_2(t)$ است. نخست حالت $k<0$ را بررسی می‌کنیم. برای این وضعیت نقطه‌ی $x=0$ نقطه‌ای است که در آن پتانسیل $V(x) = (1/2)kx^2$ بیشینه است. رابطه‌ی (۳۱-۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{x} - p^2 x = 0 \quad , \quad p = \sqrt{-k/m} \qquad (۵-٤٦)$$

به آسانی می‌توان با جایگزینی دید که $x = e^{pt}$ و $x = e^{-pt}$ هر دو در این معادله صدق می‌کنند. برای نمونه $x = e^{pt}$ را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = p\,e^{pt} \quad , \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = p^2 e^{pt} \qquad (۵-٤۷)$$

در رابطه‌ی (٤٦-۵) جایگزین کنید:

$$p^2 e^{pt} - p^2 e^{pt} = 0 \qquad (۵-٤۸)$$

پس: $x = e^{pt}$ پاسخ معادله‌ی (٤٦-۵) است. به همین ترتیب، $x = e^{-pt}$ در رابطه‌ی (٤٦-۵) صدق می‌کند. پس پاسخ عمومی ترکیب خطی از این دو است، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2} A\, e^{pt} + \frac{1}{2} B\, e^{-pt} \qquad (۵-٤۹)$$

ضرایب $A/۲$ و $B/۲$ همان $a_۱,a_۲$ رابطه‌ی (۴۴-۵) اند. در اینجا ضریب ۱/۲ را برای مناسبت‌های آینده وارد کردیم (این در واقع کاملاً دلخواه و قراردادی است که ثابت‌های دلخواه را A و B یا $A/۲$ و $B/۲$ بنامیم.) روشن است که جابه‌جایی اندک، در حالت عمومی، به افزایش نمایی x با زمان خواهد انجامید و این افزایش تا هنگامی ادامه خواهد یافت که دیگر تقریب موجود در رابطه‌ی (۲۲-۵) درست نباشد. بنابراین، ترازمندی ناپایدار است، چیزی که باید انتظار آن را می‌داشتیم، چون نقطه‌ی ترازمندی جایی است که V بیشینه است.

اینک به حالت $k>۰$ توجه کنید: $V(x)$ در $x=۰$ دارای کمینه است. تابع انرژی پتانسیل، رابطه‌ی (۲۲-۵) از نوع نوسانگر هماهنگ ساده است. معادله‌ی حرکت (۳۱-۵) را به صورت زیر بنویسید:

$$\ddot{x}+\omega^۲x=۰ \quad , \quad \omega=\sqrt{k/m} \tag{۵-۵۰}$$

به آسانی می‌توان دید که توابع $x=\cos\omega t$ و $x=\sin\omega t$ پاسخ‌های معادله‌ی (۵۰-۵) اند. (این را در حل انتگرال (۳۳-۵) نیز دیدیم. آنجا که نوشتیم $x=D\sin\omega t+F\cos\omega t$). پس پاسخ عمومی معادله‌ی (۵۰-۵) عبارت است از:

$$x=c\cos\omega t+d\sin\omega t \tag{۵-۵۱}$$

ثابت‌های c و d (همانند Dو F) را باید با استفاده از دانسته‌های اولیه به دست آورد. اگر در زمان $t=۰$ ذره با سرعت $v_۰$ در $x_۰$ باشد آنگاه به سادگی در می‌یابیم که:

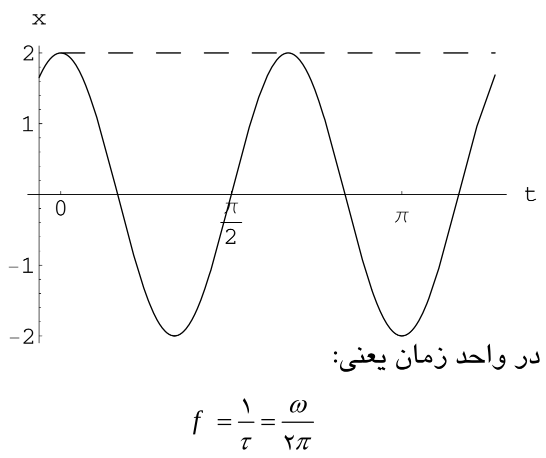
$$x(t=۰)\equiv x_۰=c\cos(۰)+d\sin(۰)=۰ \;\Rightarrow\; c=x_۰$$
$$\dot{x}(t=۰)\equiv v_۰=-c\omega\sin(۰)+d\omega\sin(۰) \;\Rightarrow\; d=\frac{v_۰}{\omega} \tag{۵-۵۲}$$

همان‌گونه که دیدید رابطه‌ی (۵۱-۵) را می‌توان به گونه‌ی دیگری هم نوشت:

$$x=a\cos(\omega t-\theta) \tag{۵-۵۳}$$

که در آن ثابت‌های a و θ با رابطه‌های $d=a\sin\theta$ و $c=a\cos\theta$ به c و d مربوطند. ثابت a **دامنه** نام دارد و همانی است که در رابطه‌ی (۲۹-۵) آمده است و حدهائی را تعریف می‌کند که ذره در فاصله‌ی بین آنها ، $x=\pm a$، نوسان می‌کند. حرکت نوسانی دوره‌ای است و دوره‌ی آن τ است که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود. در شکل (۸-۵) مکان ذره نسبت به زمان رسم شده است و رفتار نوسانی آن را نشان می‌دهد.

$$\tau=۲\pi/\omega \tag{۵-۵۴}$$



شکل ۸-۵

بسامد f عبارت است از تعداد نوسان‌ها در واحد زمان یعنی:

$$f=\frac{۱}{\tau}=\frac{\omega}{۲\pi} \tag{۵-۵۵}$$

توجه کنید که این بررسی برای حرکت ذره در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی آن و برای هرگونه تابع انرژی پتانسیل است. برای نمونه، این بحث را با همان دقت برای ذره‌ای به جرم m که به انتهای یک فنر (بدون جرم) بسته شده است هم می‌توان بکار برد. نیروی فنر $F_S=-kx$ و پتانسیل آن $kx^{۲}/۲$ است. k ثابت نیرو یا ثابت فنر است. برای جابه‌جائی‌های به اندازه‌ی بسنده کوچک، هر سامانه‌ای از این دست همانند نوسانگر هماهنگ ساده رفتار می‌کند؛ به ویژه، دوره یا بسامد نوسان‌های کوچک را می‌توان از مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل در نقطه‌ی ترازمندی بدست آورد.

مثال۵-۵ (ذره‌ی باردار در میان دو ذره‌ی باردار): دو بار مساوی q در نقطه‌های $x=\pm a$ قرار دارند. ذره‌ی باردار دیگری با بار q بین این دو بار حرکت راست‌خط دارد. دوره‌ی نوسان‌های کوچک بار q کدام است؟

حل: در اینجا نیرو در فاصله‌ی میان $x=-a$ و $x=+a$ (بازه ی $|x|<a$) عبارت است از:

$$F=\frac{q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(a+x)^{۲}}-\frac{q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(a-x)^{۲}} \qquad (۵-۵۶)$$

تابع انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V=\frac{q^2}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{۱}{a+x}+\frac{۱}{a-x}\right)=\frac{q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{۲a}{a^{۲}-x^{۲}}\right) \qquad (۵-۵۷)$$

به روشنی دیده می‌شود که مکان ترازمندی در جایی است که $V'=۰$ باشد. یعنی در $x=\circ$. آنگاه به سادگی می‌بینیم که

$$k=V''(۰)=\frac{q^{۲}a}{\pi\varepsilon_{\circ}}\left.\frac{a^{۲}+۳x^{۲}}{(a^{۲}-x^{۲})^{۳}}\right|_{x=\circ}=\frac{q^{۲}}{\pi\varepsilon_{\circ}a^{۳}} \qquad (۵-۵۷)$$

پس:

$$\tau=\frac{۲\pi}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_{\circ}a^{۳}m} \qquad \text{و} \qquad \omega^{۲}=\frac{q^{۲}}{\pi\varepsilon_{\circ}a^{۳}m} \qquad (۵-۵۸)$$

فیزیک محاسباتی۱:

از نرم افزار *Mathematica* استفاده کنید و مسئله‌ی نوسانگر هماهنگ را که معادله‌ی آن به صورت $\ddot{x}[t]+\omega_{\circ}^{۲}x[t]=\circ$ است ، حل کنید.

(الف) : اگر شرایط اولیه را چنان انتخاب کنیم که $x[\circ]=x_{\circ}$, $\dot{x}[\circ]=v_{\circ}$ باشند، نشان دهید که پاسخ $x[t]=x_{\circ}\cos[\omega_{\circ}t]+\frac{v_{\circ}\sin[\omega_{\circ}t]}{\omega_{\circ}}$ است. $x[t]$ را برحسب زمان رسم کنید.

(ب): نشان دهید که می‌توان پاسخ را به صورت $A\cos[\omega_{\circ}t+\delta]$ نوشت که در آن $x[\circ]=A\cos[\delta]$ و $\dot{x}[\circ]=-A\omega_{\circ}\sin[\delta]$ اند. A دامنه و δ فاز است.

(پ): با استفاده از دستور LaplaceTransform معادله را حل کنید.

(ت): برای رسم پاسخ در قسمت (الف) پیکان روی محورهای افقی و عمودی را تعریف کنید و پیکانی هم روی خم بگذارید.

فیزیک محاسباتی ۲ (پاسخ با بسط سری)

بسیاری مواقع معادله‌های دیفرانسیل را می‌توان با بسط سری زمانی حل کرد.

(الف): در محیط *Mathematica* تابع کاربر زیر را تعریف کنید و آنرا با دستور Protect[diffSeriOne] نگهداری کنید.

```
Clear["Global` *"]
diffSeriOne[eq_,z_,t_,initialx_,initialv,Order_]:=
 Modul[{tempser,tempeq,tempvar,tempsol,tempinit},tempest=z→Series[z,{t,0,order}];
  tempeq=((eq[[1]]-eq[[2]])//.tempser)==0;
  tempvar=(Table[D[z,{t,j}],{j,2,order+2}]/.t→0)//Flatten;
  tempsol=Solve[tempeq,tempvar]//Flatten;
  tempinit={Head[z][0]→initialx,Head[z]'->initialv};
  z/.tempser/.tempsol/.tempinit]
```

در اینجا eq ورودی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم است. z تابع و t متغیر مستقل است. initialx و initialv شرایط اولیه‌اند. Order، مرتبه‌ی پاسخ سری است. این فرایند فرض می‌کند که پاسخ را می‌توان به صورت سری توانی نوشت.

(ب): با آزمودن گامهای میانی پاسخ معادله‌ی $Y''[t]+\gamma Y'[t]+\omega^2 Y[t]=+aY'[t]^2 Y[t]$ توضیح دهید که چگونه دستور diffSerieOne کار می‌کند.

(پ): معادله‌ی حرکت نوسانگر خطی را در نظر بگیرید: $x''[t]+\omega_0^2 x[t]=0$ بسط سری زمانی آن را بیابید. با استفاده از دستور Sum جمع بینهایت را حساب کنید و جواب دقیق را به دست آورید.

فیزیک محاسباتی۳ (پتانسیل و نمودار فضای فاز نوسانگر خطی)

نوسانگر خطی را که با رابطه‌ی $mx''[t]+kx[t]=0$ توصیف می‌شود، در نظر بگیرید.

(الف): با کاستن این معادله‌ی مرتبه‌ی دو به معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول، انرژی پایسته را بیابید. از انرژی پایسته، جمله‌های مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل را مشخص کنید.

(ب): تابع انرژی پتانسیل را رسم کنید و رفتار سامانه را توصیف کنید.

(پ): با استفاده از دستورهای **ContourPlot** و **ShadowPlot3D** نمودار فاز را (یعنی تابع سرعت نسبت به مکان) رسم کنید.

۵-۳ پایستگی انرژی در سه بعد

۵-۳-۱ قانون پایستگی انرژی در یک بعد: چند مثال

در بخش۱-۱-۵ قانون پایستگی انرژی را از قانون‌های نیوتون برای حالتی به دست آوردیم که نیرو تنها تابعی از x بود. با این حال، این قانون پایستگی کاربردهای فراوانی دارد و با شناختن گونه‌های مختلف انرژی (انرژی گرمایی، شیمیایی، الکترومغناطیسی و غیره) به گستره‌های فراتر از مکانیک راه یافت تا جائی که اینک به عنوان یکی از بنیادی‌ترین قانون‌های فیزیک شناخته می‌شود. وجود چنین قانونی و نیز قانون‌های پایستگی تکانه و تکانه‌ی زاویه‌ای، در واقع با اصل نسبیت ارتباط

نزدیک دارند. قانون‌های پایستگی تکانه‌ی خطی و انرژی از همگنی فضا و زمان نتیجه می‌شوند. قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای به همسانگردی فضا مربوط است.

بسیاری از نیروهای ناپایستار (*یا اتلافی*) را می‌توان اثرهای بزرگ مقیاس (ماکروسکوپیک) نیروهایی دانست که در مقیاس‌های کوچک به واقع پایستارند. برای نمونه، نفوذ ذره‌ای در یک محیط بازدارنده، مانند اتمسفر، را در نظر بگیرید: ذره نیرویی را تجربه می‌کند که به سرعتش بستگی دارد و بنابراین، ناپایستار است. با این حال، اگر به وضعیت در ابعاد خردمقیاس (میکروسکوپیک) بنگریم، درمی‌یابیم که آنچه روی می‌دهد این است که ذره تعدادی برخورد با مولکول‌های محیط انجام می‌دهد. در هر برخورد، انرژی پایسته است و بخشی از انرژی جنبشی ذره‌ی فرودی به مولکول‌های محیط که با ذره برخورد می‌کنند منتقل می‌شود (این برخوردها را در فصل ۸ بررسی خواهیم کرد.) با افزایش برخوردها، انرژی ذره‌ی برخورد کننده رفته‌رفته میان مولکول‌های اطراف ذره توزیع می‌شود. به این صورت، انرژی میانگین مولکول‌های محیط افزایش و از حرکت ذره کاسته می‌شود. این انرژی افزوده شده به محیط در مقیاس کلان نگرانه به صورت گرما نمود می‌یابد و به افزایش دمای محیط می‌انجامد. برای هر نیروی *دلخواه* F آهنگ تغییر انرژی جنبشی T با رابطه‌ی (۹-۵) داده می شود

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} = F\frac{dx}{dt} \tag{۵-۹}$$

در نتیجه تغییر انرژی جنبشی، dT، در بازه‌ی زمانی dt برابر است با

$$dT = Fdx \equiv dW \tag{۵-۵۹}$$

dW کاری است که نیروی F در جابه‌جایی جزیی dx انجام می‌دهد (بنابراین، برای نیروی پایستار، انرژی پتانسیل $V(x)$ برابر است با منهای کار انجام شده توسط نیرو در جابه‌جایی سامانه از نقطه‌ی ثابت x_0 به نقطه‌ی x). پس، کار سنجه‌ای (معیاری) برای تبدیل انرژی از گونه‌های دیگر به انرژی جنبشی است. آهنگ انجام کار (**توان**) با Fv تعریف می‌شود. در سامانه‌های مکانیکی واقعی (غیرآرمانی) معمولاً بخشی از انرژی مکانیکی (جنبشی یا پتانسیل) به صورت گرما یا به شکل‌های دیگر از دست می‌رود. در چنین سامانه‌هایی گوییم به سامانه نیروهای اتلافی اثر می‌کنند.

اینک بیان کمی پایستگی انرژی مکانیکی: به رابطه‌ی (۹-۵) برگردید ودو طرف آن را در dt ضرب کنید و سپس از زمان t_0 تا t_1 از آن انتگرال بگیرید

$$\int \frac{dT}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_1} Fv\, dt \Rightarrow T_1 - T_0 = \int F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_0}^{x_1} Fdx \tag{۵-۶۰}$$

همان‌گونه که می‌دانیم انتگرال سمت راست کاری است که نیروی F در زمان $t_1 - t_0$ انجام می‌دهد و با تغییر انرژی جنبشی سامانه برابر است:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx \tag{۵-۶۱}$$

تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ را پیشتر با رابطه‌ی (۵-۵) به صورت $V(x) = -\int_0^x F(x)dx$ تعریف کردیم که در آن حد پایین 0 مبداء پتانسیل است. پس، $(1/2)mv_1^2 - (1/2)mv_0^2$ در سمت چپ رابطه‌ی (۵-۶۱) را می‌توان بر حسب تابع انرژی پتانسیل و به صورت زیر نوشت:

$$\int_{x_\circ}^{x_۱} F(x)dx = -V(x_۱) + V(x_\circ) \qquad (۵-۶۲)$$

و بنابراین داریم

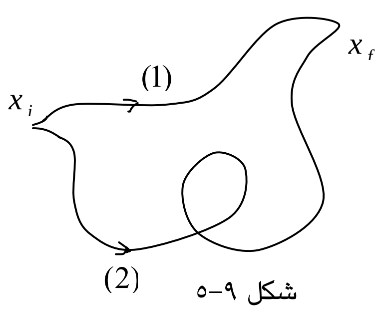
$$\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_\circ^۲ = -V(x) + V(x_\circ) \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}mv^۲ + V(x) = \frac{۱}{۲}mv_\circ^۲ + V(x_\circ) \qquad (۵-۶۳)$$

سمت راست کمیتی است که فقط به شرایط اولیه بستگی دارد و از این رو در طول حرکت ثابت باقی می‌ماند. این مقدار ثابت همان انرژی کل E است و در طول حرکت مقدار آن تغییر نمی‌کند. یعنی انرژی مکانیکی (جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل) ثابت است. این همه را پیشتر در رابطه‌ی (۶-۵) دیدیم: ثابت = T+V=E

اکنون که کار نیرو را می‌شناسیم؛ اندکی به عقب برمی‌گردیم. در بخش ۱-۵ نیروهای پایستار را تعریف کردیم و گفتیم نیرویی پایستار است که تنها به مکان، x، وابسته باشد، و نیز دریافتیم که برای این‌گونه نیروها، پایستگی انرژی برقرار است. همچنین آموختیم که اگر نیرو پایستار باشد آنگاه کار این نیرو برای جابه‌جایی جسمی از نقطه‌ی اولیه‌ی x_i به نقطه پایانی x_f با اختلاف انرژی پتانسیل در این دو نقطه برابر است. یعنی

$$V(x_f) - V(x_i) = \Delta V = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (۵-۶۴)$$

سمت چپ این رابطه یک عدد است یا بهتر است بگوئیم تفاضل دو عددی است که به نقاط x_f و x_i نسبت داده شده‌اند. سمت راست رابطه‌ی بالا کاری است که نیروی $F(x)$ انجام می‌دهد. این رابطه توضیح نمی‌دهد که ذره‌ی برای رفتن از x_i به x_f چه مسیری را پیموده است. در شکل (۹-۵) اگر نیروی $F(x)$ ذره را بر روی مسیر (۱) از x_i به x_f ببرد همان مقدار کار انجام می‌دهد که از مسیر (۲) ذره را بین این دو نقطه‌ی ثابت x_i و x_f جابه‌جا کند. زیرا نقطه‌های x_i و x_f ثابت اند و در آن نقاط پتانسیل مقادیر معینی دارد. با این توضیح



شکل ۹-۵

می‌توان تعریف دیگری برای نیروهای پایستار (نیروهایی که به سرعت بستگی ندارد) بیان کرد: نیروی پایستار نیرویی است که اگر به جسمی اثر کند و جسم را بین دو نقطه جابه‌جا کند، کارش مستقل از مسیری است که ذره بین دو نقطه می‌پیماید. از این تعریف روشن است که کار نیروی پایستار بر روی **مسیر بسته** همواره صفر است. اگر به شکل (۹-۵) توجه کنید می‌بینید که می‌توان مسیر بسته را چنین تصور کرد: در مسیر(۱)، از نقطه‌ی x_i به نقطه‌ی x_f برویم و بر روی مسیر (۲) از x_f به x_i برگردیم. کار نیرو بر روی مسیر (۱)برابر است با $W_۱ = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = V(x_i) - V(x_f)$ و کار نیرو بر روی مسیر (۲) کار برابر است با $W_۲ = \int_{x_f}^{x_i} F(x)dx = V(x_f) - V(x_i)$. پس، کار کل روی مسیر بسته عبارت است از

$$W_۱ + W_۲ = [V(x_i) - V(x_f)] + [V(x_f) - V(x_i)] = \circ \qquad (۵-۶۵)$$

یعنی اگر نیرو پایستار باشد، کارش در یک مسیر بسته صفر است. در رابطه‌ی (۱۹-۵) دیدیم که برای هر نیروی دلخواه (پایستار یا ناپایستار) کار نیرو برابراست با تغییر انرژی جنبشی

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx = \frac{۱}{۲}mV_f^۲ - \frac{۱}{۲}mV_i^۲ = \Delta T \qquad (۵-۶۶)$$

اما **فقط** برای نیروهای پایستار کار با تغییر انرژی پتانسیل برابر است. پس هنگامی که *تنها* با نیروهای پایستار سروکار داشته باشیم، داریم

$$\int_{x_i}^{x_f} F\,dx = T_f - T_i = -V(x_f) + V(x_i) \qquad (۵-۶۷)$$

که چیزی نیست جز بیان پایستگی انرژی مکانیکی

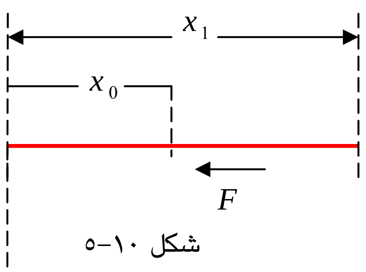
$$T_f + V(x_f) = T_i + V(x_i) \qquad (۵-۶۸)$$

نیروی گرانشی نیروی پایستار است. زیرا همان‌گونه که دیدیم عبارت است از

$$\mathbf{F}_{ij} = f\,(r_{ij})\hat{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}\;\hat{\mathbf{r}} \qquad (۵-۶۹)$$

اگر m_j جرم زمین و r_{ij} شعاع آن باشد، نیروی گرانشی وارد به جسمی به جرم m_i در سطح زمین عبارت است از $F_i = m_i g$ که در آن $g = -Gm_j / r_{ij}^{۲} = ۹,۸۱\,\mathrm{m/s^{۲}}$ را شتاب گرانش می‌نامیم. بنابراین، برای بالابردن جسمی از سطح زمین تا ارتفاع h ، چه از ریسمان برای بالا کشیدن بار استفاده کنیم، چه از پله‌ها بار را به پشت‌بام برسانیم و یا از نردبان استفاده کنیم، کار لازم همواره یکسان و تنها به ارتفاع h بستگی خواهد داشت

پیشتر درباره‌ی قانون هوک هم سخن گفتیم. آن را برای تغییر طول ریسمان کشسان بیان کردیم. همان قانون برای هر جسم کشسان با برخی شرایط خاص هم به کار می‌رود. یک نمونه فنر است. در اینجا می‌خواهیم کار لازم برای کشیدن شدن یک ریسمان یا کش و یا فنر را با استفاده از قانون هوک حساب کنیم. اگر ریسمان، کش و یا فنر کاملاً کشسان باشد، پس از آنکه نیروی کشنده قطع شود به طول اولیه‌ی خود برمی‌گردد. بنابراین، نیرویی که ریسمان، کش و یا فنر را به حالت اولیه‌ی خود برمی‌گرداند (ودر ریسمان، کش و یا فنر وجود دارد) می‌تواند همانند نیروی پایستار پنداشته شود. باتوجه به این، می‌خواهیم انرژی پتانسیلی جسمی به جرم m را حساب کنیم که به ریسمان متصل است و در اثر کشیده شدن ریسمان انرژی به دست می‌آورد. فرض کنید جسمی به جرم m به انتهای ریسمان کشسانی با طول طبیعی $x_{\circ}$ وصل است. ریسمان را می‌کشیم تا طولش $x_{۱}$ بشود (شکل ۱۰-۵). همچنین فرض کنید که ثابت نیروی فنر، k است و ریسمان فراتر از **حد کشسانی** کشیده نشده است. به جاست که در اینجا یک فرض دیگری را هم یادآوری کنیم: ریسمان به آهستگی کشیده می‌شود، پس، با این فرض انرژی جنبشی چشمگیری به سامانه انتقال نمی‌یابد و انرژی جنبشی آن را می‌توان ثابت فرض کرد. اگر طول کشیده شده یا افزایش طول ریسمان، $x_{۱} - x_{\circ}$ باشد، نیروی بازگرداننده‌ی F در ریسمان در جهتی خواهد بود که ریسمان را به طول طبیعی آن برگرداند، یعنی F در جهت $x-$ خواهد بود. پس می توان



شکل ۱۰-۵

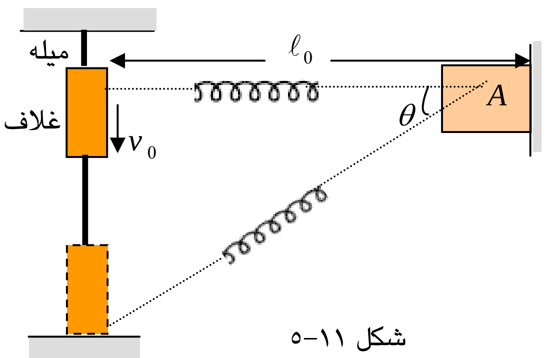
نوشت: $F = -k\,(x_{۱} - x_{\circ})$. اگر $x = x_{\circ}$ را جایی بگیریم که در آن نقطه انرژی پتانسیل صفر است، آنگاه داریم

$$V = -\int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} F dx = +k \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} (x - x_{\circ})dx = \frac{k}{۲}(x_{۱} - x_{\circ})^{۲} \qquad (۵-۷۰)$$

این انرژی پتانسیل در ریسمان کشسان کشیده شده انبار می‌شود و یک کمیت جمع‌پذیر است. مقدار کاری است که باید برای چیره شدن به نیروی بازدارنده انجام داد تا ریسمان، کش یا فنر را کشید و به طول $x_{۱}$ رساند، مشروط بر این‌که در این فرآیند

مثال۶–۵ : برابر شکل (۱۱–۵)، غلافی به جرم m می‌تواند روی میله عمودی بلغزد. غلاف با فنری که ثابت نیروی آن k و طول حالت آزادش $\ell_\circ$ است به نقطه A بسته شده است. در حالت افقی فنر طول طبیعی خود را دارد. غلاف از این حالت با سرعت $v_\circ$ شروع به حرکت می کند. سرعت غلاف را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ به دست آورید. از اصطکاک بین غلاف و میله چشم پوشی کنید.

حل: هنگامی که $\theta=\circ$ است طول آزاد یا طبیعی فنر $\ell_\circ$ است. طول فنر را در موقعیت θ با ℓ نشان دهید. ازشکل (۱۲–۵) داریم: $\Delta\ell=\ell-\ell_\circ=\dfrac{\ell_\circ}{\cos\theta}-\ell_\circ=\ell_\circ\left(\dfrac{۱-\cos\theta}{\cos\theta}\right)$. جابه‌جایی غلاف را y بنامید: $y=\ell_\circ\tan\theta$.



شکل ۱۱–۵

قضیه‌ی کار انرژی می‌آموزد.

$$\Delta T=W\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۲}mv^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_\circ^{۲}=mgy-\frac{۱}{۲}k(\Delta\ell)^{۲} \qquad (۵–۷۱)$$

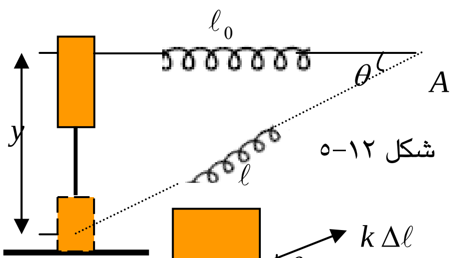
mgy کار نیروی گرانش و $k(\Delta\ell)^{۲}/۲$ کار نیروی فنر است. از اینجا v را می‌توان حساب کرد.

$$v^{۲}=v_\circ^{۲}+۲g\ell_\circ\tan\theta-\frac{k}{m}\ell_\circ^{۲}\left(\frac{۱-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^{۲} \qquad (۵–۷۱)$$

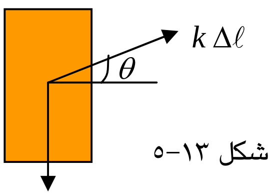
در اینجا مسئله را با استفاده از قضیه‌ی کارـ انرژی حل کردیم. قضیه‌ی کار– انرژی از قانون‌های نیوتون به دست آمده است. می‌توان آن را با استفاده‌ی مستقیم از قانون دوم نیوتون نیز حل کرد.

مثال ۷–۵: مسئله‌ی بالا را دوباره و با استفاده از قانون نیوتون حل کنید.

حل: نمودار آزاد نیروها درشکل (۱۳–۵) نشان داده شده است. به غلاف دو نیرو وارد می‌شود: نیروی وزن mg و نیروی کشش فنر $k\Delta l$. داریم



شکل ۱۲–۵



شکل ۱۳–۵

$$F_y=mg-k\Delta\ell\sin\theta=ma=mv\frac{dv}{dy}$$

$$y=\ell_\circ\tan\theta,\quad dy=\ell_\circ(۱+\tan^{۲}\theta)d\theta=\frac{\ell_\circ d\theta}{\cos^{۲}\theta} \qquad (۵–۷۲)$$

کار کل این نیروها عبارت است از $W=\int F\cdot dy$ که اگر از رابطه‌ی (۷۲–۵) به جای dy و F قرار دهیم خواهیم داشت:

$$W=\int_{0}^{\ell_0\tan\theta} mg\,dy-k\,\ell_0^{2}\int_{0}^{\theta}\left(\frac{1-\cos\theta'}{\cos\theta'}\right)\sin\theta'(1+\tan^{2}\theta')d\theta'=\int_{v_0}^{v} mv'dv'$$

$$\Rightarrow mg\,\ell_0\tan\theta-k\,\ell_0^{2}\left[\int_{0}^{\theta}\tan\theta'(1+\tan^{2}\theta')d\theta'+\int_{0}^{\theta}\frac{-\sin\theta'}{\cos^{2}\theta'}d\theta'\right]=\frac{1}{2}m\quad(v^{2}-v_0^{2})\qquad(۵-۷۳)$$

$$\Rightarrow mg\,\ell_0\tan\theta-\frac{1}{2}k\,\ell_0^{2}\left[\tan^{2}\theta'-\frac{2}{\cos\theta'}\right]_{0}^{\theta}=\frac{1}{2}m(v^{2}-v_0^{2})$$

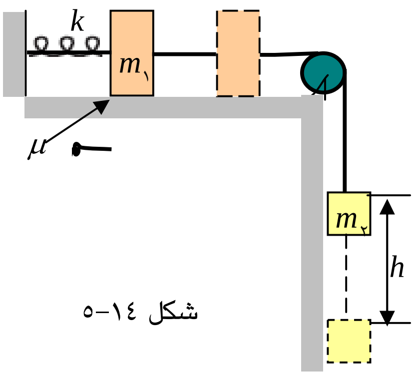
$$\Rightarrow 2g\,\ell_0\tan\theta-\frac{k}{m}\ell_0^{2}(\tan^{2}\theta-\frac{2}{\cos\theta}+2)+v_0^{2}=v^{2}$$

$$\Rightarrow 2g\,\ell_0\tan\theta-\frac{k}{m}\ell_0^{2}\left(\frac{\sin^{2}\theta+2\cos^{2}\theta-2\cos\theta}{\cos^{2}\theta}\right)+v_0^{2}=v^{2}$$

$$\Rightarrow v^{2}=v_0^{2}+2g\,\ell_0\tan\theta-\frac{k}{m}\ell_0^{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^{2}\qquad(۵-۷۴)$$

که همان پاسخ پیشین است اما به دست آوردنش اندکی طولانی‌تر بود.

مثال ۸-۵ : دو جسم با ریسمان بدون جرم به هم پیوسته‌اند. ریسمان از روی قرقره بدون اصطکاک، برابر شکل (۱۴-۵) می‌گذرد. جسمی که جرمش m_1 است روی سطح افقی ناهموار قرار دارد و به فنری با ثابت k وصل است. وقتی که فنر طول طبیعی خود را دارد این سامانه را از حالت سکون رها می‌کنیم. اگر جرم m_2 درست پیش از آنکه بایستد، به اندازه‌ی h سقوط کرده باشد؛ ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم m_1 و سطح را حساب کنید.



شکل ۱۴-۵

حل: در اینجا دو نوع انرژی پتانسیل وجود دارد: انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی که در فنر انباشته است. افزون بر این، درمسئله نیروی ناپایستار اصطکاک هم وجود دارد. می‌دانیم که کار هر نیرو ـ پایستار یا ناپایستار ـ با تغییر انرژی جنبشی برابر است. اگر W_c کارمجموعه‌ی نیروهای پایستار و W_{nc} کار نیروهای ناپایستارباشند؛ می‌توان نوشت:

$$W_{nc}+W_c=\Delta T\qquad(۵-۷۵)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که کار نیروهای پایستار برابراست با $W_c=-\Delta V$ که اگر در رابطه‌ی (۷۵-۵) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$W_{nc}=\Delta T+\Delta V=(T_f-T_i)+(V_f-V_i)$$

$$\Rightarrow\quad W_{nc}=(T_f+V_f)-(T_i+V_i)=E_f-E_i\qquad(۵-۷۶)$$

از این رابطه حالا در مسئله استفاده کنید.

$$W_{nc}=\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_s\quad\Rightarrow\quad W_{nc}=\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_s\qquad(۵-۷۷)$$

که در آن ΔV_g تغییر انرژی پتانسیل در اثر گرانش و ΔV_s انرژی پتانسیل مربوط به فنر است. در این مسئله، سامانه از حالت سکون حرکت خود را آغاز می‌کند و بنابراین $T_i=0$ است و چون سرانجام به حالت سکون می‌رسد، پس، $T_f=0$ است.

بنابراین، $\Delta T = ۰$ است. هم‌چنین کار نیروی ناپایستار، یعنی نیروی اصطکاک برابر است با:

$$W_{nc} = -fh = -\mu m_۱ gh \qquad (۵-۷۸)$$

و تغییر در پتانسیل گرانشی عبارت است از

$$\Delta V_g = V_f - V_i = -m_۲ gh \qquad (۵-۷۹)$$

که در آن مختصات عمودی از پائین‌ترین مکان $m_۲$ اندازه گیری شده است. تغییر در انرژی پتانسیل کشسانی که در فنر انباشته شده است، برابر است با

$$\Delta V_s = V_f - V_i = \frac{۱}{۲} kh^۲ \qquad (۵-۸۰)$$

که اگر از رابطه‌های (۵-۷۸) ، (۵-۷۹) و (۵-۸۰) در رابطه‌ی (۵-۷۷) جاگذاری کنیم ، خواهیم داشت

$$-\mu m_۱ gh = -m_۲ gh + \frac{۱}{۲} kh^۲ \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m_۲ g - kh/۲}{m_۱ g} \qquad (۵-۸۱)$$

۵-۳-۲ پایستگی انرژی در سه بعد

در اینجا هم از قانون نیوتون آغاز می‌کنیم: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ وبا نیروهایی سر و کار داریم که تنها تابعی از مکان اند: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. بر حسب مؤلفه‌ها داریم

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \qquad (۵-۸۲)$$

حال اگر از این رابطه بین $(x_۰, y_۰, z_۰)$ تا (x, y, z) انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$E + \int_{x_۰}^{x} F_x dx' + \int_{y_۰}^{y} F_y dy' + \int_{z_۰}^{z} F_z dz' = \frac{۱}{۲} m(v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲) = \frac{۱}{۲} mv^۲ \qquad (۵-۸۳)$$

که E ثابت انتگرال‌گیری است. انتگرال‌گیری سمت چپ تساوی در فضای سه بعدی است و به مسیری بستگی دارد که ذره برای رفتن از $(x_۰, y_۰, z_۰)$ به (x, y, z) برمی‌گزیند. توجه کنید که در یک بعد این اختیار برای ذره وجود نداشت. در یک بعد، ذره برای رفتن از $x_۰$ به x ناگزیر از باقی ماندن در روی محور x بود. با $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$ ، سمت چپ رابطه‌ی (۵-۸۳) همان $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ است. بنابراین، رابطه‌ی (۵-۸۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{۱}{۲} mv^۲ - \int_{\mathbf{r}_۰}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = E \qquad (۵-۸۴)$$

پس، اگر انرژی پتانسیل، $V(\mathbf{r})$ ، را به صورت زیر تعریف کنیم

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_۰}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \qquad (۵-۸۵)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲} mv^۲ + V(\mathbf{r}) = E \qquad (۵-۸۶)$$

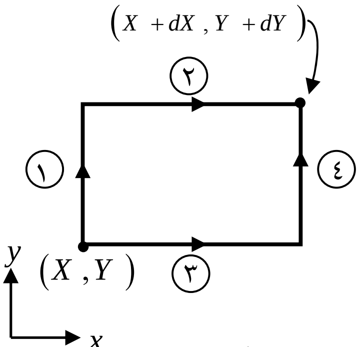
که همان پایستگی انرژی است.

نکته: در پایان این فصل در پیوست ۱ توصیف دیگری از پایستگی انرژی در سه بعد داده شده است که شاید زبانی ساده‌تر

دارد. پیوست را حتما بخوانید.

۳-۳-۵ نیروهای پایستار در سه بعد

در مقایسه با حالت یک بعدی، در سه بعد برای نیروهایی که تنها به مکان بستگی دارند؛ یک پیچیدگی اضافی وجود دارد. در یک بعد فقط یک مسیر برای رفتن از $x_\circ$ به x وجود دارد. حرکت ممکن است در طول مسیر تند شود، کند شود یا جهتش عوض شود، اما همواره یک مسیر راست‌خط وجود دارد که $x_\circ$ را به x وصل می‌کند. اما در سه بعد برای رفتن از $\mathbf{r}_\circ$ به $\mathbf{r}$ بینهایت مسیر وجود دارد. برای این که پتانسیل $V(\mathbf{r})$ معنی پیدا کند و سودمند باشد، باید **خوش تعریف باشد**، **یعنی باید مستقل از مسیر باشد**. هر نیروی مربوط به یک چنین پتانسیلی یک نیروی پایستار است. حال ببینیم در سه بعد چه نیروهای پایستارند.



شکل ۱۵-۵

قضیه ۲-۵: *شرط لازم و کافی برای اینکه پتانسیل*

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_\circ}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \qquad (۵-۸۷)$$

مربوط به نیروی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *، خوش تعریف باشد (مستقل از مسیر باشد) اینست که کرل نیروی* $\mathbf{F}$ *صفر باشد. یعنی* $\nabla\times\mathbf{F}=\circ$.

اثبات: نخست نشان می‌دهیم که $\nabla\times\mathbf{F}=\circ$ شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن پتانسیل است. یعنی « اگر $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر باشد، آنگاه $\nabla\times\mathbf{F}=\circ$ است». در شکل (۱۵-۵) مستطیل کوچکی را در صفحه‌ی $x-y$ در نظر بگیرید. بنابراین از مؤلفه‌ی z همه‌ی مختصات چشم‌پوشی می‌کنیم تا کارمان ساده‌تر باشد. اگر پتانسیل مستقل از مسیر باشد آنگاه کار انجام شده در رفتن از (X, Y) به $(X+dX, Y+dY)$ که برابر $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ است باید مستقل از مسیر باشد. به ویژه، انتگرال در مسیرهای (۱) و (۲) باید با انتگرال در مسیرهای (۳) و (٤) برابر باشد یعنی: $\int_{۱} F_y dy + \int_{۲} F_x dx = \int_{۳} F_x dx + \int_{۲} F_y dy$ ، پس شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن عبارتست از

$$\int_{۲} F_x dx - \int_{۳} F_x dx = \int_{٤} F_y dy - \int_{۱} F_y dy$$

$$\Rightarrow \int_X^{X+dX} \left(F_x(x, Y+dY) - F_x(x, Y)\right)dx = \int_Y^{Y+dY} \left(F_y(X+dX, y) - F_y(X, y)\right)dy \qquad (۵-۸۸)$$

و بنابراین،

$$F_x(x, Y+dY) - F_x(x, Y) \approx dY \left.\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,Y)} \approx dY \left.\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right|_{(X,Y)} \qquad (۵-۸۹)$$

تقریب نخست بنابه تعریف مشتق پاره‌ای پذیرفتنی است. تقریب دوم هم درست است چون مستطیل ما به اندازه‌ای کوچک است که x در اساس با X برابر است. هر خطای پدید آمده با این تقریب از مرتبه‌ی دوم خواهد بود؛ چون در رابطه‌ی بالا ضریب dY را هم داریم. همین کار را با جمله‌ی F_y انجام دهد. رابطه‌ی (۵-۸۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_X^{X+dX} dY \left.\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right|_{(X,Y)} dx = \int_Y^{Y+dY} dX \left.\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\right|_{(X,Y)} dy \qquad (۵-۹۰)$$

این انتگرال‌ها ثابت اند و انتگرال‌گیری از آنها آسان است. خواهیم داشت

$$dX\ dY\ \left(\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\right)\Bigg|_{(X,Y)}=0 \qquad (۵-۹۱)$$

و با حذف $dX\ dY$ و با توجه به این‌که (X,Y) نقطه‌ی دلخواهی است، می‌بینیم که اگر پتانسیل بخواهد مستقل از مسیر باشد باید برای هر نقطه‌ی (x,y) داشته باشیم:

$$\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}=0. \qquad (۵-۹۲)$$

مستطیل کوچک را در صفحه‌ی $x-y$ گرفتیم. همین روند را برای مستطیل‌های کوچک در صفحه‌ی $x-z$ و در صفحه‌ی $y-z$ نیز می‌توان انجام داد و دو شرط دیگر را هم به دست آورد. هر سه شرط را می‌توان به طور جمع و جور به صورت زیر نوشت

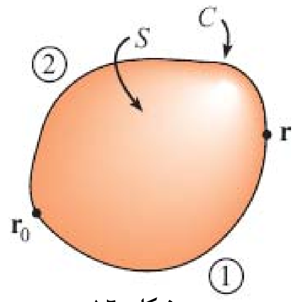
$$\nabla\times\mathbf{F}\equiv\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=0 \qquad (۵-۹۳)$$

پس نشان دادیم که $\nabla\times\mathbf{F}=0$ شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن پتانسیل است. حال نشان می‌دهیم که $\nabla\times\mathbf{F}=0$ شرط کافی هم است. به بیان دیگر: « اگر $\nabla\times\mathbf{F}=0$ باشد آنگاه $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر است».

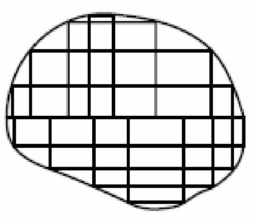
اثبات: کافی بودن از قضیه‌ی استوکس نتیجه می‌شود. قضیه‌ی استوکس به صورت زیر است

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} \qquad (۵-۹۴)$$

در اینجا C هر خم بسته‌ای است که از $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}$ می‌گذرد. یک نمونه در شکل (۱۶-۵) نشان داده شده است. S سطح دلخواهی است که C مرزهای آن است. رابطه‌ی بالا می‌گوید اگر $\nabla\times\mathbf{F}$ همه جا صفر باشد ،آنگاه برای هر خم بسته‌ای داریم $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=0$. اما شکل (۱۶-۵) نشان می‌دهد که پیمایش خم C نیازمند این است که مسیر (۱) در یک جهت و مسیر (۲) در جهت عکس پیموده شوند. چون حد هر دو انتگرال از $\mathbf{r}_0$ به $\mathbf{r}$ است. پس $\int_1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\int_2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$. ■



شکل ۱۶-۵


شکل ۱۷-۵

نکته (۱): اگر قضیه‌ی استوکس را نمی‌دانید، یا از نامش هراس دارید، می‌توانید همه چیز را از پایه آغاز و قضیه را از اول ثابت کنید. در این جا کوتاه شده‌ای از آن را برایتان می‌آورم و تشویق می‌کنم جزییات آن را برای خودتان انجام بدهید. برای سادگی، مسیرهایی را برگزینید که در صفحه‌ی $x-y$ باشند (اثبات حالت عمومی هم به همین شکل است). در انتگرال‌های dx و dy هر مسیری را می‌توان با تعدادی خطهای موازی محورهای مختصات، همانند شکل (۱۷-۵)، تقریب زد. حالا تصور کنید که روی هر یک از مستطیل‌های کوچک شکل (۱۷-۵) پادساعتگرد حرکت می‌کنید و از $\int \mathbf{F}.\,d\mathbf{r}$ انتگرال می‌گیرید. به دو صورت می‌توان به نتیجه اندیشید: (۱) با توجه به بحثی که در بالا به رابطه‌ی (۹۱-۵) انجامید، می‌بینیم که هر انتگرالی برابر است با حاصل ضرب مساحت مستطیل ($dx\ dy$) و کرل نیرو. اگر همه‌ی آنها را باهم جمع کنیم، خواهیم داشت $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}$. (۲) هر خط درونی (ضلع‌های افقی و عمودی مستطیل های کوچک) دو بار به حساب می‌آیند (اما در خلاف جهت) و بنابراین در کل انتگرال حذف می‌شوند. پس، فقط

قسمت‌های مرزی باقی می‌ماند و خواهیم داشت $\oint_c \mathbf{F(r)}.\,d\mathbf{r}$. از برابری این دو نگاه به نتیجه‌ی انتگرال، قضیه‌ی استوکس نتیجه می شود.

نکته (۲): یک جور دیگر هم می‌توان نشان داد که $\nabla\times\mathbf{F}=0$ شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن (یعنی:" اگر $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر باشد، آنگاه $\nabla\times\mathbf{F}=0$ ") پتانسیل است. این گونه: اگر $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر (و بنابراین خوش تعریف) باشد، می‌توان شکل دیفرانسیلی رابطه‌ی (۸۳-۵) را به صورت زیر نوشت

$$dV(\mathbf{r})=-\mathbf{F(r)}.\,d\mathbf{r}\equiv-(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \tag{۹۰-۵}$$

از سوی دیگر داریم

$$dV(\mathbf{r})=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz \tag{۹۶-۵}$$

برای مقدارهای دلخواه dx, dy, dz رابطه‌های (۹۵-۵) و (۹۶-۵) باید با هم برابر باشند. پس داریم

$$(F_x,F_y,F_z)=-(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F(r)}=-\nabla V(\mathbf{r}) \tag{۹۷-۵}$$

به بیان دیگر، نیرو گرادیان پتانسیل است.

$$\nabla\times\mathbf{F}=-\nabla\times\nabla V(\mathbf{r})=0 \tag{۹۸-۵}$$

زیرا ، کرل گرادیان همواره صفر است.

مثال ۹-۵ (نیروی مرکزی): نیروی مرکزی نیرویی است که در جهت شعاع است و اندازه‌ی آن فقط به فاصله r بستگی دارد. یعنی $\mathbf{F(r)}=F(r)\hat{\mathbf{r}}$. با محاسبه‌ی $\nabla\times\mathbf{F}=0$ نشان دهید که هر نیروی مرکزی یک نیروی پایستار است.

حل: $\mathbf{F}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=F(r)\hat{\mathbf{r}}=F(r)\left(\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{r}\right)=F(r)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right) \tag{۹۹-۵}$$

می‌توان دید که

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{x}{r} \tag{۱۰۰-۵}$$

همچنین برای y و z. پس مؤلفه‌ی z کرل، $(\nabla\times\mathbf{F})_z$، عبارت است از

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial(yF/r)}{\partial x}-\frac{\partial(xF/r)}{\partial y} \tag{۱۰۱-۵}$$

(در اینجا F را به جای $F(r)$ و F' را برای $dF(r)/dr$ بکار می‌بریم). پس

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial(yF/r)}{\partial x}-\frac{\partial(xF/r)}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{y}{r}F'\frac{\partial r}{\partial x}-yF\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)-\left(\frac{x}{r}F'\frac{\partial r}{\partial y}-xF\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\left(\frac{yxF'}{r^2}-\frac{yxF}{r^3}\right)-\left(\frac{xyF'}{r^2}-\frac{xyF}{r^3}\right)=0 \tag{۱۰۲-۵}$$

همین محاسبه را برای مؤلفه‌های x و y تکرار می‌کنیم.

۴-۵ تکانه

۵-۴-۱ پایستگی تکانه

در فصل۳ نشان دادیم که قانون سوم نیوتون بیان پایستگی تکانه است. قانون سوم می‌گوید نیروها جفت‌اند. یعنی برای هر نیرویی، نیروی دیگری وجود دارد که با آن برابر و در خلاف جهت آن است. دقیق‌تر بگوییم: اگر $\mathbf{F}_{ab}$ نیرویی باشد که از سوی ذره‌ی b به ذره‌ی a وارد می‌شود و $\mathbf{F}_{ba}$ نیرویی باشد که ذره‌ی a به ذره‌ی b وارد می‌کند، آنگاه برای همه‌ی زمان‌ها $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ است. این بیان قانون سوم نیوتون است و پی‌آمدهای مهمی برای تکانه به همراه دارد. دو ذره‌ی منزوی را در نظر بگیرید که برای مدتی با هم برهم کنش می‌کنند. بنا به قانون دوم نیوتون داریم

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{۵-۱۰۳}$$

پس، می‌بینیم که تغییر کل در تکانه‌ی یک ذره با انتگرال زمانی نیرویی که به آن ذره وارد می‌شود برابر است. یعنی

$$\mathbf{p}(t_۲) - \mathbf{p}(t_۱) = \int_{t_۱}^{t_۲} \mathbf{F}\, dt \tag{۵-۱۰۴}$$

انتگرال بالا، انتگرال **ضربه** است. حال اگر قانون سوم نیوتون، $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ ، را به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{p}_a(t_۲) - \mathbf{p}_a(t_۱) = \int_{t_۱}^{t_۲} \mathbf{F}_{ab}\, dt = -\int_{t_۱}^{t_۲} \mathbf{F}_{ba}\, dt = -(\mathbf{p}_b(t_۲) - \mathbf{p}_b(t_۱)) \tag{۵-۱۰۵}$$

و بنابراین

$$\mathbf{p}_a(t_۲) + \mathbf{p}_b(t_۲) = \mathbf{p}_a(t_۱) + \mathbf{p}_b(t_۱) \tag{۵-۱۰۶}$$

یعنی تکانه‌ی کل سامانه‌ی منزوی پایسته است (به زمان بستگی ندارد و با زمان تغییر نمی‌کند). رابطه‌ی (۱۰۶-۵) یک رابطه‌ی برداری است و بنابراین در واقع سه معادله برای سه مولفه‌ی p_x, p_y, p_z است.

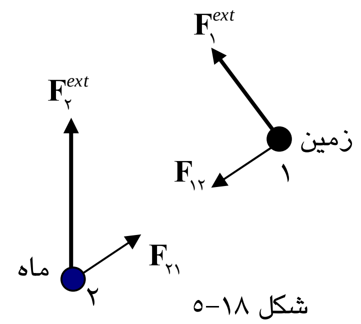
قانون سوم نیوتون گزاره‌ای در باره‌ی نیروهاست. چون نیرو با $F = dp/dt$ تعریف شده است ، پس قانون سوم در اساس *اصل موضوع* پایستگی تکانه است (اثبات بالا را، رابطه‌ی (۱۰۶-۵) ، که یک انتگرال‌گیری ساده بود، به سختی می‌توان به عنوان " اثبات" پذیرفت. بنابراین، این پرسش وجود دارد که آیا پایستگی تکانه را باید "اثبات" کرد یا آن را فرض کرد؟ در بالا ما دومی را پذیرفتیم.)

تفاوت میان اصل موضوع و قضیه دو پهلوست. اصل موضوع یک نفر شاید برای شخص دیگری قضیه باشد و برعکس. در فرض‌های خود باید از جایی آغاز کنیم. ما از قانون سوم آغاز کردیم. در فرمولبندی لاگرانژی مکانیک کلاسیک، نقطه‌ی آغاز چیز دیگری است و پایستگی تکانه پی‌آمدی است که از ناوردایی انتقال در فضا به دست می‌آید. در این فرمولبندی پایستگی تکانه بیشتر به قضیه شبیه است.

یک چیز روشن است: پایستگی تکانه‌ی دو ذره را برای هر نیروی دلخواه نمی‌توان ثابت کرد. زیرا پایستگی لزوما برقرار نیست. برای مثال، اگر دو ذره‌ی باردار با میدان‌های مغناطیسی که ایجاد می‌کنند، برهم‌کنش بکنند، آنگاه تکانه‌ی کل دو ذره پایسته **نیست**. پس در این حالت، تکانه‌ی گم شده به کجا رفته است؟ میدان الکترومغناطیسی آن را حمل می‌کند. در حقیقت، تکانه‌ی کل

سامانه پایسته است؛ اما اینک، سامانه عبارت است از دو ذره بعلاوه‌ی میدان الکترومغناطیسی. به بیان دیگر، هر یک از ذره‌ها با میدان الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کند و نه با ذره‌ی دیگر. قانون سوم نیوتون در باره‌ی ذره هایی که تحت چنین نیروهایی باشند برقرار نیست.

در بحث بالا ما از سامانه‌های منزوی سخن گفتیم و پایستگی تکانه را در باره‌ی این گونه سامانه‌ها بیان کردیم. سامانه‌ی منزوی سامانه‌ای است که با محیط پیرامون خود بیگانه است و با آن برهم‌کنش نمی‌کند. یعنی نیرویی از خارج سامانه به آن وارد نمی‌شود. این گزاره را می‌توان به طور کمی بیان کرد. سامانه‌ی ماه و زمین را در شکل (۱۸-۵) در نظر بگیرید. خورشید به هر دوی آنها نیروی وارد می‌کند و برای این سامانه، نیروی خورشید نیروی خارجی است. نیرویی را که خورشید به زمین و ماه وارد می‌کند به ترتیب $\mathbf{F}_1^{ext}$ و $\mathbf{F}_2^{ext}$ بنامید. نیروی کل که به جسم ۱ (زمین) وارد می‌شود عبارت است از (نیروی کل وارد به جسم ۱) $\equiv \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{ext}$ و برای جسم ۲ (ماه) داریم (نیروی کل وارد به جسم ۲) $\equiv \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{ext}$. با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره ها را حساب کرد



شکل ۱۸-۵

$$\dot{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{ext} \qquad \text{و} \qquad \dot{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{ext} \qquad (۵-۱۰۷)$$

حالا اگر تکانه‌ی کل دو جسم را به صورت $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ تعریف کنیم، آنگاه آهنگ تغییر تکانه‌ی کل $\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2$ خواهد شد. برای محاسبه‌ی آن کافی است دو معادله در رابطه‌ی (۱۰۷-۵) را با هم جمع کنیم. با این کار نیروهای $\mathbf{F}_{21}$ و $\mathbf{F}_{12}$ بنابه قانون سوم نیوتون یکدیگر را حذف می‌کنند و به دست می‌آید

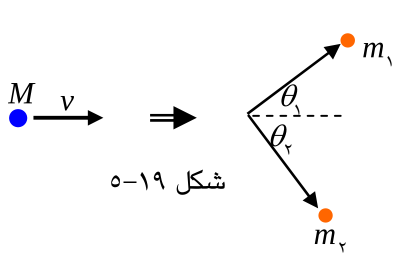
$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_1^{ext} + \mathbf{F}_2^{ext} \equiv \mathbf{F}^{ext} \qquad (۵-۱۰۸)$$

که در آن $\mathbf{F}^{ext}$ نیروی خارجی کل وارد به سامانه‌ی دو جسمی است. این نتیجه یکی از نتایجی است که ما را به پروراندن نظریه‌ی سامانه‌های بس ذره‌ای از قانون های بنیادی تک ذره، رهنمون شد. این رابطه می‌گوید تا جایی که به تکانه‌ی کل سامانه مربوط می‌شود، نیروهای داخلی تاثیری بر آن ندارند. حالت خاصی از این نتیجه هنگامی است که هیچ نیروی خارجی به سامانه وارد نشود ($\mathbf{F}^{ext} = ۰$) . در این صورت $\dot{\mathbf{P}} = ۰$ و باز به نتیجه‌ی مهم پایستگی تکانه می‌رسیم

$$\text{اگر } \mathbf{F}^{ext} = 0 \qquad \text{آنگاه} \qquad \mathbf{P} = \text{ثابت} \qquad (۵-۱۰۹)$$

در نبود نیروی خارجی تکانه‌ی کل سامانه‌ی دو جسمی ثابت است. این پایستگی تکانه است.

مثال ۱۰-۵ (شکافت به دو بخش): جسمی به جرم M با سرعت V در راستای محور x حرکت می‌کند. جسم ناگهان به دو نیم شکافته می‌شود. یک بخش آن برابر شکل (۱۹-۵) با زاویه‌ی θ_1 وبخش دیگرش با زاویه‌ی θ_2 از مسیر اولیه منحرف می‌شوند. اندازه‌ی تکانه‌های دو بخش را بیابید.



شکل ۱۹-۵

حل: تکانه‌ی اولیه‌ی جسم یک پارچه $P = MV$ است. تکانه‌های پایانی دو بخش را

$p_۱$ و $p_۲$ بنامید. پایستگی تکانه در راستای محورهای x و y می‌گوید

$$p_۱\cos\theta_۱ + p_۲\cos\theta_۲ = P \quad , \quad p_۱\sin\theta_۱ - p_۲\sin\theta_۲ = ۰ \qquad (۵-۱۱۰)$$

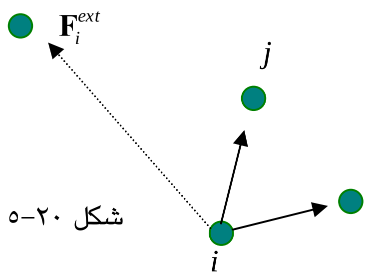
از حل این دو معادله، دو مجهول p_1 و p_2 به صورت زیر به دست می‌آیند

$$p_۱ = \frac{P\sin\theta_۲}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)} \quad , \quad p_۲ = \frac{P\sin\theta_۱}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)} \qquad (۵-۱۱۱)$$

چند حالت حدی: اگر $\theta_۱ = \theta_۲$ باشد، آنگاه داریم $p_۱ = p_۲$. اگر هر دوی $\theta_۱$ و $\theta_۲$ کوچک باشند آنگاه $p_۱ = p_۲ \approx P/۲$.
اگر $\theta_۱ = \theta_۲ \approx ۹۰^\circ$ باشد، آنگاه $p_۱$ و $p_۲$ هردو بزرگ اند. فرایند شکافت (مانند انفجار) در این صورت باید انرژی بزرگی تولید کرده باشد.

توجه کنید که با داده‌های موجود مسئله نمی‌توان جرم هر بخش را حساب کرد. برای این کار به آگاهی‌های بیشتری نیاز داریم، مثلاً، بدانیم انفجار چه مقدار انرژی به سامانه می‌دهد یا این که جرم و سرعت یکی از بخش‌ها چقدر است. در این صورت تعداد معادله‌هایمان با تعداد مجهول ها برابر می‌شود.

۲-۴-۵ پایستگی تکانه در سامانه های بس ذره ای



شکل ۲۰-۵

سامانه‌ای با N ذره را در نظر بگیرید. جرم هر ذره را m_i و تکانه‌ی آن را p_i بنامید. نیروی وارد به ذره‌ی $i-$ام پیچیده است. هر یک از $(N-1)$ ذره به آن نیرو وارد می‌کند. اگر نیروی وارد از سوی ذره‌ی $j-$ام را $\mathbf{F}_{ij}$ بنامیم آنگاه $\mathbf{F}_{ji}$ نیرویی است که ذره‌ی $i-$ام به ذره‌ی $j-$ام اعمال می‌کند و بنابه قانون سوم نیوتون برای همه‌ی زمان‌ها داریم $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. اگر سامانه منزوی باشد آنگاه کل تغییر تکانه‌ی ذره‌ی $i-$ام در بازه‌ی زمانی بین t_1 و t_2 عبارت است از

$$\Delta\mathbf{p}_i = \int(\sum_j \mathbf{F}_{ij})dt \qquad (۵-۱۱۲)$$

پس ، تغییر در تکانه‌ی کل **همه‌ی** ذره‌های سامانه عبارت است از

$$\Delta\mathbf{P} = \int\left(\sum_i\sum_j \mathbf{F}_{ij}\right)dt \qquad (۵-۱۱۳)$$

اما برای همه‌ی زمان‌ها $\sum_i\sum_j \mathbf{F}_{ij} = ۰$ است؛ چون در جمع دوگانه برای هر $\mathbf{F}_{ij}$ یک $\mathbf{F}_{ji}$ وجود دارد و $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = ۰$ (همچنین $\mathbf{F}_{ii} = ۰$ ؛ چون یک ذره به خودش نیرو وارد نمی‌کند). پس تکانه‌ی کل سامانه‌ی بس‌ذره‌ای منزوی پایسته است.
اگر سامانه منزوی نباشد و به آن نیروی خارجی وارد شود، مانند شکل (۲۰-۵) ، آنگاه برآیند نیروهای وارد به ذره‌ی $i-$ام عبارت است از

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i\neq j}\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext} \qquad (۵-۱۱٤)$$

در این جا $\mathbf{F}_i^{ext}$ نیروی خارجی وارد به ذره‌ی $i-$ام است. بنابه قانون دوم نیوتون داریم

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext} \qquad (۵-۱۱۵)$$

این نتیجه برای همه‌ی N ذره برقرار است ($i = ۱,۲,\cdots N$). پس، تکانه‌ی کل N ذره عبارت است از:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \qquad (۵-۱۱۶)$$

اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت $\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i$ و با جاگذاری برای $\dot{\mathbf{p}}_i$ از رابطه‌ی (۵-۱۱۵) به دست می‌آید

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \qquad (۵-۱۱۷)$$

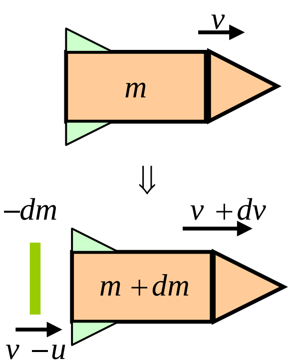
دوباره ، مثل بالا، جمع دوگانه بنابه قانون سوم نیوتون صفر است. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \equiv \mathbf{F}^{ext} \qquad (۵-۱۱۸)$$

این نتیجه درست همانند حالت سامانه‌ی دو ذره‌ای در رابطه‌ی (۵-۱۰۸) است و می‌گوید نیروهای درونی اثری بر تغییر تکانه‌ی کل سامانه، $\mathbf{P}$، ندارند. آهنگ تغییر تکانه را نیروی خارجی تعیین می‌کند. اگر نیروی خارجی صفر باشد تکانه پایسته می‌ماند.

۵-۴-۳ حرکت موشک

کاربردهای پایستگی تکانه هنگامی گیراتر می‌شوند که جرم m سامانه تغییر کند. حرکت موشک یک نمونه است. ظرف آبی که سوراخ است و آب از آن نشت می‌کند نمونه‌ی دیگری است. بخش بزرگ جرم موشک را سوخت آن تشکیل می‌دهد. این بخش از جرم می‌سوزد و به صورت گاز از موشک خارج می‌شود و بنابراین جرم موشک پیوسته تغییر می‌کند. فرض کنید گازهای سوخته با سرعت u **نسبت** به موشک و با آهنگ dm/dt از آن خارج می‌شود. (تاکید می‌کنم که u سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک است- گفتن "نسبت به زمین" بی معنی است ؛ چون موتور موشک گازها را نسبت به خودش به بیرون می‌فرستد و موتور هیچ راهی ندارد که بداند موشک با چه سرعتی نسبت به زمین حرکت می‌کند.) در این جا کمیت dm را منفی تعریف می‌کنیم. بنابراین، در زمان dt به اندازه‌ی dm به جرم موشک *افزوده* می‌شود. (اگر بخواهید می‌توانید dm را مثبت تعریف کنید و سپس از جرم موشک این مقدار را *بکاهید*. هر دو درست است. در مثال ۱۱-۵ این کار را هم می‌کنیم تا نکته‌ای را هم روشن کرده باشیم). همچنین، u را مثبت تعریف می‌کنیم. بنابراین، از سرعت ذره‌های خروجی موشک به اندازه‌ی u *کاسته* می‌شود. شاید عجیب به نظر بیاید، اما دشوارترین بخش حل مسئله‌های موشک تعیین علامت همین کمیت‌ها و پایبند ماندن به آنهاست. این نکته‌ای است که در بالا به آن اشاره کردم و در مثال زیر روشن‌تر خواهد شد.



شکل ۲۱-۵

لحظه‌ای را تجسم کنید که جرم موشک m و سرعتش v است. در بازه‌ی زمانی dt بعدی جرم موشک $m+dm$ و سرعتش $v+dv$ می‌شود (یادتان باشد که dm منفی است). جرم گازهای بیرون رانده شده $(-dm)$ و سرعت آنها $v-u$ است (که می‌تواند مثبت یا منفی باشد و به اندازه‌های نسبی u و v بستگی دارد). شکل(۲۱-۵) را ببینید. در این مسئله نیروی خارجی وجود ندارد- گرانش را نادیده گرفته‌ایم و در مثال ۸-۵ به آن خواهیم

پرداخت- بنابراین، تکانه‌ی کل در هر یک از این زمان‌ها باید با هم برابر باشد. پس داریم

$$mv=(m+dm)(v+dv)+(-dm)(v-u) \qquad (۵-۱۱۹)$$

اگر از جمله‌ی کوچک مرتبه دو ($dm\,dv$) چشم‌پوشی کنیم از این رابطه خواهیم داشت $m\,dv=-u\,dm$. اگر آن رابه m تقسیم کنیم و از t_1 تا t_2 انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$\int_{v_1}^{v_2} dv=-\int_{m_1}^{m_2} u\frac{dm}{m} \;\Rightarrow\; v_2-v_1=u\ln\frac{m_1}{m_2} \qquad (۵-۱۲۰)$$

برای حالتی که جرم اولیه‌ی موشک M و سرعت اولیه‌ی آن صفر است، داریم $v=u\ln(M/m)$. اگر dm/dt مقدار ثابتی باشد (آن را $-\eta$ بنامید، $\eta>0$) آنگاه $v(t)=u\ln[M/(M-\eta t)]$. وجود لگاریتم در نتیجه‌ی (۵-۱۲۰) چندان خوشایند نیست. اگر جرم بدنه‌ی موشک m و.جرم سوخت آن $9m$ باشند سرعت نهایی موشک $u\ln 10\approx(2,3)u$ می‌شود. حال اگر جرم سوخت را ۱۱ برابر کنیم و به $99m$ برسانیم (شاید از نظر مهندسی این کار نشدنی باشد، چون برای جاسازی این مقدار سوخت، بدنه‌ی فلزی باید بسیار بزرگ باشد) می‌بینیم که سرعت نهایی فقط دوبرابر می‌شود و به $u\ln 100=2(u\ln 10)\approx(4,6)u$ می رسد. بنابراین ، چگونه می‌توان موشکی با سرعت چشمگیر ساخت؟

مثال ۱۱-۵ (موشک- قرارداد دیگر)

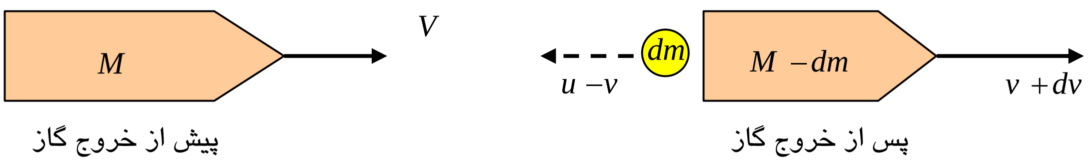
(در این مثال می‌خواهیم dm را مثبت تعریف کنیم و ببینیم که باز هم همان نتیجه‌ی بالا به دست می‌آید.)

موشکی که در آغاز بی‌حرکت است، سوخت خود را با سرعت ثابت u نسبت به موشک، رها می‌کند (لزوماً این رها شدن با آهنگ یکنواخت انجام نمی‌گیرد). از گرانش چشم‌پوشی کنید. اگر جرم کل اولیه‌ی موشک M_0 باشد سرعت موشک، v، را هنگامی که جرم آن به M کاهش یافته است، به دست آورید.

حل: جرم اندک dm از موشک خارج می‌شود. و جرم موشک به اندازه‌ی dm کاهش می‌یابد (شکل ۲۲-۵):

$$dM=-dm \qquad (۵-۱۲۱)$$

و سرعت آن از v به $v+dv$ افزایش می‌یابد (شکل ۲۲-۵ را ببینید). با استفاده از معادله‌های پایستگی تکانه می‌توان این سرعت را حساب کرد: $(M-dm)(v+dv)+dm\,(v-u)=Mv$ اگر از جمله‌های مرتبه دوم، مانند $dmdv$ ، چشم‌پوشی کنیم، خواهیم داشت: $M\,dv=u\,dm$. با استفاده از رابطه‌ی (۵-۱۲۱) می‌توان آن را به صورت $dv/u=-dM/M$ نوشت . اگر از دو طرف این رابطه انتگرال بگیریم و از شرط اولیه‌ی $M=M_0$ و $v=0$ استفاده کنیم خواهیم داشت:



شکل ۲۲-۵

$$\frac{v}{u}=-\ln\frac{M}{M_0} \qquad (۵-۱۲۲)$$

که همان رابطه‌ی (۱۲۰-۵) است. چنانچه آن را برحسب M حل کنیم ، به دست می‌آید:

$$M = M_\circ e^{-v/u} \qquad (۵-۱۲۳)$$

رابطه‌ی (۱۲۳-۵) نشان می‌دهد که برای اینکه موشک به سرعتی برابر با سرعت خروج گاز، u ، برسد باید به اندازه‌ی $1/e$ جرم اولیه‌اش سوخت از آن خارج شود. توجه کنید که سرعت موشک تنها به سرعت خروج گاز و کسر جرم اولیه‌ای که از آن خارج شده است بستگی دارد و به آهنگ خروج گاز بستگی ندارد.

نکته: می‌توان مسئله‌ی موشک را به جای استفاده از پایستگی تکانه ، با استفاده از نیرو حل کرد. اگر جرم dm از موشک خارج شود، تکانه‌ی آن به اندازه‌ی $u\,dm$ تغییر می‌کند. نیرو با آهنگ تغییر تکانه برابر است. نیروی وارد به dm عبارت است از $u\,dm/dt$ و این نیرو به بقیه‌ی موشک شتاب می‌دهد. پس، $F = ma$ می‌گوید $-u\,dm/dt = m\,dv/dt$ که با $m\,dv = -u\,dm$ هم‌ارز است.

می‌بینیم که مسئله‌ی موشک را می‌توان با استفاده از نیرو و یا پایستگی تکانه حل کرد. در نهایت این دو رویکرد هم‌ارزند، چون دومی را از اولی و به وسیله‌ی $F = dp/dt$ به دست آورده ایم. اما فلسفه‌ی این دو رویکرد اندکی با هم فرق دارند. گزینش هر کدام از این دو رویکرد یک انتخاب شخصی است. برای سامانه‌ی منزوی مانند موشک معمولا رویکرد پایستگی تکانه ساده‌تر است. در مسئله‌هایی که نیروی خارجی وجود دارد $F = dp/dt$ رهیافتی به جاست. در پایان فصل تمرین‌های زیادی با $F = dp/dt$ خواهید داشت.

توجه کنید که ما در حل مسئله‌ها با رویکرد نیرو، از هردوی $F = ma$ و $F = dp/dt$ استفاده کردیم. اگر جرم ذره تغییر کند این دو هم‌ارز نیستند. به بحثی که در این باره در فصل ۳ کردیم مراجع کنید. ♣

مثال ۱۲-۵ (ماسه و جعبه). مثال ۱۱-۵ بگونه‌ای حالت خاصی از مسئله‌ی عمومی است؛ چون از اثر گرانش و یا از اثر هر نیروی خارجی دیگر چشم‌پوشی کردیم. جا دارد که معادله‌های حرکت درست را هنگامی که جرم تغییر می‌کند اندکی با ژرفای بیشتری بررسی کنیم. برای این کار به قانون دوم نیوتون برمی‌گردیم. این قانون می‌گوید: آهنگ تغییر تکانه‌ی mv یک سامانه با نیرویی که به آن سامانه وارد می‌شود، برابر است: $d(mv)/dt = F$. این رابطه را برای یک بعد نوشته‌ایم. تعمیم آن به سه بعد دشوار نیست. هنگامی که جرم تغییر می‌کند، در به کاربردن این رابطه باید دقت کرد. مثال خوبی که این دوراندیشی را نمایان می‌کند جعبه‌ی پُر از ماسه است که روی سطح شیب‌دار همواری می‌لغزد و ماسه با آهنگ ثابتی از جعبه به بیرون ریزش می‌کند. اگر شیب سطح α باشد آنگاه معادله‌ی حرکت "جعبه بعلاوه‌ی ماسه" بدون توجه به اینکه ریزش می‌کند یا نه عبارت است از

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲٤)$$

جهت مثبت را رو به پائین سطح شیب‌دار فرض کردیم. در اینجا جرم m تغییر نمی‌کند، زیرا سامانه را" جعبه بعلاوه‌ی همه‌ی ماسه" در نظر گرفتیم و رابطه‌ی (۱۲٤-۵) به **حرکت مرکز جرم** مربوط است. آن بخش از ماسه که به بیرون ریزش کرده است با همان سرعت لحظه‌ای و شتاب جعبه در روی سطح شیب‌دار خواهد لغزید. به این وضعیت گونه‌ی دیگری هم می‌توان اندیشید:

حرکت جعبه با ریزش ماسه تغییر نکرده است زیرا ماسه در هنگام بیرون ریختن از جعبه (مثلاً از شکافی که در دیواره‌ی جعبه وجود دارد) هیچ تکانه‌ای را به جعبه منتقل نمی‌کند. جزئیات این مسئله را می‌توان به شیوه‌ی زیر بررسی کرد:

فرض کنید در هر لحظه، جرم جعبه بعلاوه‌ی ماسه‌ی باقیمانده در درون آن m باشد. در زمان t تکانه‌ی جعبه و اندرونه‌ی آن mv است. در بازه‌ی زمانی بعدی dt جرم تغییر می‌کند و از m به $m-dm$ می‌رسد و سرعت از v به $v+dv$ افزایش می‌یابد. در پایان بازه‌ی زمانی dt تکانه‌ی جعبه بعلاوه‌ی اندرونه‌ی آن $(m-dm)(v+dv)$ و تکانه‌ی جرم dm که از جعبه به بیرون ریخته شده است vdm است. تغییر کل در تکانه سامانه در بازه‌ی زمانی dt با نیروی ضربه‌ای Fdt برابر است و چون $\mathrm{F}=mg\sin\alpha$، پس داریم:

$$vdm+(m-dm)(v+dv)-mv=mg\sin\alpha\,dt \qquad (۵-۱۲۵)$$

$$\Rightarrow \cancel{vdm}+\cancel{mv}-\cancel{vdm}+mdv-dm\,dv-\cancel{mv}=mg\sin\alpha\,dt$$

اگر از جمله‌ی بسیار کوچک $dm\,dv$ چشم‌پوشی کنیم، پس از حذف جمله‌های همانند، خواهیم داشت

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲۶)$$

این معادله‌ی حرکت جعبه و اندرونه‌ی آن است که در رابطه‌ی (۵-۱۲٤) به آن رسیدیم.

اگر فرض کنیم با سازوکاری، ماسه‌ی بیرون ریخته‌شده به حالت سکون در می‌آید، نتیجه‌ی متفاوتی به دست خواهد آمد. برای این کار فرض کنید به ماسه‌های بیرون ریخته‌شده سرعت $-v$ بدهیم؛ یعنی سرعتی در جهت عکس سرعت جعبه و به اندازه‌ی آن. در این حالت تکانه‌ی جزء جرم dm در پایان بازه‌ی زمانی dt صفر خواهد شد. در نتیجه، از اصل پایستگی تکانه خواهیم داشت:

$$(m-dm)(v+dv)-mv=mg\sin\alpha\,dt \qquad (۵-۱۲۷)$$

و از اینجا به دست می‌آید

$$m\frac{dv}{dt}-v\frac{dm}{dt}=mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲۸)$$

و برای اینکه بتوانیم توصیفی از این رابطه داشته باشیم، آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m\frac{dv}{dt}=v\frac{dm}{dt}+mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲۹)$$

جمله‌ی سمت راست را می‌توان آهنگی پنداشت که ماسه‌های بیرون ریخته‌شده با آن آهنگ به جعبه تکانه وارد می‌کنند. در رابطه‌های (۵-۱۲۷) تا (۵-۱۲۹)، dm و dv/dt کمیت‌های مثبت فرض شده‌اند وکاهش یافتن m با علامت منها در $m-dm$ به حساب آورده شده است.

مثال ۱۳-۵ (بازهم ماسه وجعبه): جرم جعبه و اندرونه‌ی آن را در هر لحظه m بنامید و مقدار اولیه‌ی جرم را $m_\circ$ فرض کنید. ماسه با آهنگ ثابت b از جعبه ریزش می‌کند و جعبه حرکتش را از حالت سکون شروع می‌کند. از رابطه‌ی (۵-۱۲۹) استفاده و سرعت جعبه را برحسب زمان حساب کنید.

حل: جرم جعبه و ماسه‌ی درون آن را می‌توان به صورت تابعی از زمان نوشت:

$$m=(m_\circ-bt) \qquad (۵-۱۳۰)$$

اگر در رابطه‌ی (۱۲۸-۵) قرار دهیم (چون علامت منها در رابطه (۱۲۸-۵) منظور شده است، پس $dm/dt = +b$) خواهیم داشت

$$(m_\circ - bt)\frac{dv}{dt} - bv = (m_\circ - bt)g\sin\alpha \tag{۵-۱۳۱}$$

که معادله‌ی خطی از مرتبه‌ی اول است. می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left[(m_\circ - bt)v\right] = (m_\circ - bt)g\sin\alpha \tag{۵-۱۳۲}$$

حال اگر از آن انتگرال بگیریم و شرط مرزی $v = \circ$ به ازای $t = \circ$ را اعمال کنیم به دست می‌آید

$$v = \frac{(m_\circ - bt/2)t\, g\sin\alpha}{m_\circ - bt} \tag{۵-۱۳۳}$$

به عنوان مثال آخر اینک مسئله‌ی موشک را در حضور نیروی خارجی بررسی می‌کنیم. این همان مثال موشک ۱۱-۵ است که اینک به آن نیروهای خارجی هم وارد می‌شود. ،مسئله را می‌توان به صورت زیر بررسی کرد:

فرض کنید در زمانی مانند t جرم موشک و اندرونه‌ی آن M است. در بازه‌ی زمانی بعدی dt ، مقدار dm از جرم موشک به صورت گاز و با سرعت u نسبت به موشک از آن خارج می‌شود. در پایان بازه‌ی dt تکانه‌ی موشک و اندرونه‌ی آن $(M - dm)(v + dv)$ و تکانه‌ی جرم dm برابر $(v - u)dm$ خواهد شد. در آغاز سفرموشک (یعنی در زمان t) تکانه‌ی آن Mv است. چون تغییر تکانه با ضربه‌ی نیروهای دیگر باید برابر باشد، پس می‌توان نوشت

$$(v - u)dm + (M - dm)(v + dv) - Mv = Fdt \tag{۵-۱۳۴}$$

F شامل همه‌ی نیروهایی است که به موشک وارد می‌شوند، مانند نیروی گرانش mg ، نیروهای آیرودینامیکی و کمیت $(P - P_\circ)A$ که P فشار گاز خروجی بر روی سطح افشانه‌ی خروجی گاز است. $P_\circ$ فشار آتمسفر و A سطح افشانه خروجی است. رابطه‌ی (۱۳۴-۵) را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} = F \tag{۵-۱۳۵}$$

رابطه‌ی (۱۳۵-۵) معادله‌ی حرکت موشک است. آگاهی‌های مربوط به **F** در کتاب‌های مرجع موشک‌ها یافت می‌شوند که شامل کمیت‌هایی مانند mg موشک، نیروهای آیرودینامیکی و کمیت $(P - P_\circ)A$ است. کمیت $(P - P_\circ)A$ و $u\,dm/dt$ در رابطه‌ی (۱۳۶-۵) را می‌توان با اندازه‌گیری ایستایی **پیش‌رانه‌ای** موشک به دست آورد؛ پیش‌رانه عبارت است از

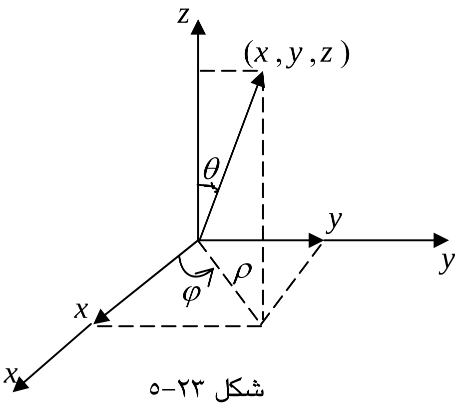
$$u\frac{dm}{dt} + (P + P_0)A \tag{۵-۱۳۶}$$

پیوست ۱- پایستگی انرژی و نیروهای پایستار در سه بعد- بیانی دیگر

در این پیوست پایستگی انرژی وشرط پایستار بودن نیرو در سه بعد را با زبانی اندک متفاوت بیان می‌کنم. شاید برای برخی دانشجویانی که حسابان را نیاموخته‌اند سودمند باشد.

۱- پایستگی انرژی و قضیه‌ی کار- انرژی در سه بعد

مکان ذره را در فضا می‌توان با بردار مکان $\mathbf{r}$ نشان داد. در مختصات کارتزی بردار $\mathbf{r}$ سه مولفه در راستای محورهای x ، y و z دارد. تصویر بردار $\mathbf{r}$ بر روی این محورها مولفه‌های آن را مشخص می‌کند و در شکل(۲۳-۵) نشان داده شده اند. اگر بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ متناظر با محورهای x, y و z باشند. آنگاه بردار $\mathbf{r}$ را می‌توان برحسب مولفه‌هایش نوشت: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ اندازه‌ی بردار $\mathbf{r}$ برابر است با جذر ضرب داخلی $\mathbf{r}$ در خودش



شکل ۲۳-۵

$$|\mathbf{r}|^{۲} \equiv r^{۲} = \mathbf{r}.\mathbf{r} = (x\ \hat{\mathbf{i}} + y\ \hat{\mathbf{j}} + z\ \hat{\mathbf{k}}) \cdot (x\ \hat{\mathbf{i}} + y\ \hat{\mathbf{j}} + z\ \hat{\mathbf{k}}) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$$

چون $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$ و $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$. هم‌چنین توجه کنید که اندازه‌ی مولفه‌ها عبارتند از

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \ \ , \ \ y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta$$

انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m که در سه بعد حرکت می‌کند $T = m\,\dot{\mathbf{r}}^{۲}/۲$ است که در آن $\dot{\mathbf{r}}$ بردار سرعت است و با مشتق گرفتن ازبردار مکان $\mathbf{r}$ به زمان به دست می‌آید.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right) = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(پ: ۱-۵)}$$

هم‌چنین مشتق دوم نسبت به زمان بردار $\mathbf{r}$ شتاب ذره را به دست می‌دهد و برابر است با

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\,\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}\right) = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(پ: ۲-۵)}$$

همان‌گونه که $\dot{x}$ و $\dot{y}$ و $\dot{z}$ مولفه‌های بردار سرعت $\dot{\mathbf{r}}$ روی محورهای x و y و z اند، $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ هم مولفه‌های بردار شتاب ذره روی این محورهاست. با این یادآوری اینک انرژی جنبشی ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = \frac{۱}{۲} m\,\dot{\mathbf{r}}^{۲} = \frac{۱}{۲} m\left(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲} + \dot{z}^{۲}\right) \qquad \text{(پ: ۳-۵)}$$

آهنگ تغییر انرژی جنبشی عبارت است از:

$$\dot{T} = m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}\right) = m\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} \qquad \text{(پ: ٤-۵)}$$

اما داریم:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \left(\dot{x}\ \hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\ \hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\ \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\ddot{x}\ \hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\ \hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\ \hat{\mathbf{k}}\right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} \qquad \text{(پ: ۵-۵)}$$

چون معادله‌ی حرکت ذره به صورت زیر است

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \qquad \text{(پ: ٦-۵)}$$

بنابراین، اگر ذره در بازه‌ی زمانی dt فاصله‌ی (برداری) $d\mathbf{r}$ را بپیماید و نیروی $\mathbf{F}$ به زمان وابسته نباشد آنگاه تغییر انرژی جنبشی ذره در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$dT = dW \qquad \text{(پ: ۷-۵)}$$

به دست‌آوردن این رابطه ساده است. از رابطه (پ: ٤–٥) داریم

$$\frac{dT}{dt}=\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}.\mathbf{F}) \quad\Rightarrow\quad dT=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\equiv dW \tag{پ–۸}$$

پس:

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}=\left(F_x\,\hat{\mathbf{i}}+F_y\,\hat{\mathbf{j}}+F_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\;\hat{\mathbf{i}}+dy\;\hat{\mathbf{j}}+dz\;\hat{\mathbf{k}}\right)=F_x dx+F_y dy+F_z dz \tag{پ: ۹–٥}$$

که بیان سه‌بعدی کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ در جابجایی $d\mathbf{r}$ است. توجه کنید که کار dW برابر است با مسافت طی شده‌ی، $|d\mathbf{r}|$، ضرب‌در مولفه‌های نیروی $\mathbf{F}$ در راستای جابه‌جایی. توجه کنید که در نگاه نخست به نظر می‌رسد که در سه بعد باید نیروی پایستار به صورت نیروی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ تعریف شود که فقط تابعی از مکان $\mathbf{r}$ ذره است. اما این به تنهایی وجود قانون پایستگی انرژی را تضمین نمی‌کند. پایستگی انرژی ویژگی اختصاصی نیروهای پایستار است. بنابراین، برای این‌که قانون پایستگی انرژی: ثابت $=T+V=E$ برقرار باشد، شرط می‌کنیم که تابع انرژی پتانسیل، $V(\mathbf{r})$، تابع مکان ذره باشد. حال اگر آهنگ تغییر انرژی پتانسیل را بررسی کنیم، داریم

$$\dot{V}(\mathbf{r})=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \tag{پ: ۱۰–٥}$$

که همانند حاصل ضرب داخلی دو بردار است: یکی بردار سرعت $\dot{\mathbf{r}}=\left(\dot{x}\hat{\mathbf{i}}+\dot{y}\hat{\mathbf{j}}+\dot{z}\hat{\mathbf{k}}\right)$ و دیگری برداری به صورت $\nabla V\equiv\left(\partial V/\partial x\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\partial V/\partial y\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\partial V/\partial z\right)\hat{\mathbf{k}}$ که تعریف گرادیان $V\,(r)$ است. پس، آهنگ تغییر تابع پتانسیل را می‌توان برحسب گرادیان V به صورت زیر نیز نوشت

$$\dot{V}=\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla V \tag{پ: ۱۱–٥}$$

حال اگر از ثابت $=T+V=E$ نسبت به زمان مشتق بگیریم و به جای $\dot{T}$ و $\dot{V}$ هم‌ارزهایشان را از رابطه‌های (پ: ٥–٥) و (پ: ۱۱–٥) جایگزین کنیم، خواهیم داشت.

$$\dot{T}+\dot{V}=0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{F}}+\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla V=\dot{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{F}+\nabla V)=0 \tag{پ: ۱۲–٥}$$

چون این رابطه باید برای هر سرعت، $\dot{\mathbf{r}}$، ذره درست باشد، پس برای برقراری تساوی باید عبارت درون پرانتز همواره صفر باشد؛ یا

$$\mathbf{F}+\nabla V=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}=-\nabla V\,(\mathbf{r}) \tag{پ: ۱۳–٥}$$

این رابطه را می‌توان برحسب مولفه‌هایش نوشت

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\quad,\quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\quad,\quad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z} \tag{پ: ١٤–٥}$$

برای مثال، فرض کنید تابع انرژی پتانسیل به صورت $V=\left(1/2\right)k\,\mathbf{r}^2=\left(1/2\right)k\left(x^2+y^2+z^2\right)$ است. این پتانسیل، نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی را توصیف می‌کند. در این صورت

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-kx\,,\qquad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-ky\,,\qquad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-kz \tag{پ: ۱٥–٥}$$

و یا

$$\mathbf{F}=\left(-k\,x\,\hat{\mathbf{i}}-k\,y\,\hat{\mathbf{j}}-k\,z\,\hat{\mathbf{k}}\right)=-k\left(x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\right)=-k\,\mathbf{r} \qquad \text{(پ: ۱۶-۵)}$$

کدام شرط لازم و کافی باید برای نیروی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ برقرار باشد تا تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ وجود داشته باشد و در رابطه‌ی (پ: ۱۳-۵) صدق کند؟ یافتن پاسخ این پرسش دشوار نیست. هر تابع برداری از نوع (پ: ۱۳-۵) از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند.

$$\nabla\times\mathbf{F}=0 \qquad \text{(پ: ۱۷-۵)}$$

یعنی **تاو** (یا کرل) آن صفر است. تاو یا کرل یک بردار به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \qquad \text{(پ: ۱۸-۵)}$$

اگر تاو صفر باشد آنگاه هریک از مؤلفه‌ها نیز باید به تنهایی صفر شود. برای نمونه، اگر مؤلفه‌ی z صفر باشد، آنگاه داریم

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0 \qquad \text{(پ: ۱۹-۵)}$$

به همین ترتیب مولفه‌های دیگر تاو صفر است. پس رابطه‌ی (پ: ۱۷-۵) شرط لازم برای پایستاربودن $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ است. می‌توان نشان داد که این شرط هم‌چنین شرط کافی است. به طور مشخص، هرگاه $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ در شرط (پ: ۱۷-۵) صدق کند؛ نیرو پایستار است و کار این نیرو در جابه‌جایی ذره از $\mathbf{r}_0$ به $\mathbf{r}$ مستقل از مسیر حرکت بین این دو نقطه است. بنابراین، می‌توان انرژی پتانسیل را با رابطه‌ی زیر برحسب نیرو تعریف کرد.

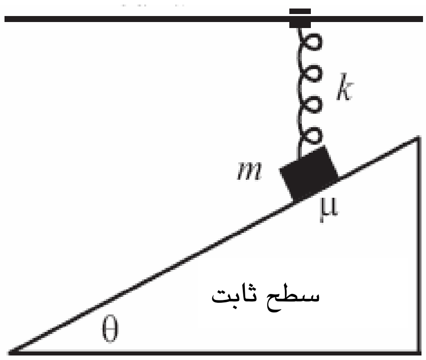
$$V\,(\mathbf{r})=-\int_{\mathbf{r}_0}^{r}F\,(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \qquad \text{(پ: ۲۰-۵)}$$

توجه کنید که هر بردار نیرو پایستار نیست. برای پایستاربودن، تاو نیرو باید صفر باشد. می‌توانیم به گونه دیگری نیز به مسئله بنگریم: نیرو یک کمیت برداری است و برای توصیف آن به سه رابطه نیاز است، هر کدام برای توصیف یکی از مولفه های نیرو. حال آنکه تابع انرژی پتانسیل یک تابع اسکالر است یعنی کمیتی است که با یک رابطه توصیف می‌شود و همه‌ی اطلاعات لازم درباره‌ی نیرو را داراست. کافیست از آن نسبت به مکان مشتق گرفت و در یک علامت منها ضرب کرد، آنگاه نیرو به دست می‌آید. پرسش اینست که چگونه اطلاعاتی را که در سه رابطه نهفته است می‌توان از یک رابطه به دست آورد؟ پاسخ البته ساده است: مشتق مولفه‌های نیروی پایستار مستقل از یکدیگر نیستند و با سه رابطه‌ی

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y},\qquad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z},\qquad \frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad \text{(پ: ۲۱-۵)}$$

به هم‌دیگر وابسته‌اند. این رابطه‌های قیدی چیزی جز بیان صفربودن تاو نیروی پایستار نیست.

مثال‌های تکمیلی



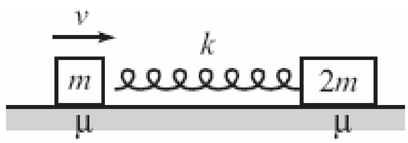
شکل ۲۳-۵

ت-۱ قطعه‌ای به جرم m در آغاز بر روی سطح شیب‌داری به شیب θ در حال سکون نگه داشته شده است. ضریب اصطکاک (هم جنبشی و هم ایستایی) بین قطعه و سطح μ است. یک انتهای فنری به قطعه وصل است و انتهای دیگرش با حلقه‌ای از میله‌ی افقی در بالای سطح آویزان است. شکل (۲۲-۵ را ببینید) ثابت فنر k است و در آغاز طول طبیعی دارد (کشیده یا فشرده نیست) و به حالت قائم است. قطعه را رها می‌کنیم تا در روی سطح به پایین بلغزد. (فرض کنید $\tan\theta > \mu$ و بنابراین قطعه روی سطح به واقع می‌لغزد) .فرض کنید انتهای فنر که به میله وصل است، روی میله به سوی چپ حرکت می‌کند و همواره به حال قائم قرار دارد (در واقع، چون میله اصطکاک ندارد، فنر عمودی قرار می‌گیرد.)

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به قطعه را در زمان $t > ۰$ رسم کنید.

(ب): اگر z مسافتی باشد که قطعه در امتداد سطح به پایین می‌لغزد، به ازای چه مقدار z قطعه از سطح جدا می‌شود؟

(پ): سرعت قطعه در لحظه‌ی جدا شدن از سطح چیست؟

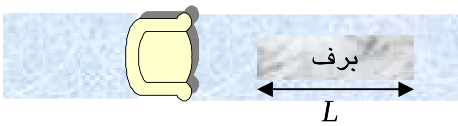


شکل ۲٤-۵

ت-۲ فنری با ثابت k برابر شکل (۲٤-۵) به قطعه‌ای به جرم $۲m$ وصل است و در روی سطح افقی قرار دارد. جرم m به سمت راست حرکت می‌کند و به انتهای چپ فنر گیر می‌کند و در نتیجه، فنر فشرده می‌شود. ضریب اصطکاک بین جرم‌ها و سطح μ است. اگر سرعت جرم درست پیش از برخورد با فنر v باشد

(الف): برای این که قطعه با جرم $۲m$ حرکت نکند، بیشینه مقدار v چقدر می‌تواند باشد (فرض کنید فنر به اندازه‌ی کافی دراز است و جرم m با قطعه برخورد نمی‌کند).

(ب): اگر اندازه‌ی v این مقدار بیشینه باشد، فنر نخست فشرده می‌شود و سپس به حالت ترازمندی اولیه‌اش برمی‌گردد و جرم m را به سوی چپ می‌راند. در لحظه‌ای که فنر طول اولیه‌اش را باز می‌یابد، سرعت جرم m چقدر است؟



شکل ۲۵-۵

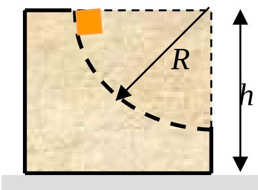
ت-۳ سورتمه‌ای با جرم اولیه $M_{۰}$ روی سطح یخی بدون اصطکاک با سرعت $v_{۰}$ حرکت می‌کند. قسمتی از مسیر به طول L به طور یکنواخت با برف پوشیده شده است. جرم در واحد طول برف λ است. سورتمه برف را می‌روبد و به جرمش افزوده می‌شود (شکل ۲۵-۵).

(الف): در حالیکه سورتمه برف را جمع می‌کند، معادله‌ی حرکتش، dv/dt ، را بیابید. آن را حل کنید و سرعت نهایی سورتمه را به دست آورید.

(ب): جرم نهایی سورتمه را حساب کنید.

(پ): تغییر در تکانه‌ی کل سامانه‌ی "سورتمه + برف" را حساب کنید.

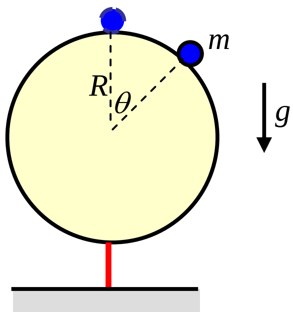
(ت): انرژی جنبشی اولیه و نهایی سورتمه را باهم مقایسه کنید. چه کسری از انرژی جنبشی اولیه‌ی، $\left(T_f - T_i\right)/T_i$ سورتمه در اثر روبیدن برف از دست رفته است؟



شکل ۵-۲۶

ت-۴ از گوشه‌ی مکعبی به جرم M و به ضلع h ربع دایره‌ای به شعاع R برابر شکل (۵-۲۶) بریده شده است. قطعه‌ای به جرم m از بالای بریدگی روی مسیر دایره می‌لغزد. مکعب روی میز هموار قرار دارد و هر دوی قطعه و مکعب بدون اصطکاک حرکت می‌کنند. مکعب در آغاز بی حرکت است و قطعه از حالت سکون شروع به لغزیدن می‌کند. وقتی قطعه از مکعب جدا می‌شود، سرعتش را حساب کنید.

ت-۵ ذره‌ای به جرم m در بالای کره‌ای به شعاع R در حال سکون است. به ذره تلنگر کوچکی وارد می‌شود و در روی کره به سمت راست می‌لغزد (و زاویه‌ی θ افزایش می‌یابد). نیروی ناپایستاری به صورت $F_\circ \sin\theta$ با حرکت ذره در روی کره مخالفت می‌کند (مادام که ذره با کره در تماس است). گرانش به سوی پایین است.



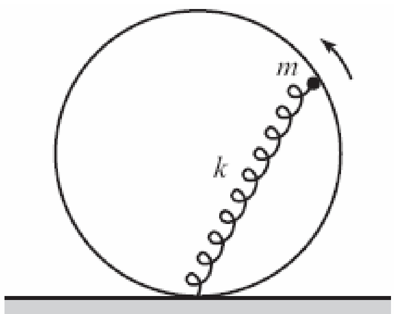
شکل ۵-۲۷

(الف): کاری را که بر روی جرم در طول سقوط آن از بالای کره به زاویه‌ی θ انجام گرفته است حساب کنید.

(ب) : انرژی مکانیکی کل E را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ (تا وقتی که جرم در روی کره است) به دست آورید. انرژی پتانسیل U را در بالاترین نقطه‌ی کره صفر فرض کنید. پاسخ نباید به طور روشن به سرعت بستگی داشته باشد.

(پ): انرژی جنبشی ذره را در روی کره به صورت تابعی از زاویه‌ی θ به دست آورید.

(ت): در چه زاویه‌ای جرم سطح کره را ترک می‌کند؟



شکل ۵-۲۸

ت-۶ حلقه‌ای فلزی به شعاع R به طور قائم قرار دارد. یک انتهای فنر بدون جرم با ثابت k به پایین‌ترین نقطه‌ی سطح درونی حلقه وصل است. جرم m به انتهای دیگر فنر وصل است. فنر قشرده می‌شود تا طولش صفر شود و جرم m در پایین ترین نقطه‌ی حلقه با سطح درونی آن تماس پیدا کند. سپس از این وضعیت، فنر رها و در سطح درونی حلقه به بالا رانده می‌شود. سطح درونی حلقه اصطکاک ندارد. در شکل (۵-۲۸) وضعیت در یک زمان دلخواهی پس از رها شدن فنر نشان داده شده است. اگر ℓ طول حالت ترازمندی فنر باشد، کمینه مقدار آن (برحسب R، m، g و k) چقدر باید باشد تا این که جرم m همواره با سطح درونی حلقه در تماس باقی نماند؟

ت-۷ نشان دهید که نیروهای زیر پایستارند و تابع انرژی پتانسیل $U\left(\mathbf{r}\right)$ هر یک را به دست آورید:

(الف): $F_x = ayz + bx + c\ ,\ F_y = axz + bz\ ,\ F_z = axy + by$

(ب): $F_x = -ze^{-x}\ ,\ F_y = \ell n\, z\ ,\ F_z = e^{-x} + y/z$

ت-۸ ریسمانی با چگالی جرمی $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ روی زمین چنبره زده است. با دست یک انتهای آن را می‌گیریم و با سرعت ثابت v و به طور قائم به بالا می‌کشیم. نیرویی را که دست به ریسمان وارد می‌کند، برحسب تابعی از آن قسمت از ریسمان که در هوا است حساب کنید. اگر طول ریسمان L باشد، دست شما برای کندن تمامی ریسمان از زمین چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ توان انتقالی به ریسمان را با آهنگ تغییر انرژی مکانیکی ریسمان مقایسه کنید.

مسئله ها

۵-۱ تابع انرژی پتانسیل مربوط به نیروی $-GMm/x^{۲}$ که ذره‌ای به جرم m در فاصله‌ی x از سیاره‌ای به جرم M $(M \gg m)$ احساس می‌کند، چیست؟ ذره در فاصله‌ی a از مرکز سیاره، از حالت سکون رها شده است و تحت گرانش سقوط می‌کند. سرعت ذره در هنگامی که با سطح سیاره برخورد می‌کند چقدر است؟ شعاع سیاره R است. برای ذره‌ای که از فاصله‌ی $a=۲R$ به زمین سقوط می‌کند، این سرعت را بیابید. $(GM/R^{۲}=g=۱۰ms^{-۲} \ , \ R=۶۴۰۰km)$.

۵-۲ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F=-cx^{۲}$ حرکت می‌کند. c مقدار ثابت مثبتی است. تابع انرژی پتانسیل را بیابید. اگر ذره از نقطه $x=-a$ و از حالت سکون آغاز به حرکت کند، سرعت آن را وقتی به $x=۰$ می‌رسد بیابید. در این حرکت ، کجا ذره به طور لحظه‌ای از حرکت باز می‌ایستد؟

۵-۳ ذره‌ای به جرم m در ناحیه‌ی $x>۰$ تحت تأثیر نیروی $F=-kx+c/x$ حرکت می‌کند ($k>۰$ و $c>۰$) انرژی پتانسیل را بیابید. مکان ترازمندی را بیابید و بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی ترازمندی را حساب کنید.

۵-۴ تابع انرژی پتانسی ذره‌ای به جرم m عبارت است از $v(x)=mk|x|$ که در آن k ثابت مثبتی است. نیرو برای $x>۰$ و $x<۰$ کدامند؟ تابع $V(x)$ را رسم کنید و حرکت را توصیف کنید. اگر ذره از نقطه‌ی $x=-a$ و از حالت سکون آغاز به حرکت کند، زمان لازم برای رسیدن ذره به $x=a$ چقدر است؟

۵-۵ ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی پایستاری که تابع انرژی پتانسیل آن به صورت زیر است، حرکت می‌کند

$$V(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}k(a۲-x۲) & ; \ |x|<a \\ ۰ & ; \ |x|\geq a \end{cases}$$

. هر دو مقدارهای a و k ثابت و مثبت اند. نیروی وارد به ذره کدام است؟

تابع $V(x)$ را رسم کنید (برای $k>۰ \,,\, k<۰$) و گونه‌های ممکن حرکت را توصیف کنید.

۵-۶ تابع انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m عبارت است از $V=c\left(x^{۲}-a^{۲}\right)^{۲}/۲$، که در آن c و a ثابت‌های مثبت‌اند. تابع V را رسم کنید و حرکت‌های شدنی را در سه ناحیه‌ی (**الف**) $E>۰$ ، (**ب**) $E<-ca^{۲}/۲$ و (**پ**) $-ca^{۴}/۲<E<۰$ توصیف کنید.

۵-۷ تابع انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m عبارت است از $V=cx/\left(x^{2}+a^{2}\right)$، که در آن c و a ثابت های مثبت اند. تابع V را رسم کنید. مکان ترازمندی پایدار را بیابید و دوره‌ی نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی ترازمندی را حساب کنید. با فرض این که ذره با سرعت v از این نقطه شروع به حرکت می‌کند، بازه‌ی مقادیر v را برای این که ذره (**الف**) حرکت نوسانی داشته

باشد، **(ب)** ذره به $-\infty$ بگریزد و **(پ)** ذره به $+\infty$ بگریزد، پیدا کنید.

۵-۸ بیشینه‌ی جابه‌جایی جرمی که حول نقطه‌ی ترازمندی نوسان می‌کند ۰,۲m است و بیشینه سرعت آن ۱,۲m/s است. دوره‌ی نوسان چقدر است.

۵-۹ جرمی به یک انتهای فنر وصل است و می‌تواند با بسامد زاویه‌ای ω نوسان کند. در زمان $t=0$ مکان این جرم $x_0>0$ است. جرم و فنر را به سوی مبداء مختصات می فشاریم و سپس رها می‌کنیم تا حرکت نوسانی ساده با دامنه‌ی $2x_0$ انجام دهد. مکان جرم را به صورت تابعی از زمان و به صورت $x=A\cos(\omega t+\theta)$ به دست آورید.

۵-۱۰ نشان دهید که اگر نیروی کل وارد به جسمی که در یک بعد (مثلاً در راستای x) حرکت می‌کند فقط به مکان جسم بستگی داشته باشد، $F=F(x)$ آنگاه قانون دوم نیوتون را می‌توان حل کرد و سرعت جسم را به صورت تابعی از مکان و به صورت $v^2=v_0^2+\frac{2}{m}\int F(x')\,dx'$ به دست آورد. از این نتیجه استفاده کنید و قانون دوم نیوتون را به صورت $md(v^2)=2F(x)dx$ بنویسید و از x تا x_0 از آن انتگرال بگیرید. (برای $F(x)=F_0$ شما به بیان قضیه‌ی کار- انرژی می‌رسید).

۵-۱۱ انرژی پتانسیل جسمی به جرم m در فاصله‌ی r از مبداء مختصات به صورت زیر است $U(r)=U_0(r/R+\lambda^2 r/r)$ که در آن $0<r<\infty$ و $\lambda,\ R,\ U_0$ ثابت‌های مثبت اند.

(الف): مکان ترازمندی را بیابید.

(ب): اگر x فاصله از نقطه‌ی ترازمندی باشد نشان دهید که برای x های کوچک، انرژی پتانسیل به صورت مقدار $V=kx^2/2+C$ در می‌آید که در آن C مقدار ثابتی است.

(پ): بسامد زاویه‌ای نوسان های کوچک را به دست آورید.

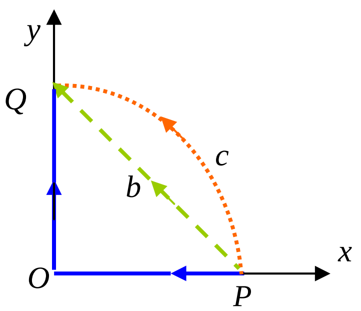
۵-۱۲ کار نیروی گرانش را در جابه‌جایی ذره‌ای به جرم m از مکان $\mathbf{r}_a$ به $\mathbf{r}_b$ به دست آورید. فرض کنید حرکت در صفحه انجام می‌گیرد.

۵-۱۳ نیروی دو بعدی $\mathbf{F}=-y\hat{\mathbf{i}}+x\hat{j}$ داده شده است. کار این نیرو را بر روی مسیرهای a، b، c از نقطه‌ی $P=(1,0)$ تا نقطه‌ی $Q=(0,1)$ حساب کنید. مسیرها به صورت زیر تعریف شده‌اند.

(الف) : مسیری که از $P=(1,0)$ به مبداء می‌رود وسپس از مبداء مختصات در راستای محور y ها به نقطه‌ی $Q=(0,1)$ می رسد. (شکل۵-۲۹)

(ب): خط راستی از نقطه‌ی P به نقطه‌ی Q (مسیر b)

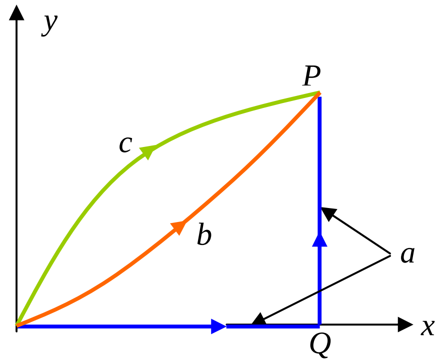
(پ): یک چهارم خم دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات (مسیر c).



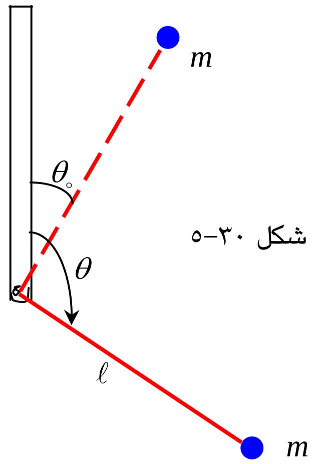
شکل ۵-۲۹

۵-۱۴ برابر شکل (۵-۳۰) میله‌ی عمودی به طول ℓ را در نظر بگیرید. این میله می‌تواند حول انتهای پائینی خود نوسان کند. به انتهای بالای میله وزنه‌ای به جرم m وصل شده است. هنگامی که میله با خط عمود زاویه‌ی θ_0 می‌سازد آن را از حالت سکون رها می‌کنیم . وقتی میله با خط عمود زاویه θ می‌سازد، سرعت جرم m را به دست آورید.از جرم میله چشم پوشی کنید.

۵-۱۵ ذره‌ی کوچک بدون اصطکاکی روی قطب شمال کره‌ی ثابتی به شعاع R قرار دارد. به ذره تلنگر کوچکی می‌زنیم و ذره بر روی کره سُر می‌خورد. در چه ارتفاعی این ذره از سطح کره جدا خواهد شد؟



شکل ۵-۳۱



شکل ۵-۳۰

۵-۱۶ نیروی دو بعدی $\mathbf{F}=x^{۲}\,\hat{\mathbf{i}}+۲xy\,\hat{\mathbf{j}}$ داده شده است. کار این نیرو را بر روی سه مسیری که مبداء مختصات را به نقطه $P=(۱,۱)$ وصل می‌کنند و در شکل (۵-۳۱) نشان داده شده‌اند، حساب کنید. مسیرها به صورت زیر تعریف شده‌اند

(الف): خط راستی از مرکز تا نقطه‌ی $Q=(۱,۰)$ و سپس مستقیم از این نقطه به نقطه‌ی P.

(ب): مسیری که معادله‌ی آن $y=x^{۲}$ است.

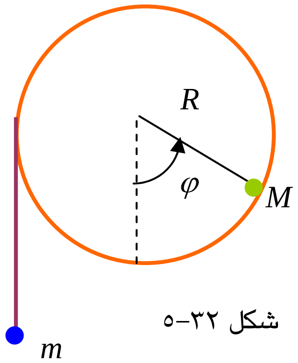
(پ): مسیری که معادله‌ی پارامتری آن بصورت $x=t^{۳}$ و $y=t^{۲}$ است.

۵-۱۷ انرژی پتانسیل آونگ ساده‌ای به جرم m و طول ℓ را برحسب زاویه‌ی ϕ، زاویه‌ی بین آونگ و خط عمود، بنویسید (نقطه‌ی صفر پتانسیل را در پائین‌ترین مکان گلوله‌ی آونگ در نظر بگیرید.) برای زاویه‌های کوچک ϕ نشان دهید که تابع پتانسیل از قانون هوک $V(\phi)=k\phi^{۲}/۲$ پیروی می‌کند. k چیست؟

۵-۱۸ برابر شکل (۵-۳۲) چرخ بدون جرمی به شعاع R را در نظر بگیرید که بر روی محور افقی بدون اصطکاک سوار است. جرم نقطه‌ای M بر لبه‌ی چرخ محکم شده است و جرم m از ریسمانی که دور چرخ پیچیده است آویزان است

(الف): تابع انرژی پتانسیل کل دو جسم را بر حسب زاویه‌ی ϕ بنویسید.

(ب): با استفاده از این پتانسیل، مکان‌هایی را که ممکن است سامانه دارای ترازمندی باشد بیابید و پایداری آنها را بررسی کنید.



شکل ۵-۳۲

(پ): به ازای $m=۰{,}۷M$ ، $m=۰{,}۸M$ تابع پتانسیل $V(\phi)$ را جداگانه رسم کنید.

(ت): اگر سامانه از حالت $\phi=۰$ رها شده باشد، از شکل $V(\phi)$ استفاده کنید و رفتار سامانه را توضیح دهید ($\sin(۰{,}۸)=۰{,}۷۱۷$ و $\sin(۰{,}۷)=۰{,}٦٤٤$)

۵-۱۹ توپ پلاستیکی به جرم $۰{,}۲kg$ به سوی زمین فرو می‌افتد. سرعت توپ هنگام برخورد با زمین $۸\,m/s$ است و به تقریب با همان سرعت به بالا او می‌جهد. اگر زمان تماس توپ با زمین $۱۰^{-۳}\,s$ باشد نیروی میانگینی (میانگین زمانی) از سوی زمین به توپ وارد می‌شود؟

۵-۲۰ مردی به جرم M از ارتفاع h به پائین می پرد. هنگام برخورد با زمین، مرد مرکزجرم خود را به اندازه‌ی S پائین می‌آورد (مرد زانوهای خود را خم می‌کند)

(الف): چه نیروی میانگینی از طرف زمین به مرد وارد می‌شود؟

(ب): فرض کنید مرکزجرم مرد یک سانتیمتر جابه‌جا می‌شود (به تقریب ارتفاع مرد در لحظه‌ی فرود حدود ۲ سانتیمتر کاهش

می‌یابد) اگر مرد از ارتفاع ۲ m بپرد وجرمش ۹۰ kg باشد، در کجای بدن او احتمال شکستگی استخوان وجود دارد؟ فرض کنید سطح مقطع استخوان حدود ۵ cm^2 است.

۵-۲۱ ارابه‌ای که بار ماسه دارد از حالت سکون حرکت می‌کند و از شیب دره‌ای به پایین و سپس از سربالایی روبروی دره بالا می‌رود. در این حرکت ارابه در برابر اصطکاک انرژی از دست نمی دهد. فرض کنید ارتفاع اولیه‌ی ارابه از ته دره h_1 و ارتفاع نهایی آن h_2 باشند. اگر در طول مسیر از ارابه ماسه به بیرون نشت کند، چه رابطه‌ای میان h_2 و h_1 وجود دارد؟

۵-۲۲ یک پله برقی با سرعت ثابت به پایین می‌رود. شخصی با همان سرعت از پله بالا می‌رود. بنابراین، شخص نسبت به زمین ساکن است. آیا این شخص کار انجام می دهد؟

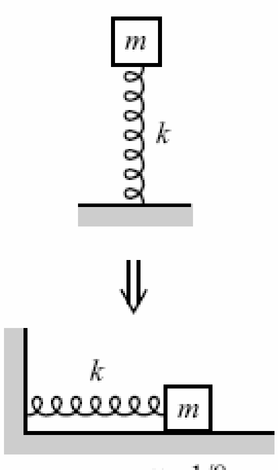
۵-۲۳ ذره‌ای که تحت پتانسیل $V(x)=-A|x|^n$ است از مبداء مختصات دور می‌شود. به ازای چه مقدارهای n این ذره در زمان محدود به بینهایت می‌رسد؟

۵-۲۴ فنر بدون جرمی با ثابت فنر k از سقف آویزان است و طول طبیعی خود را دارد. جرم m را به انتهای فنر می‌بندیم و آن را رها می‌کنیم.

(الف): انرژی پتانسیل کل سامانه را برحسب y (که منفی است) نسبت به مکان اولیه حساب کنید و شکل تقریبی $V(y)$ را بکشید. y نسبت به نقطه‌ای اندازه‌گیری می‌شود که فنر طول طبیعی خود را دارد.

(ب): ارتفاع y_0 که در آن انرژی پتانسیل کمینه می‌شود کدام است؟

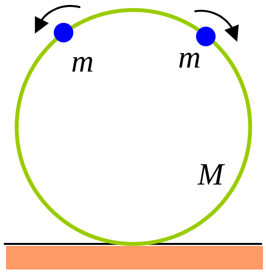
(پ): انرژی پتانسیل را به صورت تابعی از $z\equiv y-y_0$ بازنویسی کنید و توضیح دهید که چرا اگر نقطه‌ی ترازمندی جدید؛ y_0 ، را طول "طبیعی" فنر فرض کنیم، آنگاه می توانیم نتیجه را همانند فنر آویزان در دنیایی در نظر گرفت که در آن دنیا گرانش وجود ندارد.


شکل ۳۳-۵

۵-۲۵ فنری با ثابت فنر k از یک انتها به طور عمودی ایستاده است. جرم m را بر بالای فنر قرار می‌دهیم و به آرامی آن را پایین می‌آوریم تا به نقطه‌ی ترازمندیش برسد و فنر فشرده شود. در حالی که فنر فشرده است سامانه را می‌چرخانیم تا به حالت افقی در بیاید. انتهای سمت چپ فنر را به دیواری وصل می‌کنیم . جرم m همانند شکل (۳۳-۵) روی میز افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu=۱/۸$ قرار می‌گیرد فنر را از این حالت رها می‌کنیم. **(الف)**: فشردگی اولیه‌ی فنر را بیابید. **(ب)**: پس از نیم نوسان، بیشینه کشیدگی (یا فشردگی) فنر چقدر کاهش می‌یابد؟ (*راهنمایی:* این قسمت مسئله را با استفاده از $F=ma$ حل نکنید.) **(پ)**: جرم m پیش از آنکه به حالت سکون در بیاید، چند بار به پس و پیش نوسان می‌کند؟

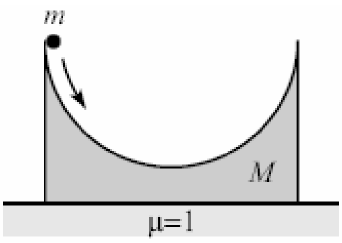
۵-۲۶ **(دانه ی تسبیح روی حلقه)**: دانه‌ی تسبیحی در بالاترین نقطه‌ی حلقه‌ای بدون اصطکاک به شعاع R ساکن ایستاده است. حلقه در صفحه‌ی عمودی است. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی می‌زنیم و دانه تسبیخ روی حلقه می‌لغزد. در چه نقاطی دانه‌ی تسبیح کمترین نیروی افقی را به حلقه وارد می کند.

۵-۲۷ **(دو دانه تسبیح روی حلقه)**: برابر شکل(۳٤-۵) دو دانه تسبیح هر یک به جرم m در بالای حلقه‌ی بدون اصطکاک با جرم M و شعاع R ساکنند. حلقه به طور عمودی روی زمین ایستاده است. به دانه‌های تسبیح تلنگر کوچکی می‌زنیم، یکی از دانه‌ها به راست و دیگری به سوی چپ می‌لغزد. کمینه مقدار m/M چقدر باشد تا در یک لحظه حلقه از زمین بلند شود.



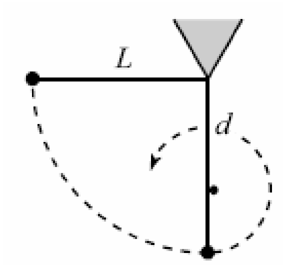
شکل ۵-۳٤

۵-۲۸ (کاسه ی بی حرکت): کاسه‌ای به شکل نیم‌کره و به جرم M روی میزی قرار دارد. سطح درون کاسه اصطکاک ندارد اما بین کاسه و سطح میز، ضریب اصطکاک $\mu = ۱$ است. برابر شکل (۵-۳۵) ذره‌ای به جرم m از لبه‌ی کاسه از حالت سکون رها می‌شود و بر روی سطح درونی کاسه می‌سُرد. بیشینه مقدار m/M چقدر باید باشد تا کاسه هرگز بر روی میز نلغزد؟



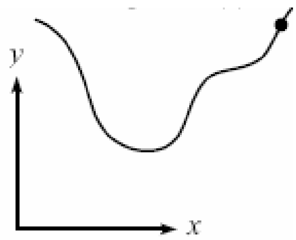
شکل ۵-۳۵

۵-۲۹ (آونگ و میخ): آونگی به طول L را افقی نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم. ریسمان آونگ در فاصله‌ی d از زیر آویزگاه به میخی گیر می‌کند (شکل ۵-۳٦). کم‌ترین مقداری که d می‌تواند داشته باشد که به‌ازای آن ریسمان همیشه به حالت کشیده باقی بماند ، چقدر است؟



شکل ۵-۳٦

۵-۳۰ جرمی تحت تاثیر گرانش برروی سیم بدون اصطکاکی می‌لغزد. ارتفاع سیم با تابع $V(x)$، برابر شکل (۵-۳۷) داده شده است. رابطه‌ای برای شتاب افقی $\ddot{x}$ جرم بیابید. توجه کنید که نتیجه‌ی شما باید نشان دهد که این همانند $\ddot{x}$ ذره‌ای در یک بعد نیست که تحت پتانسیل $mgV(x)$ حرکت می‌کند. در حالت حرکت یک بعدی ، داریم $\ddot{x} = -gV'(x)$. اگر سیم را با دست بگیریم، آیا راهی وجود دارد که سیم را چنان به حرکت در آوریم که این $\ddot{x}$ جرم ، با شتاب افقی حرکتی در یک بعد با پتانسیل $mgV(x)$ برابر باشد؟



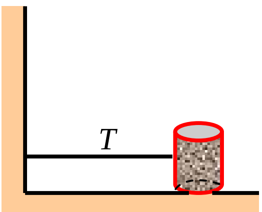
شکل ۵-۳۷

۵-۳۱ دانه‌ی تسبیحی تحت اثر گرانش بر روی سیمی بدون اصطکاک می‌لغزد. ارتفاع سیم با تابع $y(x)$ داده شده است. فرض کنید در نقطه‌ی $(x,y)=(۰,۰)$ سیم عمودی است و دانه‌ی تسبیح با سرعت $v_۰$ از این نقطه می‌گذرد و به پایین می‌رود. شکل سیم چگونه باید باشد (یعنی y چه تابعی از x باشد) تا سرعت عمودی دانه‌ی تسبیح برای همیشه $v_۰$ باقی بماند؟

۵-۳۲ جرمی تحت تاثیر پتانسیل $V(x) = -Cx^n e^{-ax}$ حرکت می‌کند. بسامد نوسان‌های کوچک را حول نقطه‌ی ترازمندی بیابید.

۵-۳۳ پتانسیل جرمی که از یک فنر آویزان است عبارت است از $V(y) = ky^۲/۲ + mgy$. اگر چیزی از فنر آویزان نباشد $y = ۰$ است. بسامد نوسان های کوچک حول نقطه‌ی ترازمندی را بیابید.

۵-۳۴ گلوله‌ی برفی را به سوی دیوار پرتاب می کنیم. تکانه و انرژی گلوله به کجا می روند؟



شکل ۵-۳۸

۵-۳۵ (سطل سوراخ): سطل بدون جرمی را در نظر بگیرید که در زمان $t = ۰$ جرم ماسه ی درون آن M است. سطل را با فنری بدون جرم که کشش آن ثابت و برابر T است (یعنی کشش فنر مستقل از طول آن است) به دیواری بسته‌ایم. شکل (۵-۳۸) را ببینید. زمین اصطکاک ندارد و فاصله‌ی اولیه‌ی سطل تا دیوار L است. فرض کنید در زمان $t \neq ۰$ فاصله‌ی سطل تا دیوار x و

جرم درون سطل m باشند. سطل را رها می‌کنیم تا به سوی دیوار حرکت کند. در سر راهش ماسه با آهنگ ثابت dm/dx از سطل نشت می کند (توجه کنید که آهنگ نشت نسبت به فاصله از دیوار ثابت است و نه نسبت به زمان). باز هم توجه کنید که چون dx منفی است dm هم منفی است.

(الف): انرژی جنبشی ماسه‌ی درون سطل را به صورت تابعی از فاصله تا دیوار به دست آورید. بیشینه مقدار آن چقدر است؟

(ب): اندازه‌ی تکانه‌ی سطل را به صورت تابعی از فاصله تا دیوار حساب کنید و بگویید بیشینه مقدارش چقدر است.

۵-۳۶ (**بازهم سطل سوراخ**): مسئله‌ی ۳۵-۵ را دو باره در نظر بگیرید. این بار فرض کنید آهنگ نشت ماسه از آن با شتاب سطل متناسب باشد. یعنی $dm/dt = b\ddot{x}$. توجه کنید که چون $\ddot{x}$ منفی است، dm نیز منفی است.

(الف) : جرم درون سطل، $m(t)$، را برحسب تابعی از زمان به دست آورید

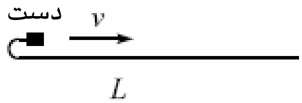
(ب): $x(t)$ و $v(t)$ سطل را برای زمان‌هایی که ماسه‌ی درون سطل غیر صفر است حساب کنید و همچنین $v(m)$ و $x(m)$ را بیابید. سرعت سطل را درست پیش از لحظه‌ای که همه‌ی ماسه خالی شود به دست آورید (فرض کنید در این لحظه هنوز سطل با دیوار برخورد نکرده است).

(پ): بیشینه مقدار انرژی جنبشی سطل چیست؟ (فرض کنید سطل پیش از برخورد با دیوار به این انرژی جنبشی بیشینه دست می یابد).

(ت): اندازه‌ی تکانه‌ی بیشینه سطل چیست؟ (فرض کنید سطل پیش از برخورد با دیوار به این تکانه‌ی بیشینه دست می یابد).

(ج) : به ازای چه مقدار b در لحظه‌ای که سطل با دیوار برخورد می‌کند از ماسه خالی می‌شود؟

۵-۳۷ (**کشیدن زنجیر**): زنجیری به طول L و چگالی جرمی $\sigma\, kg/m$ روی سطح افقی بدون اصطکاک دراز کشیده است. یک انتهای آن را با دست می‌گیریم و بر روی خودش و موازی با آن برابر شکل (۳۹-۵) به عقب می‌کشیم. اگر سرعت دست ثابت و برابر v باشد، دست چه نیرویی را به زنجیر وارد می‌کند. در هنگامی که دوباره زنجیر به حالت کشیده دربیاید، کار کلی را که دست انجام داده است چقدر است. آیا در این فرایند انرژی به صورت گرما تلف شده است؟ چقدر؟



شکل ۳۹-۵

۵-۳۸ (**کلاف ریسمان**): ریسمانی با چگالی جرمی $\sigma\, kg/m$ روی زمین به صورت کلاف در آمده است. یک انتهای آن را با دست می‌گیریم و با نیروی ثابت F در راستای افقی می‌کشیم. کلاف باز می‌شود. در حالی که کلاف گشوده می‌شود، مکان انتهای آن را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. فرض کنید ریسمان روغن کاری شده است و هنگام گشوده شدن کلاف با خودش اصطکاک ندارد.

۵-۳۹ (**خاک‌انداز**): روی سطح شیب داری به شیب θ خاک‌اندازی به پایین می‌لغزد. خاک در خاک‌انداز به طور یکنواخت توزیع شده است و خاک‌انداز در سر راهش خاک جمع می‌کند. پس از زمان درازی، شتاب خاک‌انداز را حساب کنید. فرض کنید بین سطح و خاک‌انداز اصطکاک وجود ندارد.

۵-۴۰ (**موشک**) : گازهای سوخته از موشکی با جرم اولیه‌ی M با سرعت u خارج می شود. هنگامی که اندازه‌ی تکانه‌ی موشک بیشینه می شود، جرم موشک (بعلاوه‌ی بقیه‌ی سوخت مصرف نشده) چقدر است؟ وقتی انرژی موشک به بیشینه مقدارش می‌رسد، جرم موشک چقدر است؟

۵-۴۱ (**موشک ۲**): موشکی را در نظر بگیرید که حرکت راست خط دارد و به آن نیروی خارجی F^{ext} در راستای حرکت وارد می‌شود. (**الف**): نشان دهید که معادله‌ی حرکت موشک $m\dot{v} = -\dot{m}u + F^{ext}$ است. u سرعت خروج گاز از موشک است. (**ب**): اگر موشک در میدان گرانش حرکت عمودی داشته باشد، معادله‌ی حرکت بالا به صورت $m\dot{v} = -\dot{m}u - mg$ درمی‌آید. فرض کنید، گازها با آهنگ ثابت $\dot{m} = -k$ از موشک خارج می‌شود (k مقداری ثابت و مثبت است). بنابراین جرم موشک در هر زمان برابر است با $m = M - kt$ (M جرم اولیه‌ی موشک است). معادله‌ی حرکت بالا را حل کنید و v را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

۵-۴۲ (**موشک چند مرحله ای**): برای این که کارکرد موشک‌های چند مرحله‌ای را نشان دهیم وضعیت زیر را در نظر بگیرید:
(**الف**): سوخت اولیه‌ی موشکی ۶۰٪ جرم آن است (یعنی جرم سوخت برابر است با $۰,۶M$). اگر این موشک در فضای تهی (یعنی در نبود گرانش) از حالت سکون شتابیده شود و سوخت خود را در یک مرحله بسوزاند، سرعت نهایی آن چقدر است؟ پاسخ خود را به صورت ضریبی از u بیان کنید.
(**ب**) : حالا فرض کنید این موشک سوخت خود را در دو مرحله به صورت زیر می‌سوزاند: در مرحله‌ی نخست به اندازه‌ی $۰,۳M$ از سوخت خود را می‌سوزاند و انباره‌ی سوخت مرحله‌ی نخست از موشک جدا می‌شود. جرم این انباره $۰,۱M$ است و سپس بقیه‌ی سوخت خود را ($۰,۳M$ باقی مانده را) می‌سوزاند. سرعت نهایی را در این حالت بیابید. برای همه‌ی مراحل u را یکسان فرض کنید.

۵-۴۳ (**پرش به هوا**): شخصی به جرم ۵۰kg به طور عمودی به هوا می‌پرد و به اندازه‌ی ۰,۸m از زمین فاصله می‌گیرد. برای رسیدن به این ارتفاع چه ضربه‌ای را زمین به این شخص منتقل می‌کند؟

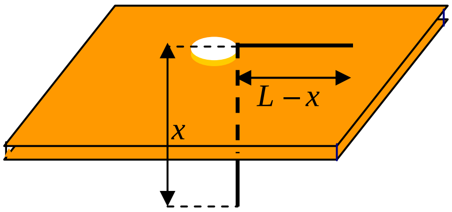
۵-۴۴ (**پرش از قطار**): N نفر هر کدام به جرم m در واگن روبازی به جرم M ایستاده‌اند. آنان از یک انتهای واگن با سرعت u نسبت به واگن به بیرون می‌پرند و واگن در جهت مخالف شروع به حرکت می‌کند. اصطکاک وجود ندارد.
(**الف**): اگر همه‌ی افراد باهم از واگن بپرند، سرعت نهایی واگن را پیدا کنید.
(**ب**) : اگر این افراد یکی پس از دیگری از واگن به بیرون بپرند سرعت نهایی واگن چقدر خواهد شد؟ (پاسخ را می‌توانید به صورت جمع چندین جمله بنویسید).
(**پ**): در کدام حالت (**الف**) یا (**ب**) سرعت نهایی واگن بیشترین است؟ آیا می‌توانید توجیح فیزیکی ساده‌ای به پاسختان بدهید.

۵-۴۵ (**قطره باران**): یک قطره‌ی باران با جرم اولیه‌ی $M_{\circ}$ تحت نیروی گرانش از حالت سکون فرو می افتد. در طول مسیرش از درون ابر می‌گذرد و با آهنگی متناسب با جرم لحظه‌ای ضربدر سرعت لحظه‌ای اش بر جرم قطره افزوده می‌شود: $dM/dt = kMv$ که در آن k مقدار ثابتی است. نشان دهید که سرعت قطره سرانجام به مقدار ثابتی می‌رسد. از پسار هوا چشم پوشی کنید و رابطه‌ای برای سرعت حد بنویسید.

۵-۴۶ (**موشک با نیروی پسار**): مو.شکی در میدان گرانش یکنواخت از حالت سکون با خارج کردن گازهای سوخته با سرعت ثابت u از زمین دور می‌شود. فرض کنید آهنگ خروج جرم از موشک با $dm/dt = \gamma m$ داده شده باشد که در آن m جرم لحظه‌ای موشک است و γ مقدار ثابتی است. به موشک نیروی پسار هوا هم وارد می‌شود که برابر با mbv (b مقدار ثابتی است) است . سرعت موشک را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۵-۴۷ (**شیر آب اتش نشانی**): آب با سرعت v_0 به طور افقی از شیر آب آتش نشانی به بیرون می‌جهد. قطر افشانه‌ی شیر آب D است. نیروی واکنش بر روی شیر آب چقدر است؟

۵-۴۸ (**سطلی بر روی فواره**): سطلی به وزن W را وارونه بر روی فواره‌ای برگردانده‌ایم. سطل به وسیله آب فواره در هوا غوطه‌ور است. آب فواره با آهنگ ثابت dm/dt با سرعت v_0 از زمین به هوا می‌جهد. بیشینه ارتفاعی که سطل می‌تواند در هوا باشد چیست. چه شرطهایی باید برقرار باشد تا بیشینه ارتفاع به دست آید.



شکل ۰-٤۰

۵-۴۹ (**ریسمان آویخته از سوراخ**): ریسمانی به طول ℓ و جرم M روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و طول کوتاه ℓ_0 از سوراخی در روی میز آویزان است. ریسمان در آغاز در حال سکون است (شکل ۰-٤۰ را ببینید)

(**الف**): معادله‌ی عمومی برای $x(t)$ ، طول ریسمان که از سوراخ آویزان است، بیابید.

(**ب**): در پاسخ عمومی ثابت‌هایی وجود دارند که با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. این ثابت‌ها را حساب کنید.

۵-۵۰ (**نیروی پایستار؟**) : کدام یک از نیروهای زیر پایستار است.

(**الف**: $\mathbf{F}=-Ar^2\hat{\mathbf{r}}$) (**ب**): $\mathbf{F}=B(y^2\hat{\mathbf{i}}-x^2\hat{\mathbf{j}})$ (A و B مقدارهای ثابت اند.) (**پ**): $\mathbf{F}=\mathbf{F}_0\sin at$ ($\mathbf{F}_0$ بردار ثابتی است.) (**ت**): $\mathbf{F}=A\theta\hat{\mathbf{r}}$ (A مقدار ثابت و $0\le\theta<2\pi$ و $\mathbf{F}$ محدود به صفحه‌ی xy است.) (**ج**): نیرویی که به سرعت ذره بستگی دارد ، اما همواره بر سرعت عمود است.

۵-۵۱ (**نیروی پایستار و پتانسیل**): کدام یک از نیروهای زیر پایستار است. تابع انرژی پتانسیل را اگر وجود دارد بیابید

(**الف**): $\mathbf{F}=A(2\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{j}}+y\,\hat{\mathbf{k}})$ (**ب**) : $\mathbf{F}=Axyz\,(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$

(**پ**): $F_x=3Ax^2y^5e^{\alpha z},\quad F_y=5Ax^3y^4e^{\alpha z},\quad F_z=\alpha Ax^3y^5e^{\alpha z}$

(**ت**): $F_x=A\sin(\alpha y)\cos(\beta z),\quad F_y=-Ax\alpha\cos(\alpha y)\cos(\beta z)\ ,\quad F_z=Ax\sin(\alpha y)\sin(\beta z)$

۵-۵۲ (**نیروی پایستار- تابع پتانسیل**): کدام یک از نیروهای زیر پایستارند؟ تابع انرژی پتانسیل را برای نیروهای پایستار به دست آورید. a و b مقدارهای ثابت اند و $\mathbf{a}$ بردار ثابتی است.

(**الف**): $F_x=ax+by^2,\quad F_y=az+2bxy,\quad F_z=ay+bz^2$

(**ب**) : $F_x=ay,\quad F_y=az,\quad F_z=ax$

(**پ**): $F_x=2ar\sin\theta\sin\phi,\quad F_\theta=ar\cos\theta\sin\phi,\quad F_\phi=ar\cos\phi$

(**ت**): $\mathbf{F}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$ (ج): $\mathbf{F}=r\mathbf{a}$ (چ): $\mathbf{F}=\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$

۵-۵۳ (**کار نیرو**): کار نیروی‌های (۱) $F_x=ax+by^2,\ F_y=az+2bxy,\ F_z=ay+bz^2$ و (۲) $F_x=ay,\ F_y=az,\ F_z=ax$ مسئله‌ی ۵-۵۲ را در جابه‌جایی ذره‌ای از مبداء مختصات به نقطه‌ی $(x,y,z)=(1,1,0)$ در دو مسیر زیر به دست آورید و در هر دو حالت نشان دهید که نتیجه با منهای تغییر در تابع انرژی پتانسیل برابر است:

مسیر ۱: حرکت در راستای محور x و سپس موازی با محور y **مسیر ۲:** حرکت در راستای خط راست.

۵-۵۴ (کار و نیرو): کار نیروهای **(الف)**: $\mathbf{F}=y\hat{\mathbf{i}}$ و **(ب)**: $\mathbf{F}=x\hat{\mathbf{i}}$ را روی ذره‌ای که بر روی دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ ، $z=۰$ جابه‌جا می‌شود، حساب کنید. در باره‌ی این نیروها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ (*راهنمایی:* مسیر را با $x=a\cos\theta$ ، $y=a\sin\theta$ و $z=۰$ به صورت پارامتری بنویسید.)

۵-۵۵ (کرل نیرو): نیروی متناظر با تابع انرژی پتانسیل $V(r)=cz/r^{۳}$ را بیابید. c مقدار ثابتی است. پاسخ خود را به صورت بردار بنویسید. در مختصات کروی مولفه‌های نیرو کدامند؟ نشان دهید $\nabla\times\mathbf{F}=۰$

۵-۵۶ (میدان نیرو) : میدان نیروی $\mathbf{F}=(x+۲y+az)\hat{\mathbf{i}}+(bx-۳y-z)\hat{\mathbf{j}}+(۴x+cy+۲z)\hat{\mathbf{k}}$ داده شده است.

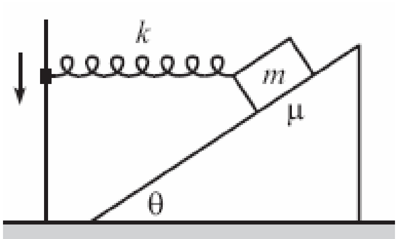
(الف): مقدارهای a ، b و c را چنان بیابید که نیروی $\mathbf{F}$ پایستار باشد.

(ب): اگر $a=۴$, $b=۲$, $c=-۱$ باشند، تابع پتانسیل نیروی بالا را به دست آورید.

(پ): در جابه جایی ذره ای از نقطه‌ی $A\ (۲,-۱,۲)$ به نقطه‌ی $B\ (-۱,-۳,-۲)$ کار این نیرو را بیابید.

۵-۵۷ (ذره در دام پتانسیل): ذره ای در پتانسیل $V(x)=A/x+Bx$ به دام افتاده است. A و B مقدارهای ثابت و مثبت اند. مکان ترازمندی ذره را بیابید و بسامد نوسان‌های کوچک آن را حول نقطه ی ترازمندی حساب کنید.

۵-۵۸ جرم m برابر شکل (۴۱-۵) روی سطح شیب‌دار ثابتی با شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک (ایستایی و جنبشی، هر دو) بین سطح شیب‌دار و جرم $\mu=۱$ است. انتهای سمت راست فنری با ثابت k به جرم m وصل است و انتهای سمت چپ آن به وسیله‌ی حلقه‌ای از میله‌ای عمودی گذشته و می‌تواند در امتداد آن بلغزد. در آغاز، فنر طول طبیعی خودش را دارد و از این حالت سامانه را رها می‌کنیم تا جرم m روی سطح شیب‌دار به پایین بلغزد. انتهای چپ فنر هم به همراه آن در روی میله چنان سقوط می‌کند که همواره افقی باقی بماند. جرم m پس از پیمودن چه مسافتی در روی سطح شیب‌دار برای نخستین بار به حال سکون در می‌آید؟ (برای این که از لغزیدن جرم روی سطح اطمینان پیدا کنید، می‌توانید فرض کنید که $\theta>۴۵^{\circ}$ است).

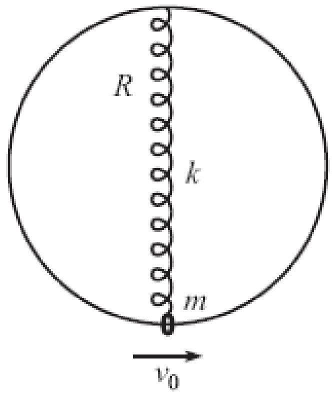


شکل ۴۱-۵

۵-۵۹ حلقه‌ای به شعاع R به طور قائم قرار دارد و در جای خود ثابت است. فنری با ثابت k و طول طبیعی (طول آزاد) صفر از بالاترین نقطه‌ی حلقه آویزان است.

(الف): گلوله‌ای به جرم m به فنر می‌بندیم و از بالاترین نقطه‌ی حلقه رها می‌کنیم. گلوله بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی حلقه نوسان می‌کند. ثابت k را حساب کنید.

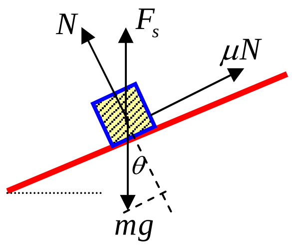
(ب): گلوله را از حلقه جدا می‌کنیم. فنر را می‌کشیم و همانند شکل (۴۲-۵) به دانه‌ی تسبیحی که در پایین‌ترین نقطه‌ی حلقه قرار دارد وصل می‌کنیم. جرم دانه تسبیح m است. به دانه‌ی تسبیح سرعت اولیه‌ی $v_{۰}$ به سوی راست می‌دهیم. وابستگی سرعت دانه‌ی تسبیح به مکانش در روی حلقه چگونه است؟ فرض کنید، بین حلقه و دانه‌ی تسبیح اصطکاک وجود ندارد. مسئله را برحسب زاویه‌ی θ از پایین‌ترین نقطه‌ی حلقه حل کنید. شاید رابطه‌های دو برابر زاویه: $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$ سودمند باشند.



شکل ۴۲-۵

حل مثال‌های تکمیلی

ت-۱



شکل ۴۳-۵

حل: (الف) نمودار آزاد نیروها در شکل (۴۳-۵) دیده می‌شود. F_s نیروی فنر است.

(ب): از $F = ma$ در راستای عمود بر سطح داریم (در حالتی که هنوز قطعه از سطح جدا نشده است):

$$N + F_s \cos\theta - mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta - (kz\sin\theta)\cos\theta \qquad (۵-۱۳۷)$$

قطعه وقتی از سطح جدا می‌شود که $N = 0$ شود. این وضعیت هنگامی پیش می‌آید که $z = mg/(k\sin\theta)$ باشد. (این حرف تا هنگامی درست است که $\tan\theta > \mu$ باشد. در غیر این صورت اضطکاک بسیار بزرگ می‌شود و قطعه اصلا حرکت نمی‌کند).

(پ): **حل ۱ (استفاده از کار)**: کار نیروهای وارد به قطعه عبارت‌اند از کار گرانش (این کار مثبت است)، کار اصطکاک (این کار منفی است؛ چون نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت هم‌اند.) و کار منفی نیروی فنر است. مولفه‌ی نیروی گرانش در امتداد سطح $(mg\sin\theta)$ و جهت آن رو به پایین سطح است. مولفه‌ی نیروی فنر در راستای سطح $(kz\sin\theta)\sin\theta$ و به سوی بالا است. جهت نیروی اصطکاک هم رو به بالای سطح و برابر $\mu N = \mu(mg\cos\theta - kz\sin\theta\cos\theta)$ است. داریم

$$W = \Delta k \;\Rightarrow\; k_f - k_i = W_s + W_g + W_f$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 - 0 = (mg\sin\theta)z + \int_0^z \left(-kz'\sin^2\theta\right)dz' + \int_0^z \left(-\mu\left(mg\cos\theta - kz'\sin\theta\cos\theta\right)\right)dz'$$

$$= mgz\sin\theta - \frac{1}{2}kz^2\sin^2\theta - \mu\left(mgz\cos\theta - (1/2)kz^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= z\,(\sin\theta - \mu\cos\theta)\left(mg - (1/2)kz\sin\theta\right) \qquad (۵-۱۳۸)$$

توجه کنید که اگر $\tan\theta$ اندکی از μ بزرگ‌تر باشد، $(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ اساسا صفر و $v \approx 0$ می‌شود. قطعه وقتی از سطح جدا می‌شود که $z = mg/(k\sin\theta)$ باشد. سرعت در این نقطه عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{mg}{k\sin\theta}\right)(\sin\theta - \mu\cos\theta)\left(mg - (1/2)mg\right)$$

$$= \frac{m^2g^2}{2k\sin\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta) \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{mg^2}{k}\left(1 - \mu/\tan\theta\right)} \qquad (۵-۱۳۹)$$

حل۲ (با استفاده از انرژی): کار نیروی اصطکاک به صورت گرما تلف می‌شود. پس مقدار گرما برابر

$$|W_f| = \int_0^z (\mu N)dz = \int_0^z \mu\left(mg\cos\theta - kz'\sin\theta\cos\theta\right)dz' = \mu\left(mgz\cos\theta - (1/2)kz^2\sin\theta\cos\theta\right) \qquad (۵-۱۴۰)$$

با پایین لغزیدن قطعه در روی سطح شیب‌دار انرژی پتانسیل آن کاهش پیدا می‌کند. این کاهش انرژی پتانسیل به سه چیز تبدیل می‌شود: انرژی جنبشی قطعه، انرژی پتانسیل فنر و گرما . چون $z\sin\theta$ مسافت قائمی است که قطعه فرو می‌افتد و نیز مقداری است که فنر کشیده می‌شود، می‌توان نوشت:

$$mg\,(z\,\sin\theta)=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}k\,(z\,\sin\theta)^{۲}+\mu\left(mgz\,\cos\theta-(۱/۲)kz^{۲}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}mv^{۲}=mgz\,\sin\theta-\frac{۱}{۲}kz^{۲}\sin^{۲}\theta-\mu\left(mgz\,\cos\theta-(۱/۲)kz^{۲}\sin\theta\cos\theta\right) \qquad (۵-۱۴۱)$$

$$=z\,(\sin\theta-\mu\cos\theta)\left(mg-(۱/۲)kz\,\sin\theta\right)$$

که با پاسخ حل ۱ سازگار است.

ت-۲ فرض کنید وقتی که جرم m به حال سکون در می‌آید، فنر به اندازه‌ی x فشرده شده است. این بیشینه فشردگی فنر است و بنابراین، در این هنگام، فنر بیشینه نیرو را به قطعه‌ی $۲m$ وارد می‌کند. پس، برای این که قطعه حرکت نکند، باید نیروی اصطکاک بیشینه در شرط زیر صدق کند.

$$kx\le F_s^{\max}\ \Rightarrow\ kx\le\mu(۲mg)\ \Rightarrow x\le(۲\mu mg/k) \qquad (۵-۱۴۲)$$

انرژی جنبشی اولیه‌ی جرم m به انرژی پتانسیل فنر و گرمای تلف شده در اثر اصطکاک تبدیل شده است. پس داریم

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{۱}{۲}kx^{۲}+(\mu mg)x \qquad (۵-۱۴۳)$$

یا به بیان هم‌ارز، می توتنیم بگوییم که کار فنر بعلاوه‌ی کار نیروی اصطکاک برابر است با تغییر انرژی جنبشی: $\Delta k=\Delta W$

$$-\frac{۱}{۲}kx^{۲}-(\mu mg)x=-\frac{۱}{۲}mv^{۲} \qquad (۵-۱۴۴)$$

مقدار x از رابطه‌ی (۱۴۳-۵) یا (۱۴۴-۵) به دست می‌آید. اگر از رابطه‌ی (۱۴۲-۵) $x\le(۲\mu mg/k)$ را در رابطه‌ی (۱۴۳-۵) یا (۱۴۴-۵) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}\le\frac{۱}{۲}k\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)^{۲}+(\mu mg)\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}mv^{۲}\le\frac{۴\mu^{۲}m^{۲}g^{۲}}{k}\quad\Rightarrow\quad v\le\sqrt{۸\mu^{۲}mg^{۲}/k} \qquad (۵-۱۴۵)$$

(**ب**): انرژی پتانسیل فنر در بیشینه فشردگی آن به انرژی جنبشی جرم m و انرژی گرمایی در اثر اصطکاک تبدیل می‌شود. سرعت نهایی جرم m را وقتی که فنر به حالت ترازمندیش می‌رسد، v_f بنامید. داریم

$$\frac{۱}{۲}kx_{\max}^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_f^{۲}+F_f\,x \qquad (۵-۱۴۶)$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}k\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_f^{۲}+(\mu mg)\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)\ \Rightarrow v_f=۰$$

ت-۳ (الف): به سورتمه نیروی خارجی وارد نمی‌شود. بنابراین داریم

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(mv)=۰\ \Rightarrow\ \frac{dm}{dt}v+m\frac{dv}{dt}=۰\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}\frac{v(t)}{m}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{dm}{m} \qquad (۵-۱۴۷)$$

اگر از دو طرف انتگرال بگیریم، به دست می‌آید

$$\int_{v_\circ}^{v}\frac{dv}{v}=-\int_{M_\circ}^{M_\circ+\lambda L}\frac{dm}{m}\quad\Rightarrow\quad \ell n\left(v/v_\circ\right)=-\ell n\left((M_\circ+\lambda L)/M_\circ\right)$$

$$\Rightarrow \ell n\left(v/v_\circ\right)=\ell n\left(M_\circ/(M_\circ+\lambda L)\right)\quad\Rightarrow\quad v(t)=v_\circ\frac{M_\circ}{M_\circ+\lambda L}\qquad(۵-۱۴۸)$$

(ب): جرم نهایی سورتمه برابر است با $M_f=M_\circ+\lambda L$

(پ): تکا نه‌ی کل سامانه تغییر نکرده است. صفر

(ت): انرژی جنبشی اولیه‌س سورتمه $T_i=(۱/۲)M_\circ v_\circ^۲$ است و انرژی جنبشی نهایی آن عبارت است از

$$T_f=\frac{۱}{۲}\left(M_\circ+\lambda L\right)\left(\frac{M_\circ v_\circ}{M_\circ+\lambda L}\right)^۲=M_\circ\frac{v_\circ^۲}{۲}\frac{M_\circ}{M_\circ+\lambda L}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{T_f-T_i}{T_i}=-\left(۱-\frac{M_\circ}{M_\circ+\lambda L}\right)=-\frac{\lambda L}{M_\circ+\lambda L}\qquad(۵-۱۴۹)$$

ت-۴ پیش از آنکه قطعه شروع به لغزیدن کند، انرژی پتانسیل آن $U_c=mgh$ است. در این موقع انرژی پتانسیل مکعب U_B و انرژی جنبشی آن صفر است. پس، انرژی کل، پیش از آغاز حرکت عبارت است از

$$E_i=U_c+U_B=mgh+U_B\quad,\quad T_c=T_B=\circ\qquad(۵-۱۵۰)$$

در لحظه‌ای که قطعه مکعب را ترک می‌کند انرژی پتانسیل و جنبشی آن عبارتند از

$$U_c'=mg\left(h-R\right),\quad T'=\frac{۱}{۲}mv^۲\qquad(۵-۱۵۱)$$

انرژی پتانسیل مکعب تغییر نمی‌کند اما انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$U_B'=U_B\quad,\qquad T_B'=\frac{۱}{۲}MV^۲\qquad(۵-۱۵۲)$$

و انرژی نهایی کل سامانه برابر است با

$$E_f=U'+T'=U_B+mg\left(h-R\right)+\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}MV^۲\qquad(۵-۱۵۳)$$

از پایستگی انرژی داریم

$$E_i=E_f\quad\Rightarrow\quad mgh+U_B=U_B+mg\left(h-R\right)+\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}MV^۲$$

$$\Rightarrow\quad mgR=\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}MV^۲\qquad(۵-۱۵۴)$$

پیش از آنکه قطعه بلغزد، تکانه‌ی کل سامانه صفر است. به سامانه نیروی خارجی وارد نمی‌شود. بنابراین، تکانه پایسته است. تکانه در هنگام جدا شدن قطعه از مکعب هم باید صفر باشد

$$mv+MV=\circ\quad\Rightarrow\quad V=-\frac{mv}{M}\qquad(۵-۱۵۵)$$

که با جاکذاری در رابطه‌ی (۱۵۴-۵) سرعت‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند

$$v=\sqrt{\frac{M}{M+m}2gR}\quad,\qquad V=-\sqrt{\frac{m^{2}}{M(M+m)}2gR}\qquad (۵-۱۵۶)$$

ت-۵ (الف): کار نیروهای پایستار را W_c و کار نیروهای ناپایستار را W_{nc} بنامید. نیروی پایستار نیروی گرانش $\mathbf{F}_c=-mg\,\hat{\mathbf{j}}$ است و نیروی ناپایستار $\mathbf{F}_{nc}=-F_0\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. کار کل برابر است با

$$W=W_c+W_{nc}\qquad (۵-۱۵۷)$$

$$W_c=\int\mathbf{F}_c\cdot d\mathbf{r}=-\left[U(\theta)-U(0)\right]=mgR(1-\cos\theta)$$ (این کار مستقل از مسیر است)

$$W_{nc}=\int\mathbf{F}_{nc}\cdot d\mathbf{r}\qquad ;\left(d\mathbf{r}=Rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$$=-\int_0^\theta F_0R\sin\theta'd\theta'=F_0R\cos\Big|_0^\theta=F_0R(1-\cos\theta)\qquad (۵-۱۵۸)$$

$$\Rightarrow W=W_c+W_{nc}=R(mg-F_0)(1-\cos\theta)\qquad (۵-۱۵۹)$$

(ب): توجه کنید که $E(\theta=0)=0$ است چون $U(\theta=0)=0$ و جسم در این وضعیت در حال سکون است. تغییر در انرژی به خاطر کار نیروی ناپایستار است:

$$E(\theta)-E(0)=W_{nc}=F_0R(\cos\theta-1)\qquad (۵-۱۶۰)$$

پس، انرژی مکانیکی کل $E(\theta)=F_0R(\cos\theta-1)$ است.

(پ): تغییر در انرژی جنبشی با کار کل برابر است:

$$\frac{1}{2}mv^2-\underbrace{\frac{1}{2}mv^2(\theta=0)}_{=0}=W=R(mg-F_0)(1-\cos\theta)\qquad (۵-۱۶۱)$$

یا به طور هم‌ارز داریم: $E(\theta)=U(\theta)+(1/2)mv^2(\theta)$ چون $U(\theta=0)=0$ است، پس

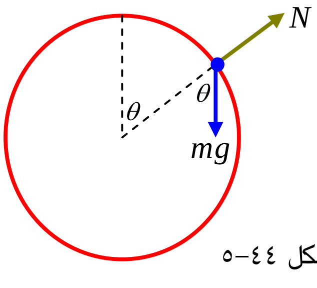
$$U(\theta)=mgR(\cos\theta-1)\qquad (۵-۱۶۲)$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{2}mv^2=R(mg-F_0)(1-\cos\theta)\qquad (۵-۱۶۳)$$

(ت): با استفاده از $F=ma$ در راستای شعاع کره (شکل ۴۴-۵ را ببینید) داریم

$$N-mg\cos\theta=-mv^2/R\qquad (۳-۱۶۴)$$



شکل ۴۴-۵

جرم وقتی سطح کره را ترک می‌کند که $N=0$ شود

$$\Rightarrow mg\cos\theta=mv^2/R=2(mg-F_0)(1-\cos\theta)$$

$$=2mg-2mg\cos\theta-2F_0+2F_0\cos\theta$$

$$\Rightarrow(3mg-2F_0)\cos\theta=2(mg-F_0)\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=\frac{2(mg-F_0)}{3mg-2F_0}\qquad (۵-۱۶۴)$$

ت-۶ سرعت جرم در بالاترین نقطه‌ی حلقه از پایستگی انرژی به دست می‌آید. انرژی کل در پایین‌ترین نقطه، E_b با انرژی کل

در بالاترین نقطه‌ی حلقه E_t برابر است. پس:

$$E_t = E_b \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ + mg\,(۲R) + \frac{۱}{۲}k\,(۲R-\ell)^۲ = \frac{۱}{۲}k\,\ell^۲ \qquad (۵-۱۶۵)$$
$$\Rightarrow \quad mv^۲ = ۴kR\ell - ۴kR^۲ - ۴mgR$$

حالت حدی در بالاترین نقطه‌ی حلقه هنگامی پدید می‌آید که نیروی عمودی سطح صفر شود. بنابراین، در این وضعیت شتاب مرکزگرای mv^2/R را گرانش و نیروی فنر فراهم می‌کنند. با انتخاب جهت مثبت به سوی پایین خواهیم داشت

$$\frac{mv^۲}{R} = mg + k\,(۲R-\ell) \qquad (۵-۱۶۶)$$

توجه کنید که اگر ℓ کمتر (یا بیشتر) از $۲R$ باشد، جرم m به وسیله‌ی فنر به سوی پایین کشیده می‌شود (یا به سوی بالا رانده می‌شود) و بنابراین علامت عبارت $(۲R-\ell)$ درست است. حال اگر مقدار $mv^۲$ را از رابطه‌ی (۵-۱۶۵) در رابطه‌ی (۵-۱۶۶) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{۴kR\ell - ۴kR^۲ - ۴mgR}{R} = mg + k\,(۲R-\ell)$$
$$\Rightarrow ۴k\ell - ۴kR - ۴mg = mg + k\,(۲R-\ell)$$
$$\Rightarrow ۵k\ell = ۵mg + ۶kR \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{mg}{k} + \frac{۶}{۵}R \qquad (۵-۱۶۷)$$

نکته: اگر دقیق باشیم باید بگوییم معادله‌ی شعاعی $F = ma$ به صورت

$$\frac{mv^۲}{R} = mg + k\,(۲R-\ell) + N \qquad (۵-۱۶۸)$$

است. پس، شرط $N \geq ۰$ با $mv^۲/R \geq mg + k\,(۲R-\ell)$ هم‌ارز می‌شود. علامت نامساوی ما را به نتیجه‌ی $\ell \geq (mg/k) + (۶R/۵)$ می‌رساند.

ت-۷ (الف): ساده‌ترین راه این است که شرط $\nabla \times \mathbf{F} = ۰$ را بیازماییم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۵-۱۶۹)$$
$$= (ax + b - ax - b)\,\hat{\mathbf{i}} - (ay - ay)\,\hat{\mathbf{j}} + (az - az)\,\hat{\mathbf{k}} = ۰$$

پس، این نیرو پایستار است. تابع انرژی پتانسیل را می توان به دو صورت حساب کرد:

روش ۱- چون نیرو پایستار است می‌توان مسیر دلخواهی را برای به دست آوردن پتانسیل برگزید. ما مسیر $(۰,۰,۰) \to (x,۰,۰) \to (x,y,۰) \to (x,y,z)$ را انتخاب می‌کنیم. داریم

$$V\,(x,y,z) = -\int_۰^x F_x\big|_{y=۰,z=۰}\,dx - \int_۰^y F_y\big|_{x=x,z=۰}\,dy - \int_۰^z F_z\big|_{x=x,y=y}\,dz + C = -b\frac{x^۲}{۲} - cx - axyz - byz + C \qquad (۵-۱۷۰)$$

که در آن C مقدار ثابتی است. این روشی سریع و مسیری کوتاه برای یافتن تابع انرژی پتانسیل است.

روش ۲- داریم

$$F_x = -\partial V/\partial x \;\Rightarrow\; V = -\int F_x dx = -\int (ayz + bx + c) dx$$
$$\Rightarrow\; V(x,y,z) = -axyz - \frac{b}{۲}x^{۲} - cx + D(y,z) \qquad (۵-۱۷۱)$$

توجه کنید که $D(y,z)$ ثابت انتگرال گیری نسبت به x ، اما تابعی از y و z است. حالا از $V(x,y,z)$ نسبت به y مشتق بگیرید و آن را برابر $-F_y$ داده شده قرار دهید:

$$F_y = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \Rightarrow\; axz + bz = -\left(-axz + \partial D(y,z)/\partial y\right)$$
$$\Rightarrow\; \frac{\partial D(y,z)}{\partial y} = -bz \;\Rightarrow\; D(y,z) = -bzy + E(z) \qquad (۵-۱۷۲)$$

$E(z)$ ثابت انتگرال‌گیری نسبت به y ، اما تابعی از z است. بنابراین، پتانسیل در رابطه‌ی (۱۷۱-۵) به صورت زیر در می‌آید

$$V(x,y,z) = -axyz - \frac{b}{۲}x^{۲} - cx + D(y,z)$$
$$\to\; V(x,y,z) = -axyz - \frac{b}{۲}x^{۲} - cx - bzy + E(z) \qquad (۵-۱۷۳)$$

اینگ یک بار دیگر گام بالا را تکرار می‌کنیم. یعنی از تابع پتانسیل رابطه‌ی (۱۷۳-۵) نسبت به z مستق می‌گیریم و آن را برابر $-F_z$ داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = -F_z \;\Rightarrow\; -axy - by + \frac{\partial E(z)}{\partial z} = -(axy + by)$$
$$\Rightarrow\; \frac{\partial E(z)}{\partial z} = ۰ \;\Rightarrow\; E(z) = C$$
$$\Rightarrow\Rightarrow\; V(x,y,z) = -axyz - \frac{b}{۲}x^{۲} - cx - bzy + C \qquad (۵-۱۷۴)$$

که همان رابطه‌ی (۱۷۰-۵) است.

(ب):

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{۱}{z} - \frac{۱}{z}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(e^{-x} - e^{-x}\right)\hat{\mathbf{j}} + ۰\hat{\mathbf{k}} = ۰ \qquad (۵-۱۷۵)$$

پس این نیرو پایستار است. چون پتانسیل مستقل از مسیر است، برای یافتن پتانسیل، مانند حالت (الف) مسیر $(۰,۰,۱)\to(x,۰,۱)\to(x,y,۱)\to(x,y,z)$ را برای انتگرال‌گیری برمی‌گزینیم. خواهیم داشت

$$V(x,y,z) = -\int_{۰}^{x} F_x\big|_{y=۰,z=۱} dx' - \int_{۰}^{y} F_y\big|_{x=x,z=۱} dy' - \int_{۱}^{z} F_z\big|_{x=x,y=y} dz'$$
$$= \left(۱-e^{-x}\right) - y\,\ell n(۱) - (z-۱)e^{-x} - y\,\ell n(z) + C$$
$$= -ze^{-x} - y\,\ell n(z) + C \qquad (۵-۱۷۶)$$

که در آن C مقدار ثابت است. این مثال را هم می‌توان همانند حالت (الف) با روش ۲ حل کرد که روش کلی‌تری است.

ت-۸ ارتفاع دست از سطح زمین را y بنامید (یعنی طول آن بخش از ریسمان که در هواست). $F(y)$ نیروی مورد نظر است که دست به ریسمان وارد می‌کند. به قسمت در حال حرکت ریسمان توجه کنید. نیروی برآیند وار به این بخش ریسمان عبارت

است از $F-(\sigma y)g$ (جهت مثبت را رو به بالا فرض کردیم). تکانه‌ی این بخش ریسمان $(\sigma y)\dot{y}$ است. از برابری نیروی برآیند وارد به بخش در حال حرکت ریسمان و آهنگ تغییر تکانه‌ی ریسمان به دست می‌آید

$$F-\sigma yg=\frac{d(\sigma y\dot{y})}{dt}=\sigma y\ddot{y}+\sigma\dot{y}^{۲} \qquad (۵-۱۷۷)$$

(**توجه**: اگر بخواهید کل ریسمان را به عنوان سامانه در نظر بگیرید، هنوز هم رابطه‌ی بالا برقرار خواهد بود؛ چون نیروی برآیند تغییر نمی‌کند، وزن اضافی ریسمان که در روی زمین قرار دارد با نیروی عمودی سطح خنثی می‌شود. تکانه هم تغییر نمی‌کند چون فقط تکانه‌ی قسمت متحرک ریسمان غیر صفر است.)اما $\ddot{y}=۰$ و $\dot{y}=v$ اند. بنابراین،

$$F=\sigma yg+\sigma v^{۲} \qquad (۵-۱۷۸)$$

کار دست برابر است با انتگرال این نیرو از $\ddot{y}=۰$ تا $y=L$ ، چون v ثابت است. پس،

$$W=\int_{۰}^{L}\left(\sigma yg+\sigma v^{۲}\right)dy=\frac{\sigma L^{۲}g}{۲}+\sigma Lv^{۲} \qquad (۵-۱۷۹)$$

نکته: انرژی پتانسیل نهایی ریسمان $(\sigma L)g\,(L/۲)$ است؛ چون مرکزجرم به اندازه‌ی $L/۲$ از سطح زمین بلند شده است. این مقدار با جمله‌ی اول رابطی (۵-۱۷۹) برابر است. انرژی جنبشی ریسمان $(\sigma Lv^{۲}/۲)$ است که نصف جمله‌ی دوم در سمت راست رابطه‌ی (۵-۱۷۹) است. انرژی گم شده $(\sigma Lv^{۲}/۲)$ به گرما تبدیل شده است. توان انتقالی به ریسمان از سوی دست عبارت است از

$$P=F\cdot v=\left(\sigma yg+\sigma v^{2}\right)v=\sigma ygv+\sigma v^{3} \qquad (۵-۱۸۰)$$

انرژی مکانیکی سامانه مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی است:

$$E=U+T=(\sigma y)gy+\frac{۱}{۲}(\sigma y)v^{۲} \qquad (۵-۱۸۱)$$

و آهنگ تغییر آن برابر است با

$$\frac{dE}{dt}=۲\sigma gy\dot{y}+\left(\frac{\sigma v^{۲}}{۲}\right)\dot{y}=۲\sigma gyv+\frac{۱}{۲}\sigma v^{۳} \qquad (۵-۱۸۱)$$

فصل ۶

حرکت نوسانی

در این فصل حرکت نوسانی را بررسی خواهیم کرد. ساده‌ترین نمونه‌های این گونه حرکت‌ها تاب خوردن آونگ و حرکت جرمی است که به انتهای فنری بسته شده است. اما با افزودن نیروهای وادارنده یا بازدارنده می‌توان سامانه‌های پیچیده‌تر را هم بررسی کرد.

به دو دلیل می‌خواهیم این حرکت را بررسی کنیم. نخست این که ابزار بررسی آن فراهم است؛ بنابراین زمینه‌ای برای به کار بستن آموخته‌هایمان است. حرکت‌های نوسانی یکی از چند سامانه‌ی فیزیکی است که می‌توان آن را دقیق حل کرد. دوم، حرکت های نوسانی به فراوانی در طبیعت وجود دارند و بنابراین، شایسته‌ی بررسی اند.

در آغاز این فصل، ریاضیاتی را می‌پرورانیم که به آن نیاز داریم. در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه می‌توان ریاضیات را در فیزیک به کار برد. این فصل را با معادله‌های دیفرانسیل خطی آغاز می‌کنیم.

۶-۱ معادله های دیفرانسیل خطی

معادله‌ی دیفرانسیل خطی معادله‌ای است که فقط شامل توان اول x و توان اول مشتق‌های آن نسبت به یک متغیر (در این فصل زمان t) است. یک نمونه از معادله‌های دیفرانسیل خطی عبارت است از $۳\ddot{x}+۷\dot{x}+x=۰$. نمونه‌ای از معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی $۳\ddot{x}+۷\dot{x}^{۲}+x=۰$ است. اگر سمت راست معادله صفر باشد گوییم معادله‌ی دیفرانسیل **همگن** است. اگر سمت راست معادله تابعی از t باشد گوییم **ناهمگن** است. هدف این بخش آموختن روش حل هر دوی این معادله‌های دیفرانسیل خطی است. این معادله‌ها بارها در مسئله‌های فیزیک نمایان می‌شوند و بهتر است یک بار برای همیشه حل آنها را یاد گرفت. ما به نظریه‌ی معادله های دیفرانسیل نخواهیم پرداخت بلکه به یاری مثال، روش حل آنها را خواهیم پروراند.

در همه جای این فصل فرض ما این خواهد بود که x تابعی از t است و نقطه‌ای بر بالای آن (مثل $\dot{x}$) یعنی مشتق نسبت به زمان است. اینک چند مثال: نخست ساده ترها

مثال ۶-۱ ($\dot{x}=ax$): این یک معادله‌ی دیفرانسیل ساده است و (دست کم) به دو روش می‌توان آن را حل کرد.

حل ۱: متغیرها را از هم جدا کنید و آن را به صورت $dx/x=a\,dt$ بنویسید و سپس از دو طرف انتگرال بگیرید. خواهیم داشت $\ell n\,x=at+c$ که در آن c ثابت انتگرال‌گیری است. از این جا می‌توان نوشت

$$x=Ae^{at} \qquad (۶-۱)$$

که در آن $A=e^{c}$ است و با مقدار اولیه، مانند مقدار x در $t=۰$ ، به دست می‌آید.

حل ۲: پاسخ آزمونی به صورت تابع نمایی $x=Ae^{\alpha t}$ برگزینید و آن را به همراه مشتق آن در $\dot{x}=ax$ قرار دهید. می‌بینید که $a=\alpha$ می شود. پس $x=Ae^{\alpha t}$ پاسخ معادله است.

مثال ۶-۲ ($\ddot{x}=ax$): اگر a منفی باشد، خواهیم دید که این معادله توصیف حرکت نوسانی است. اگر a مثبت باشد حرکتی را توصیف می‌کند که به طور نمایی با زمان افزایش یا کاهش می‌یابد. دستکم دو روش حل برای این معادله وجود دارد.

حل ۱: می توان مانند مثال ۱-۶ از شیوه‌ی جداسازی متغیرها استفاده کرد (فصل ۳ را ببینید) چون در این جا نیرو تنها به

متغیر مکان، x ، بستگی دارد. اگرچه این روش کارگر است، اما می‌تواند طولانی و پیچیده باشد. چون این معادله نسبت به x خطی است روش ساده‌تری برای حل آن وجود دارد.

حل۲: مانند مثال ۱-٦ ، یک تابع آزمون به صورت $x(t)=Ae^{\alpha t}$ برگزینید و سپس ببینید α چه مقداری می‌تواند داشته باشد. باز هم نمی‌توانیم A را حساب کنیم چون، از معادله حذف می‌شود. با جاگذاری $Ae^{\alpha t}$ و مشتق دوم آن در $\ddot{x}=ax$ خواهیم داشت $\alpha=\pm\sqrt{a}$. پس دو پلسخ وجود دارد و پاسخ عمومی ترکیب خطی این دو است:

$$x(t)=Ae^{\sqrt{\alpha}t}+Be^{-\sqrt{\alpha}t} \qquad (٦-٢)$$

با جاگذاری آن در $\ddot{x}=ax$ می‌توان دید که در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کند. A و B با شرایط اولیه‌ی مسئله تعیین می‌شوند. این یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو بود(مشتق مرتبه دو داشت) و هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو، دو پاسخ مستقل دارد. ما دو پاسخ مستقل آن را یافتیم. (اگر دقیق‌تر سخن بگوییم، باید گفته شود که پاسخ‌های معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو، خانواده‌ای دو پارامتری‌اند. اما همین مقدار هم برای ما بسنده است.)

نکته‌ی بسیار مهم: واقعیت این که جمع دو پاسخ متفاوت، خود یک پاسخ است ویژگی بسیار مهم معادله‌های دیفرانسیل خطی است. معادله‌های دیفرانسیل غیر خطی مانند $\ddot{x}^{2}=bx$ این ویژگی را ندارند. چون، با به توان دو رساندن جمع دو پاسخ، جمله‌ی سومی ظاهر می‌شود و خطی بودن را ازبین می‌برد. این ویژگی را *اصل برهم‌نهی* می‌گویند. یعنی از برهم‌نهی دو پلسخ ، پاسخ دیگری به وجود می‌آید. کار کردن با نظریه‌های فیزیکی که برپایه‌ی معادله‌های خطی اند، آسان‌تر از نظریه‌هایی اند که بر پایه‌ی معادله‌های غیر خطی ساخته می‌شوند. برای نمونه، نظریه‌ی نسبیت عام برپایه‌ی معادله‌های غیرخطی است و یافتن پاسخ سامانه‌ها در نسبیت عام کار بس دشوار است.

بگذارید اندکی بیشتر در باره‌ی پاسخ (٦-٢) سخن بگوییم. اگر a منفی باشد بهتر است تعریف کنیم $a\equiv-\omega^{2}$ که در آن ω یک مقدار حقیقی است. حالاپاسخ (٦-٢) به صورت $x(t)=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$ درمی‌آید. با توجه به $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌توان آن را به صورت توابع مثلثاتی نوشت. صورت‌های گو.ناگونی برای نوشتن این پاسخ وجود دارد که عبارتند از

$$\begin{aligned} x(t)&=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\\ x(t)&=C\cos\omega t+D\sin\omega t\\ x(t)&=E\cos(\omega t+\phi_1)\\ x(t)&=F\sin(\omega t+\phi_2) \end{aligned} \qquad (٦-٣)$$

بسته به این که ویژگی‌های سامانه چه باشد، یکی از این صورت‌ها مناسب‌تر از بقیه خواهد بود. اما به هر حال آنها هم‌ارزند. در این رابطه‌ها ثابت‌های متفاوت وجود دارند اما آنها به یکدیگر مربوط اند. برای نمونه، $C=E\cos\phi_1$ و $D=-E\sin\phi_1$ که از فرمول کسینوس جمع زاویه‌ها به دست می‌آید.

توجه کنید که در هر یک از این صورت‌های متفاوت پاسخ $x(t)$ دو پارامتر آزاد وجود دارد که با شرایط اولیه (مثل مکان و سرعت در $t=0$) تعیین می‌شوند. برعکس این پارامترها که آزادند، کمیت ω را سامانه‌ی فیزیکی که با آن سروکار داریم تعیین می‌کند. ω مستقل از شرایط اولیه‌ی مسئله است و سرشت سامانه را نشان می‌دهد.

اگر a مثبت باشد، بهتر است آن را به صورت $a\equiv\alpha^{2}$ تعریف کنیم که در آن α یک عدد حقیقی است. پاسخ (٦-٢) حالا به صورت $x(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{-\alpha t}$ درمی‌آید. این را نیز با استفاده از $e^{\theta}=\cosh\theta+\sinh\theta$ می‌توان برحسب توابع مثلثاتی هایپربولیک نوشت. صورت‌های متفاوت این پاسخ به قرار زیراند.

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$
$$x(t) = C\cosh\alpha t + D\sinh\alpha t$$
$$x(t) = E\cosh(\alpha t + \phi_1) \qquad (٦-٤)$$
$$x(t) = F\sinh(\alpha t + \phi_2)$$

باز هم می‌بینیم که ثابت‌های گوناگون در این صورت‌های پاسخ $x(t)$ نمایان می‌شوند.

اگرچه پاسخ (٦-٢) برای هر دو علامت a کاملا درست است اما برای $a < 0$ معمول است که یا آن را به صورت توابع مثلثاتی ویا به صورت $e^{\pm\alpha t}$ بنویسند تا روشنگری بیشتر داشته باشد.

ما به سودمندی شیوه‌ی گمانه زنی پاسخ به صورت تابع نمایی پافشاری می‌کنیم. این روش محدود کننده و سبک به نظر می‌رسد، اما بقیه‌ی مثال‌های این فصل نشان خواهند داد که این چنین نیست.

مثال ٣-٦ ($\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax = 0$) : این آخرین مثال ریاضی ماست. پس از آن به فیزیک خواهیم پرداخت. دراینجا من عدد ٢ را به ضریب $\dot{x}$ افزوده‌ام تا رابطه‌های بعدی زیباتر باشند. توجه کنید که حالا نیرو (اگر لحظه‌ای از ریاضیات بگذریم و به فیزیک نگاه کنیم) عبارت است از $-2\gamma\dot{x} - ax$ (ضربدر m) که به هر دوی x و v بستگی دارد. بنابراین، شیوه‌ی جداسازی متغیرها که در فصل ٣ پروراندیم در اینجا کارگر نیست و نمی‌توان از آن استفاده کرد. پس، فقط شیوه‌ی گمانه‌زنی پاسخ به صورت تابع نمایی، $Ae^{\alpha t}$، باقی می‌ماند. حال ببینیم چه چیزی از آن به دست می‌آوریم. با جا گذاری $x(t) = Ae^{\alpha t}$ در معاله‌ی دیفرانسیل داده شده و حذف جمله‌ی مشترک $Ae^{\alpha t}$ خواهیم داشت:

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + a = 0 \qquad (٦-٥)$$

که یک معادله‌ی درجه دو برحسب α است و پاسخ‌های آن عبارتند از $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - a}$. این دو ریشه را α_1 و α_2 بنامید. در نتیجه، پاسخ عمومی معادله به صورت زیر است

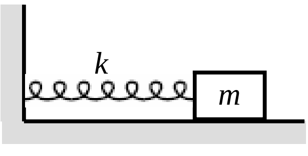
$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2 - a}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2 - a}}\right) \qquad (٦-٦)$$

اگر $\gamma^2 - a < 0$ باشد می‌توان آن را برحسب سینوس و کسینوس نوشت و در نتیجه، حرکت نوسانی داریم که به خاطر ضریب $e^{-\gamma t}$ کاهشی است (یا افزایشی است اگر $\gamma < 0$ باشد. اما از نظر فیزیکی، این حالت به ندرت پیش می‌آید.)

در دو مثال اول، پاسخ‌ها روشن بودند. در این مثال، اما نمی‌توان با نگاه کردن به پاسخ گفت « خب، این پاسخ هم بدیهی است». بنابراین ، روش ما برای حل معادله در شکل $Ae^{\alpha t}$ آن قدرها هم سبک نیست.

٢-٦ نوسانگر هماهنگ ساده

اینک می‌توانیم به مسئله‌های فیزیکی بپردازیم. با نوسانگر هماهنگ ساده آغاز می‌کنیم. این حرکتی است که ذره‌ای تحت تاثیر نیرویی مانند $F(x) = -kx$ انجام می‌دهد. مثال کلاسیکی حرکت نوسانی هماهنگ، جرم متصل به فنری بدون جرم است که همانند شکل (٦-١) روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. نیروی فنر به صورت $F(x) = -kx$ است که در آن x مقدار جابه‌جایی (کشیده شدن یا فشرده شدن فنر) از حالت ترازمندی است و دلیل آن را در فصل٥ دیدیم. این قانون هوک است و تا هنگامی که کشیده شدن یا فشرده شدن فنر خیلی زیاد نباشد، برقرار است. برای فنر واقعی این قانون به این صورت برقرار نیست. برای این سامانه، $F = ma$ می گوید $-kx = m\ddot{x}$ یا



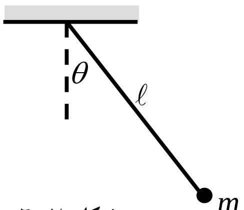
شکل ١-٦

$$\ddot{x}+\omega^{2}x=0 \quad , \quad \omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۶-۷}$$

این همان معادله است که در مثال ۲ در بالا حل کردیم. می‌توانیم از رابطه‌ی (۳-۶) پاسخ آن را به صورت زیر بنویسیم.

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi) \tag{۶-۸}$$

این پاسخ مثلثاتی نشان می‌دهد که حرکت برای همه‌ی زمان‌ها نوسانی است. ω بسامد زاویه‌ای است و ما آن را در فصل ۵ بررسی کردیم. اگر t به اندازه‌ی $2\pi/\omega$ افزایش پیدا کند ، شناسه‌ی کسینوس به اندازه‌ی 2π بزرگ می‌شود و مکان ذره به جایی می‌رسد که از آن نقطه حرکتش را آغاز کرده بود. *دوره* (زمان لازم برای کامل کردن یک چرخه) عبارت است از $T\equiv 2\pi/\omega$. بسامد برحسب دور برثانیه (هرتز)، عبارت است از $\nu=1/T=\omega/2\pi$. ثابت A (یا اگر منفی باشد، قدر مطلق آن) دامنه است. یعنی بیشینه جابه‌جایی از مبداء. سرعت این حرکت به صورت تابعی از زمان عبارت است از $v(t)\equiv\dot{x}(t)=-A\omega\sin(\omega t+\phi)$. ثابت‌های A و ϕ را شرایط اولیه تعیین می‌کنند؛ برای نمونه، اگر $x(0)=0$ و $\dot{x}(0)=v$ باشند، آنگاه باید داشته باشیم $A\cos\phi=0$ و $-A\omega\sin\phi=v$. پس، $\phi=\pi/2$ و $A=-v/\omega$ (یا $\phi=-\pi/2$ و $A=v/\omega$ که باز هم به همان پاسخ می‌انجامد). بنابراین، داریم $x(t)=-(v/\omega)\cos(\omega t+\pi/2)$ که اگر به صورت $x(t)=(v/\omega)\sin(\omega t)$ بنویسیم زیباتر می‌نماید.



شکل ۲-۶

مثال ۴-۶ (آونگ ساده): آونگ ساده، سامانه‌ی کلاسیک دیگری است که به تقریب حرکت نوسانی هماهنگ ساده انجام می‌دهد. فرض کنید طول ریسمان آونگ ℓ و $\theta(t)$ انحراف آن از خط قائم باشند (شکل ۲-۶). مولفه‌ی مماسی نیروی گرانشی وارد به جرم آونگ $-mg\sin\theta$ است. پس، $F=ma$ در راستای مماسی می‌گوید

$$-mg\sin\theta=m(\ell\ddot{\theta}) \tag{۶-۹}$$

(طول کمان متناظر با θ برابر است با $\ell\theta$) . کشش ریسمان به همراه مولفه‌ی شعاعی (در راستای ریسمان) نیروی گرانش، شتاب شعاع را به وجود می‌آورند و می‌توان از آن استفاده کرد و کشش ریسمان را حساب کرد. ما در اینجا به آن نیاز نداریم. اکنون به گستره‌ی تقریب‌ها گام می‌گذاریم. فرض کنید دامنه‌ی نوسان کوچک است. یعنی فرض کنید θ به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان از تقریب $\sin\theta\approx\theta$ استفاده کرد. بدون این تقریب نمی‌توان برای مسئله پاسخ بسته (پاسخی برحسب توابع ابتدایی) یافت. حال اگر از این تقریب در رابطه‌ی (۹-۶) استفاده کنیم، رابطه‌ی (۹-۶) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\ddot{\theta}+\omega^{2}\theta=0 \quad , \quad \omega=\sqrt{g/\ell} \tag{۶-۱۰}$$

پاسخ این معادله‌ی دیفرانسیل را می‌شناسیم و در مثال ۲ آن را دیدیم. بنابراین داریم

$$\theta(t)=A\cos(\omega t+\phi) \tag{۶-۱۱}$$

A و ϕ با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. می‌بینیم که آونگ حرکت نوسانی انجام می‌دهد. حرکت واقعی با دامنه‌های به اندازه‌ی کافی کوچک به این حرکت بسیار نزدیک است.

مثال ۵-۶ (افزایش جرم): جرم m به فنری با ثابت k وصل است وبا آن نوسان می‌کند. دامنه‌ی نوسان d است. در لحظه‌ای که جرم در مکان $x=d/2$ است و به سمت راست می‌رود، با ذره‌ی دیگری به جرم m برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. سرعت سامانه‌ی جدید با جرم $2m$ درست پس از برخورد، نصف سرعت سامانه‌ی اولیه درست پیش از برخورد است (این را

از پایستگی تکانه می دانیم– فصل ۵ را ببینید). مکان $x(t)$ حرکت سامانه‌ی جدید با جرم $۲m$ را بیابید و دامنه‌ی نوسان آن را حساب کنید.

حل: نخست باید سرعت را درست پیش از برخورد حساب کنیم. حرکت پیش از برخورد به صورت $x = d\cos(\omega t + \phi)$ بوده است که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ است. فرض کنید زمان برخورد $t = ۰$ است (فرق نمی کند چه زمانی را در معادله‌ی حرکت قرار دهیم). بنابراین داریم $d/۲ = x(۰) = d\cos\phi$ و از این جا به دست می‌آید $\phi = \pm\pi/۳$. پس، سرعت درست پیش از برخورد عبارت است از

$$v(۰) \equiv \dot{x}(۰) = -\omega d\sin\phi = -\omega d\sin(\pm\pi/۳) = \mp(\sqrt{۳}/۲)\omega d \qquad (۶-۱۲)$$

ما علامت مثبت را می‌خواهیم؛ چون گفته شده است که جرم به سمت راست حرکت می‌کند. یافتن حرکت پس از برخورد حالا به یک مسئله‌ی شرایط اولیه کاهش یافته است: جرم $۲m$ در انتهای فنری با ثابت k است که در مکان اولیه‌ی $d/۲$ سرعت اولیه‌اش $(\sqrt{3}/4)\omega d$ (نصف سرعت بالا) است. در وضعیت‌هایی که مکان و سرعت اولیه را می‌دانیم بهتر است $x(t)$ را به صورت رابطه‌ی (۳-۶) بنویسیم

$$x(t) = C\cos\omega' t + D\sin\omega' t \qquad (۶-۱۳)$$

زیرا در $t = ۰$ مکان ذره با C و سرعت آن با $\omega' D$ داده می‌شوند (نگاه کنید به توضیح پس از رابطه‌های (۳-۶). پس، به کار بردن شرایط اولیه ساده اند. در اینجا من از ω' استفاده کردم تا بگویم که بسامد حرکت پس از برخورد با بسامد حرکت پیش از برخورد فرق دارد. حالا جرم دو برابر شده است و در نتیجه داریم $\omega' = \sqrt{k/2m} = \omega/\sqrt{2}$. اینک می‌توانیم از شرایط اولیه استفاده کنیم. به دست می‌آید

$$\begin{aligned} &x(۰) = \frac{d}{۲} \;\Rightarrow\; C = \frac{d}{۲} \\ &v(۰) = \left(\frac{\sqrt{۳}}{٤}\right)\omega d \;\Rightarrow\; \omega' D = \left(\frac{\sqrt{۳}}{٤}\right)\omega d \;\Rightarrow\; D = \frac{\sqrt{٦}}{٤}d \end{aligned} \qquad (٦-١٤)$$

و سرانجام پاسخ نهایی عبارت است از

$$x(t) = \frac{d}{۲}\cos\omega' t + \frac{\sqrt{٦}d}{٤}\sin\omega' t \qquad , \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{۲m}} \qquad (٦-١٥)$$

یافتن دامنه را به تمرین‌ها واگذار می‌کنیم. برای این کار بهتر است از نمایش مختلط استفاده کرد. اگر کمیت $A \equiv \sqrt{C^۲ + D^۲}$ را تعریف کنید رابطه‌ی (۱۳-۶) را می‌توانید به صورت زیر بنویسید

$$\begin{aligned} x(t) &= A\left(\frac{C}{A}\cos\omega' t + \frac{D}{A}\sin\omega' t\right) \\ &= A\left(\cos\delta\cos\omega' t + \sin\delta\sin\omega' t\right) = A\cos(\omega' t - \delta) \end{aligned} \qquad (٥-١٦)$$

از این جا دیده می‌شود که دامنه حرکت برابر است با $A = \sqrt{۱۰}\,d/٤$.

یک نتیجه‌ی آموزشی میان بُر: در طول آموزش فیزیک، شما در مجال‌های بسیاری با معادله‌های حرکت نوسانگر $\ddot{z} + \omega^۲ z = ۰$ روبرو خواهید شد که در آن $\omega^۲$ عدد مثبتی است و به پارامترهای مختلف سامانه بستگی دارد. هرگاه چنین معادله‌ای را دیدید، بدون این که نگران پیچیدگی ظاهری مسئله باشید، بدون تلاش اضافی پاسخ را $A\cos(\omega t + \phi)$ برگزینید. اگر به معادله‌ی از

نوع $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ رسیدید، می‌دانید که سامانه حرکت نوسانی ساده دارد و بسامد آن جذر ضریب z است.

- **انرژی در نوسانگر ساده**

این بخش را با نگاهی گذرا به انرژی نوسانگر ساده به پایان می‌بریم. جسمی که حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد تحت تاثیر قانون نیروی $F=-kx$ است. حرکت آن عبارت است از $A\cos(\omega t+\phi)$. بنابراین ، انرژی پتانسیل مربوط به این نیرو عبارت است از

$$V=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi) \tag{6-17}$$

اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم سرعت به دست می‌آید و می‌توان انرژی جنبشی را حساب کرد

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi) \tag{6-18}$$

در تساوی دوم ω^2 را با k/m جای‌گزین کردیم. می‌بینید که V و T بین صفر و $kA^2/2$ نوسان می‌کنند و نوسان آنها کاملا ناهم فاز است: یعنی هنگامی که V بیشینه است T صفر می‌شود و برعکس. به ویژه چون $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ است انرژی کل پایسته است:

$$E=T+V=\frac{1}{2}kA^2 \tag{6-19}$$

و باید هم برای هر نیروی پایستار این چنین باشد.

۶-۳ نوسانگر میرا

در فصل ۵ دیدیم که در همسایگی ترازمندی پایدار، ذره‌ی تحت تاثیر نیروی پایستار را همواره می‌توان به تقریب، یک نوسانگر هماهنگ پنداشت. اگر سامانه انرژی از دست بدهد، یعنی پس از گذشت مدتی، دامنه‌ی نوسان آن کاهش یابد و یا پس از گذشت زمان به اندازه‌ی کافی دراز، از نوسان باز ایستد، باید این رفتار بگونه‌ای در معادله‌ی حرکت به حساب بیاید. به بیان دیگر، معادله‌ی حرکت باید شامل نیرویی باشد که به سرعت بستگی دارد، نیرویی ناپایستار به صورت $F_f=-bv$. این نیرو به میرایی نوسان خواهد انجامید.

تا هنگامی که با جابه‌جایی‌های کوچک در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی سرو کار داریم، می‌توان جابه‌جایی x و مشتق نسبت به زمان آن، $\dot{x}$، را کوچک فرض کرد و از کمیت‌هایی مانند $x^2, x\dot{x}, \dot{x}^2$ چشم‌پوشی کرد. بنابراین، برای نوسان‌های میرا نیروی برآیند وارد به سامانه عبارت است از: $F=-kx-b\dot{x}$. جمله‌ی دوم می‌تواند مقاومت هوا، یا هر محیط دیگری باشد که جسم در آن حرکت می‌کند و بخشی از انرژی خود را به آن محیط می‌دهد. bمقدار ثابتی است که به شکل جسم و نوع محیط بستگی دارد. معادله‌ی حرکت، قانون دوم نیوتون، اینک به صورت زیر درمی‌آید:

$$F=m\ddot{x}=-kx-b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \tag{6-20}$$

معادله‌های از این دست، در بسیاری از شاخه‌های فیزیک وجود دارند. مثل نوسان مدار الکتریکی با القائیدگی L ، مقاومت R و خازن C که به طور سری به هم بسته شده‌اند و با معادله‌ی زیر توصیف می‌شود. $L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=0$ که در آن متغیر q بار موجود بر روی یکی از صفحه‌های خازن است.

با تعریف کمیت‌های $\omega \equiv k/m$ و $۲\gamma \equiv b/m$ معادله‌ی (۲۰-٦) به صورت $\ddot{x} + ۲\gamma\dot{x} + \omega^۲ x = ۰$ درمی‌آید. این معادله همان معادله‌ای است که در مثال۳-٦ پاسخ‌های آن را یافتیم (در اینجا $a \to \omega^2$). اما حالا ما باید محدودیت‌های فیزیکی $\gamma > ۰$ و $\omega^۲ > ۰$ را هم در نظر بگیریم. برای سادگی فرض کنید $\Omega^۲ \equiv \gamma^۲ - \omega^۲$ باشد. حالا می‌توانیم پاسخ معادله‌ی (۲۰-٦) را همانند رابطه‌ی (٦-٦) بنویسیم: معادله‌ی (۲۰-٦) را مانند معادله‌ی مثال۳-٦ می‌توان با پاسخ هایی از گونه‌ی $x = e^{\alpha t}$ حل کرد. اگر از $x = e^{\alpha t}$ نسبت به زمان مشتق بگیریم و در (۲۰-٦) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$m\alpha^۲ + b\alpha + k = ۰ \qquad (٦\text{-}۲۱)$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^۲ - \omega^۲} \qquad (٦\text{-}۲۲)$$

که در آن $\omega^۲ \equiv k/m$ و $۲\gamma \equiv b/m$ تعریف شده‌اند. اینک رابطه‌ی (۲۰-٦) به صورت زیر درمی‌آید

$$\ddot{x} + ۲\gamma\dot{x} + \omega^۲ x = ۰ \qquad (٦\text{-}۲۳)$$

و پاسخ‌های آن عبارتند از

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}) \qquad , \qquad \Omega \equiv \sqrt{\gamma^۲ - \omega^۲} \qquad (٦\text{-}۲٤)$$

توجه کنید که ω مانند رابطه‌ی (۷-٦)، بسامد نوسان نامیرا است. اگردو طرف رابطه‌ی (۲۰-٦) را در $\dot{x}$ ضرب کنید؛ خواهیم داشت:

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} + b\dot{x}^۲ = ۰ \qquad (٦\text{-}۲٥)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ + \tfrac{۱}{۲}kx^۲\right) + b\dot{x}^۲ = ۰ \qquad (٦\text{-}۲٦)$$

دو عبارت داخل پرانتز را می‌شناسیم ؛ نخستین آنها انرژی جنبشی و دومی انرژی پتانسیل نیروی بازدارنده‌ی، $F = kx$، است. پس، جمله درون پرانتز انرژی کل سامانه، $T + V$، است . چون

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -b\dot{x}^۲ \qquad (٦\text{-}۲۷)$$

بنابراین، آهنگ انجام کار نیروی $-b\dot{x}$ برابراست با $-b\dot{x}^۲$. از این رابطه به روشنی دیده می‌شود که اگر سامانه، علاوه بر نیروهای پایستار (در این حالت kx) تحت تأثیر نیروهای ناپایستار (در اینجا $b\dot{x}$) هم باشد، آنگاه انرژی سامانه پایسته نمی‌ماند، یعنی $d(T + V)/dt \neq ۰$ و آهنگ تغییر انرژی کل سامانه، با آهنگ انجام کار نیروهای ناپایستار برابر است.

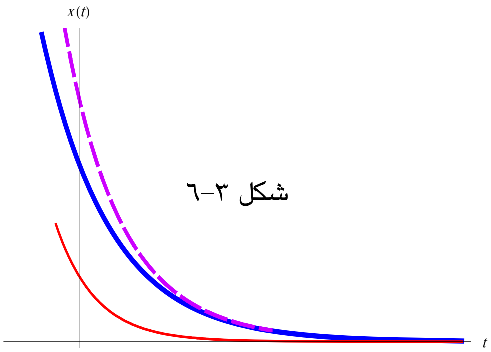
اگر $b < ۰$ باشد، نوسانگر به جای از دست دادن انرژی؛ انرژی به دست خواهد آورد. پس، فرض می‌کنیم که $b > ۰$ است و سه حالت را بررسی می‌کنیم:

۱-۳-۶ تند میرایی:

اگر b به اندازه‌ای بزرگ باشد که $\gamma > \omega$ باشد (یعنی داشته باشیم $\Omega^۲ > ۰$) آنگاه هر دو ریشه‌ی α حقیقی و منفی می‌شوند (چون $b > ۰$ است و $\gamma > \Omega \equiv \sqrt{\gamma^۲ - \omega^۲}$) و معادله‌ی (۲٤-٦) به صورت زیر درمی‌آید .

$$x(t)=Ae^{-(\gamma-\Omega)t}+Be^{-(\gamma+\Omega)t} \qquad (٦-٢٨)$$

که در آن A و B دو ثابت دلخواه اند. می‌بینیم که جابه‌جایی x به طور نمایی به صفر میل می‌کند و حرکت نوسانی **نیست** . برای زمان های طولانی، جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (٦-٢٨) سریع‌تر از جمله‌ی نخست به صفر میل می‌کند. در نتیجه، جمله‌ی برجسته مربوط به ریشه‌ی کوچکتر ($\alpha_- \equiv \gamma-\Omega$) است و حرکت به صورت $e^{-(\gamma-\Omega)t}$ فروافت می کند. این رفتار در شکل (٦-٣) نشان داده شده است. خم کلفت(آبی) جمله‌ی نخست ($e^{-(\gamma-\Omega)t}$) رابطه‌ی (٦-٢٨) است. خم نازک (قرمز) نماینده‌ی جمله‌ی دوم ($e^{-(\gamma+\Omega)t}$) و خم نقطه چین (بنفش) جمع آنهاست. همان گونه که از شکل پیداست خم مربوط به مجموع دو جمله خیلی زود به خم جمله‌ی اول می‌گراید و خم مربوط به جمله‌ی دوم سریع به صفر میل می‌کند. زمان سرشتی که جابه‌جایی x در آن مدت $1/e$ می‌شود عبارت است از $1/\alpha_-$.



شکل ٦-٣

٦-٣-٢ کند میرایی

حالتی را در نظر بگیرید که $\gamma<\omega$ یا $\Omega^2<0$ باشد. در این صورت ریشه‌های α موهومی و مزدوج مختلط یکدیگر می‌شوند: $\alpha=-\gamma\pm i\,\omega'$. در این جا $\omega'\equiv\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$ تعریف شده است. برای این حالت معادله‌ی (٦-٢٤) به صورت زیر درمی‌آید

$$x(t)=e^{-\gamma t}(Ae^{i\omega' t}+Be^{-i\omega' t}) \qquad (٦-٢٩)$$

حالا عبارت داخل پرانتز رفتاری نوسانی دارد زیرا مـی‌تـوانیم آن را بـا اسـتفاده از قاعـده‌ی $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ برحسب توابع مثلثاتی، سینوس و کسینوس، بنویسیم. پس، رابطه‌ی (٦-٢٩) به صورت زیر در می‌آید و نشان می‌دهد که حرکت نوسـانی با بسامد ω' است.

$$x(t)=e^{-\gamma t}D\cos(\omega' t+\phi) \qquad (٦-٣٠)$$

توجه کنید که ثابت‌های D و ϕ در رابطه‌ی (٦-٣٠) به ثابت‌های A و B در رابطه‌ی (٦-٢٩) مربوط‌اند و می‌توان به سادگی نشان داد $A+B=D\cos\phi$ و $A-B=i\,D\sin\phi$ اند. چون $x(t)$ یک کمیت اندازه پذیر فیزیکی است یعنی مقدار جابه‌جایی از نقطه‌ی ترازمندی است، باید مقداری حقیقی باشد. بنابراین، D حقیقی است و این لازم می‌دارد که $A^*=B$ باشد. این حرکت نوسانی است و دامنه‌ی آن $D\,e^{-\gamma t}$ است. به خاطر $e^{-\gamma t}$ دامنه با زمان به طور نمایی کاهش می‌یابد و سرانجام برای t های بزرگ به صفر می‌گراید. این رفتار در شکل ٦-٤ نشان داده شده است.

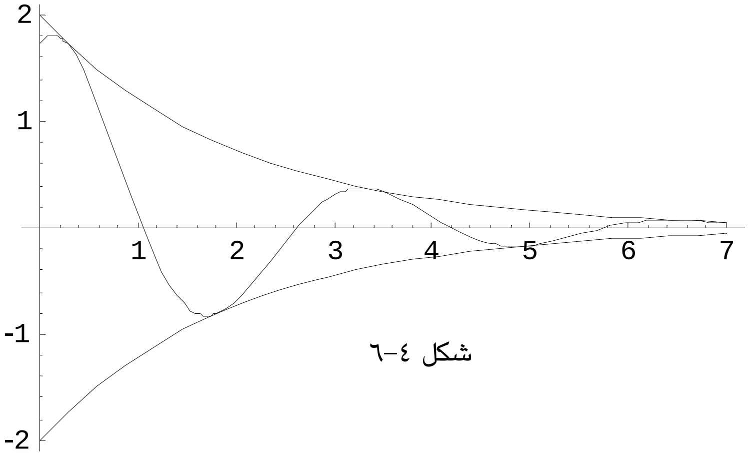
توجه کنید که ω' همواره از بسامد نوسانگر نامیرا $\omega=\sqrt{k/m}$ کوچکتر است. زمان لازم برای این که دامنه به اندازه‌ی $1/e$ مقدار بیشینه کاهش پیدا کند، **زمان و اهلش** نوسانگر نام دارد و برابر است با $1/\gamma=2m/b$. گاهی از کمیت دیگری به نام ضریب کیفیت یا ضریب " Q " نوسانگر استفاده می‌شود که عددی بدون بعد است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q=\frac{m\omega}{b}=\frac{\omega}{2\gamma} \qquad (٦-٣١)$$

هرچه میرایی کند باشد، Q بزرگتر است. در یک دوره نوسان، دامنه با ضریب $e^{2\pi\gamma/\omega'}$ کاهش می‌یابد. تعداد دوره ها در یک زمان واهلش تقریباً برابر Q/π است. کمیت ω' **بسامد طبیعی** سامانه نام دارد. ω' و ω با رابطه‌ی زیر به یکدیگر مربوط اند.

$$\omega'^{۲} = \omega^{۲} - \gamma^{۲} = \omega^{۲} - \frac{b^{۲}}{۴m^{۲}} \tag{۶-۳۲}$$

رابطه (۳۱-۶) نشان می‌دهد که نوسان در ناحیه‌ی بین دو خم $De^{-\gamma t}$ و $-De^{-\gamma t}$ قرار خواهد داشت.



شکل ۴-۶

اگر $\gamma \ll \omega$ باشد آنگاه $\omega' \approx \omega$ می‌شود و به تقریب دیگر میرایی هم نخواهیم داشت. هر گاه $\gamma \approx \omega$ باشد خواهیم داشت $\omega' \approx ۰$. این یعنی نوسان‌ها هم آهسته اند و در این صورت دشوار است که بگوییم آیا نوسان وجود دارد یا نه، چون در مقیاس زمانی $۱/\omega \approx ۱/\gamma$ (که در مقایسه با $۱/\omega'$ زمان کوتاهی است) از بین می‌رود. کوتاه آنکه، جنبه‌های اساسی حرکت به نسبت γ/ω' بستگی دارد. اگر $\gamma/\omega' \ll ۱$ باشد، $D\,e^{-\gamma t}$ در مدت زمان چندین نوسان خیلی کم کاهش می‌یابد. این گونه کُند-میرایی را میرایی سبک می‌نامند. اگر $\gamma/\omega' \gg ۱$ باشد، پس از چند نوسان $D\,e^{-\gamma t}$ به تُندی به صفر می‌گراید. این حالت میرایی را کندمیرایی سنگین می‌نامند.

۳-۳-۶ میرایی بحرانی

حالت حدی $\gamma = \omega$، حالت میرایی بحرانی است. در این حالت $\Omega^{۲} = ۰$ است و α دو ریشه‌ی یکسان دارد. بنابراین، پاسخ‌های (۲۹-۶) یا (۳۰-۶) تنها یک ثابت (A + B) خواهد داشت.

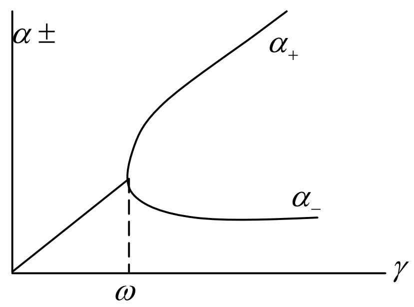
$$x(t) = \frac{۱}{۲}Ae^{-\gamma t} + \frac{۱}{۲}Be^{-\gamma t} = \frac{۱}{۲}(A+B)e^{-\gamma t} \tag{۶-۳۳}$$

روشن است که این پاسخ نمی‌تواند پاسخ عمومی معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی(۲۰-۶) ، باشد (معادله دیفرانسیل مرتبه دو باید دو پاسخ متمایز داشته باشد. ترکیب خطی آنها پاسخ عمومی است). پس باید به جستجوی پاسخ مستقل دوم باشیم. در این حالت خاص، $x = te^{-pt}$ پاسخ دوم است و درستی آن را با جایگزینی مستقیم در رابطه‌ی (۲۰-۶) می‌توان آزمود. پس، پاسخ عمومی عبارت است از:

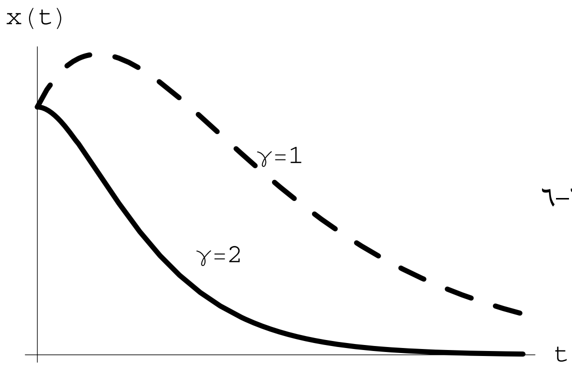
$$x(t) = (a + bt)e^{-\gamma t} \tag{۶-۳۴}$$

رابطه‌ی (۳۴-۶) حرکت میرایی بحرانی را توصیف می‌کند. روشن است که این پاسخ نماینده‌ی یک حرکت نوسانی نیست و جابه‌جایی به ازای زمان‌های طولانی به طور مجانبی به صفر می‌رسد. از میرایی بحرانی در بسیاری مواقع استقبال می‌شود. برای نمونه، در ابزار اندازه‌گیری، علاقمندیم نوسان عقربه حول مکان دقیق آن هرچه زودتر از میان برود. هنگامی که میرایی از

حالت بحرانی کمتر است ($\gamma < \omega$) زمان سرشتی واکنش ابزار همان زمان واهلش $1/\gamma$ است که البته با افزایش γ **کاهش** می‌یابد. هنگامی‌که $\gamma > \omega$ است حالت **تند میرایی** داریم و همانگونه که دیدیم زمان سرشتی $1/\alpha_-$ است و دشوار نیست که ببینیم با افزایش γ، با کاهش α_- روبرو خواهیم بود و در نتیجه زمان واکنش ابزار (زمانی که طول می‌کشد تا نوسان عقربه از میان برود) یعنی $1/\alpha_-$ **افزایش** می‌یابد. بنابراین، کوچکترین زمان واکنش با گزینه‌ی $\gamma = \omega$ به دست می‌آید که همانا میرایی بحرانی است. شکل (٥-٦) این رفتار را نشان می‌دهد. در شکل (٦-٦) رابطه‌ی (٣٤-٦) برای دو مقدار γ نشان داده شده است ($\gamma = 1$ و $\gamma = 2$) . برای $\gamma = 1$ می‌بینیم که در آغاز $x(t)$ از خود حرکت نوسانی نشان می‌دهد و به زودی این حرکت نوسانی ناپدید می‌شود و خم آن به طور نمایی کاهش پیدا می‌کند. برای $\gamma = 2$ به سختی می‌توان برای زمان‌های بسیار کوتاه اثری از وجود حرکت نوسانی را مشاهده کرد. برای γ های بزرگ نوسان به تندی از میان می رود.



شکل ٥-٦



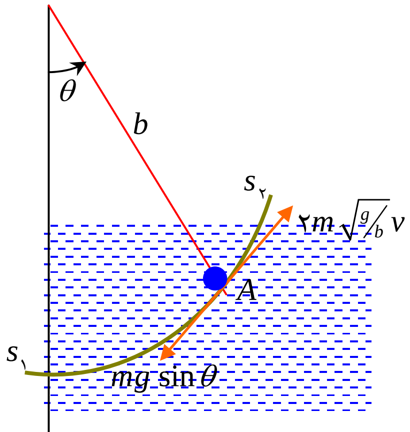
شکل ٦-٦

مثال۶-۶ آونگی را در نظر بگیرید که در آن جرم m از نقطه‌ی ثابتی با ریسمانی به طول b آویخته شده است (شکل٧-٦). وزنه‌ی m در درون محیطی گرانرو (مانند آب یا روغن) فرو رفته است. این محیط نیروی کند کننده را فراهم می‌کند که با سرعت متناسب است. ضریب تناسب برابر است با $2m\sqrt{g/b}$ و g شتاب گرانش است. در آغاز، جرم m از نقطه‌ای که با خط عمودی زاویه‌ی کوچک α می‌سازد، از حالت سکون رها می‌شود. سرعت و جابه‌جایی زاویه‌ای را در زمان t به دست آورید.

حل: در راستای حرکت (خم s_1s_2) به جرم m دو نیرو وارد می‌شود: (١) مؤلفه‌ی نیروی گرانی در راستای خم: $mg\sin\theta$ و (٢) نیروی بازدارنده‌ی محیط گرانرو $2m\sqrt{g/b}b\dot{\theta}$. در اینجا از مختصات θ استفاده می‌کنیم. اگر زاویه‌ی θ را برحسب رادیان در نظر بگیریم، طول کمان پیموده شده برای زاویه‌های کوچک θ برابر $s_1A = b\theta$ است. معادله‌ی حرکت بنا به قانون دوم نیوتون عبارت است از

$$mb\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - 2m\sqrt{g/b}b\dot{\theta} \qquad (٦-٣٥)$$

چون جابه‌جایی اولیه کوچک است ($\theta <<$) می‌توان از تقریب $\sin\theta \approx \theta$ استفاده کرد. با این تقریب معادله‌ی حرکت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم.



شکل۷-٦

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\theta - 2\dot{\theta}\sqrt{g/b} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{b}\theta + 2\sqrt{g/b}\,\dot{\theta} = 0 \qquad (٦-٣٦)$$

این همان معادله‌ی حرکت نوسان میرا (رابطه٢٠-٦) است که به جای متغیر x از θ استفاده شده است و به جای k ثابت mg/b نشسته است و $b \to 2m\sqrt{g/b}$ برای تعیین این که کدام یک از حالت های حرکت نوسانی در این سامانه روی می‌دهد، توجه کنید که در اینجا $\omega^2 = g/b = k/m$ است. در نتیجه داریم

$$\gamma^2 = \frac{b^2}{4m^2} = \frac{4m^2 g/b}{4m^2} = \frac{g}{b} = \omega^2 \qquad (٦-٣٧)$$

پس حرکت، میرایی بحرانی است و باتوجه به رابطه (٣٤-٦) پاسخ معادله‌ی حرکت

حرکت عبارت است از

$$\theta = (A + Bt)e^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\sqrt{g/b}\,t} \qquad (٦-٣٨)$$

ثابت‌های A و B را از شرایط اولیه‌ی مسئله می‌توان به دست آورد: در زمان $t = 0$ ذره با خط عمود زاویه‌ی α داشت و از حالت سکون رها شده بود در نتیجه: $\theta(t=0) = \alpha \quad , \quad \dot{\theta}(t=0) = 0$ پس،

$$\alpha = \theta(t=0) = A \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = Be^{-\gamma t} - \gamma(A + Bt)e^{-\gamma t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}(t=0) = 0 = B - \gamma\alpha \quad \Rightarrow \quad B = \gamma\alpha = \sqrt{g/b}\,\alpha \qquad (٦-٣٩)$$

و در نتیجه داریم

$$\theta = \alpha \; e^{-\sqrt{g/b}\,t}(1 + \sqrt{g/b}\,t) \qquad , \qquad \dot{\theta} = -\frac{g\,\alpha t}{b} \; e^{-\sqrt{g/b}\,t} \qquad (٦-٤٠)$$

باز هم می‌بینید که حرکت نوسانی نیست و به طور نمایی با زمان به حالت تعادلی خود برمی‌گردد.

فیزیک محاسباتی 1 نوسانگر میرا

نوسانگر میرای خطی را در نظر بگیرید که در آن جابجایی با سرعت متناسب است. معادله‌ی حرکت عبارت است از:

$$\ddot{X}[t] + \gamma \dot{X}[t] + \omega_0^2 X[t]$$

(الف): این معادله را با شرایط اولیه‌ی $X[t] = X_0$ و $\dot{X}[0] = v_0$ حل کنید.

(ب): پاسخ های حالت های کندمیرا، تندمیرا و میرایی بحرانی را رسم کنید.

(پ): نمودار فضای فاز را برای حالت کندمیرا بکشید.

(ت) : معادله‌ی حرکت مرتبه‌ی دوم نوسانگر میرا را برحسب دو معادله‌ی مرتبه اول

$$\dot{X}[t] = v[t] \quad , \quad \dot{v}_0[t] = -\gamma v[t] - \omega_0 X[t]$$

بیان کنید. برای حالت کندمیرا با گزینه‌های $\gamma = 0{,}1$ و $\omega_0 = 1$ از دستور PlotVectorField در بسته‌ی'Graphics 'PlotField پیکان‌های مماس بر مسیر را رسم کنید و سپس آن را با رسم به همراه مسیر نشان دهید.

(ج): از دستور تبدیل لاپلاس استفاده کنید و معادله‌ی میرایی را حل کنید.

مثال ۷-۶ (سرعت بیشینه) : جسمی را به یک فنر می‌بندیم واز مکان $x_\circ$ از حالت سکون رها می‌کنیم تا با بسامد ω نوسان کند. این آزمایش را در یک محیط مایع (مثلا در زیر آب) تکرار می‌کنیم. می‌بینیم، حرکت جسم تندمیرا (با ضریب میرایی γ) می‌شود. نسبت بیشینه سرعت دو حالت را بیابید. در حالت حدی $\gamma \ll \omega$ و برای حالت میرایی بحرانی این نسبت را حساب کنید.

حل: برای حالت اول که میرایی وجود ندارد و سامانه با بسامد طبیعی ω نوسان می‌کند، معادله‌ی حرکت عبارت است از $x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$. ثابت های C و ϕ را از شرایط اولیه به دست می‌آوریم: معادله‌ی سرعت عبارت است از: $v(t) = dx(t)/dt = -C\omega\sin(\omega t + \phi)$ واز شرط اولیه‌ی $v(\cdot) = \cdot$ به دست می‌آید: $v(\circ) = \circ - C\omega\sin\phi \;\Rightarrow\; \phi = \circ$.
شرط اولیه‌ی $x(\cdot) = x_\circ$ می‌گوید $C = x_\circ$. در نتیجه، برای این حالت داریم

$$x(t) = x_\circ\cos(\omega t) \quad , \quad v(t) = -\omega x_\circ\sin(\omega t) \tag{۶-۴۱}$$

بیشینه‌ی سرعت هنگامی است که $\sin(\omega t) = ۱$ باشد. پس، اندازه‌ی بیشینه سرعت برای این حالت $\omega x_\circ$ است. در حالت دوم وقتی نوسانگر در مایع قرار دارد، پاسخ با رابطه‌ی (۶-۲۸) داده شده است :

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-\Omega)t} + Be^{-(\gamma+\Omega)t}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A(\gamma-\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t} - B(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t} \tag{۶-۴۲}$$

ثابت‌های A و B با شرایط اولیه به دست می‌آیند: از شرط اولیه‌ی $x(t) = x_\circ$ داریم

$$x(\circ) = x_\circ \;\Rightarrow\; A + B = x_\circ$$

$$v(\circ) = \circ \;\Rightarrow\; -(\gamma-\Omega)A - (\gamma+\Omega)B = \circ \tag{۶-۴۳}$$

از حل هم‌زمان این دو معادله A و B به دست می‌آیند: $A = \frac{\gamma+\Omega}{2\Omega}x_\circ$ و $B = -\frac{\gamma-\Omega}{2\Omega}x_\circ$. پس

$$x(t) = \frac{x_\circ}{۲\Omega}[(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t} - (\gamma-\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}] \tag{۶-۴۴}$$

با مشتق گرفتن از این رابطه و با استفاده از $\gamma^2 - \Omega^2 = \omega^2$ ، معادله‌ی سرعت عبارت خواهد شد از

$$v(t) = -\frac{\omega^۲ x_\circ}{۲\Omega}[e^{-(\gamma-\Omega)t} - e^{-(\gamma+\Omega)t}] \tag{۶-۴۵}$$

یافتن بیشینه‌ی این سرعت آسان است. از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. بیشینه سرعت در زمان

$$t_{\max} = \frac{۱}{۲\Omega}\ell n\left(\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}\right) \tag{۶-۴۶}$$

پدید می‌آید. با جاگذاری این زمان در رابطه‌ی (۶-۴۵) داریم

$$v(t_{\max}) = -\frac{\omega^۲ x_\circ}{۲\Omega}\exp\left[-\frac{\gamma}{۲\Omega}\ln\left(\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}} - \sqrt{\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}}\right] = -\omega x_\circ\left(\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}\right)^{\gamma/۲\Omega} \tag{۶-۴۷}$$

حالا می‌توان نسبت ، R ، دو سرعت بیشینه‌ی خواسته شده را حساب کرد

$$R = \left(\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}\right)^{\gamma/۲\Omega} \tag{۶-۴۸}$$

در حالت حدی $\gamma \ll \omega$ داریم

$$\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2-\omega^2}=\gamma\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\gamma^2}}=\gamma\left(1-\frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}\approx\gamma\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\gamma^2}+\dots\right)=\gamma-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\gamma} \qquad (6\text{-}49)$$

و بنابراین، نسبت بیشینه سرعت‌ها ، رابطه‌ی (۴۸–۶) ، عبارت خواهد بود از

$$R=\left(\frac{\gamma+(\gamma-\omega^2/2\gamma)}{\gamma-(\gamma-\omega^2/2\gamma)}\right)^{\gamma/2(\gamma-\omega^2/\gamma)}\approx\left(\frac{2\gamma}{\omega^2/2\gamma}\right)^{1/2}=\frac{2\gamma}{\omega} \qquad (6\text{-}50)$$

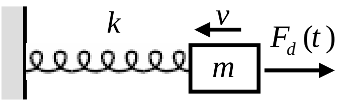
توجه کنید که در صورت کسر اول و نیز در مخرج ، از $\omega^2/2\gamma$ در مقایسه با γ چشم پوشی کردیم.

در حالت میرایی بحرانی ($\gamma\approx\omega$ و $\Omega\approx 0$)، اگر برای سادگی تعریف کنیم $\Omega/\gamma\equiv\varepsilon$. می‌توانیم رابطه‌ی (۴۸–۶) را به صورت زیر بنویسیم:

$$R=\left(\frac{1+\Omega/\gamma}{1-\Omega/\gamma}\right)^{\gamma/2\Omega}=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2\varepsilon}=\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{1/2\varepsilon}\approx(1+2\varepsilon)^{1/2\varepsilon}\approx e \qquad (6\text{-}51)$$

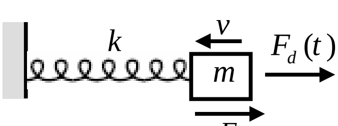
با اندک محاسبه‌ی جبری مانند بالا می‌توان نشان داد که در این دو حالت حدی $t_{\max}$ به ترتیب عبارتند از $\ell n(2\gamma/\omega)/\gamma$ و $1/\gamma\approx 1/\omega$.

۴–۶ حرکت نوسانی واداشته و میرا



شکل ۸–۶

نخست نوسانگر ساده‌ی بدون نیروی میراننده را در نظر بگیرید که به آن نیروی وابسته به زمان $F_d(t)$ اعمال می‌شود. مانند جرمی که به انتهای فنری بسته شده است و به جرم یک نیروی جنباننده‌ی دوره‌ای (وابسته به زمان) وارد می‌شود: $F_d(t)=F_\circ\cos(\omega_\circ t)$. در شکل (۸–۶)یک چنین سامانه‌ای نشان داده شده است. بنابراین، معادله‌ی حرکت این سامانه بنا به $F=ma$ عبارت است از $m\ddot{x}=-kx+F_\circ\cos(\omega_\circ t)$. نیروی $F_d(t)$ نیروی وادارنده است و حرکت اینک نوسانی واداشته است. $F_\circ$ دامنه‌ی نیروی وادارنده نام دارد و $\omega_\circ$ بسامد وادارنده است. به سامانه‌ی ما افزون بر نیروی وادارنده، ممکن است نیروی میراننده ، مانند نیروی پسار هوا، هم وارد شود. در این صورت معادله‌ی حرکت اندکی پیچیده‌تر می‌شود اما در شیوه‌ی حل مسئله که در زیر به آن می‌پردازیم تاثیر چندانی ندارد. در این صورت، حرکت شبیه حرکت نوسانگر میرا می‌شود که به آن نیروی وادارنده نیز اعمال می‌شود و از این رو آن را *حرکت واداشته میرا* خواهیم نامید. در شکل (۹– ۶) افزون بر نیروی وادارنده، نیروی میراننده (پسار) با F_f نشان داده شده است. بنابراین، بگذارید در این حالت به مسئله عمومی‌تر نگاه کنیم. در اینجا روشن است که برای نیروی وادارنده، قانون نیروی خاصی را به صورت $F_\circ\cos(\omega_\circ t)$ برگزیدیم. این یک نیروی دوره‌ای در زمان است. در حالت عمومی‌تر می‌توان آن را به صورت نمایی، $F_\circ e^{i\omega_\circ t}$، نوشت. درست است که این یک تابع مختلط



شکل ۹–۶

است و نیرو کمیت اندازه پذیر و در نتیجه یک مقدار حقیقی است. اما این شکل عمومیت دارد. بخش حقیقی و یا بخش موهومی آن، هر دو، کمیت‌های حقیقی‌اند و نیروهای از نوع سینوس و کسینوس را به دست می‌دهد. افزون براین، هر نیروی دوره‌ای را می‌توان به صورت جمع توابع سینوسی و کسینوسی، یا به طور کلی به شکل جمعی از جمله‌های نمایی نوشت. این اساس قضیه‌ی فوریه است. بنابراین، فهمیدن واکنش سامانه به این قانون نیرو، زیرساخت یافتن واکنش سامانه به هر نیروی دوره‌ای

است.

از شکل (۹-٦) دیده می‌شود که به جرم m سه نیرو وارد می‌شود: نیروی فنر $-kx$ ، نیروی پسار $-bv$ و نیروی وادارنده $F_\circ e^{i\omega_\circ t}$. برآیند این نیروها نشان می‌دهد که به جرم m نیرویی به صورت $F(x,\dot{x},t)$ وارد می‌شود که جمع هر سه است: $F(x,\dot{x},t)=-b\dot{x}-kx+F_0e^{i\omega_0 t}$. معادله‌ی حرکت سامانه عبارت است از

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}-kx+F_\circ e^{i\omega_\circ t}\quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2=C_\circ e^{i\omega_\circ t}\qquad (٦-٥٢)$$

که در آن γ، ω و $C_\circ$ کمیت‌های داده شده اند. این یک معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن است. ناهمگن به این معنی است که سمت راست آن دیگر صفر نیست. چگونه می‌توان این معادله را حل کرد؟ این معادله در شکل کنونی‌اش خیلی فیزیکی به نظر نمی‌آید؛ چون یک جمله‌ی مختلط دارد. همان‌گونه که گفتم می‌توان جمله‌ی سمت راست را با $F_\circ\cos(\omega_\circ t)$ جایگزین کرد. اما در اینجا ما نگران فیزیکی بودن آن نیستیم. در مثال ٧-٦ این جایگزینی را انجام خواهیم داد. سرو کله‌ی معادله‌های از نوع (٥٢-٦) به فراوانی در فیزیک ظاهر می‌شود و بهتر است یک بار برای همیشه حل آنها را ببینیم.

در این جا هم از روش پاسخ آزمون استفاده می‌کنیم. پاسخی را حدس می‌زنیم و آن را به همراه مشتق‌هایش در معادله‌ی دیفرانسیل (٥٢-٦) جا گذاری می‌کنیم تا ببینیم با چه شرایطی در معادله صدق می‌کند. چون در سمت راست رابطه‌ی (٥٢-٦) جمله‌ای به صورت $e^{i\omega_0 t}$ داریم پس، پاسخ را به صورت $x(t)=Ae^{i\omega_0 t}$ برمی‌گزینیم. ضریب A به $\omega_\circ$ بستگی خواهد داشت و ما آن را به زودی خواهیم دید.

اگر از $x(t)=Ae^{i\omega_0 t}$ مشتق بگیریم و $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ را به دست آوریم و در رابطه‌ی (٥٢-٦) جاگذاری و از دو طرف ضریب غیر صفر $e^{i\omega_0 t}$ را حذف کنیم، خواهیم داشت

$$(-\omega_\circ^2)A+2\gamma(i\,\omega_\circ)A+\omega^2A=C_\circ\qquad (٦-٥٣)$$

از این جا می‌توانیم A را برحسب بقیه‌ی کمیت های داده شده به دست آورد. داریم

$$A=\frac{C_\circ}{-\omega_\circ^2+2i\,\gamma\omega_\circ+\omega^2}\qquad (٦-٥٤)$$

بنابراین، پاسخ معادله‌ی (٥٢-٦) عبارت است از

$$x(t)=\left(\frac{C_\circ}{-\omega_\circ^2+2i\,\gamma\omega_\circ+\omega^2}\right)e^{i\omega_\circ t}\qquad (٦-٥٥)$$

توجه کنید که در رابطه‌ی (٥٥-٦) هیچ *پارامتر آزادی* وجود ندارد که برای یافتن آنها به شرایط اولیه نیاز داشته باشیم. ما یک پاسخ **خاص** یافته‌ایم .

حالا که آزاد نیستیم تا پارامترهای رابطه‌ی (٥٥-٦) را تغییر بدهیم، چگونه می‌توان شرایط اولیه‌ی مسئله را که دلخواه اند، راضی کرد؟ پاسخ این پرسش نگران کننده این است که رابطه‌ی (٥٥-٦) عمومی ترین پلسخ معادله‌ی دیفرانسیل (٥٢-٦) نیست. یادتان می‌آید که هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو باید دو پاسخ داشته باشد و دو پارامتر هم دارد که ثابت‌های انتگرال‌گیری اند؟ عمومی‌ترین پاسخ معادله‌ی (٥٢-٦) عبارت است از پاسخ (٥٥-٦) بعلاوه‌ی پاسخ" معادله‌ی دیفرانسیل همگن"، یعنی رابطه‌ی (٦-٦). رابطه‌ی (٦-٦) پاسخ معادله‌ی (٥٢-٦) اما بدون سمت راست آن است (با $a\to\omega^2$). بنابراین، جمع دو پاسخ (٦-٦) و (٥٥-٦) به یقین پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل ما، معادله‌ی (٥٢-٦) است؛ چون ما پاسخ (٦-٦) را به ویژه چنان به دست آورده‌ایم که اگر در سمت چپ معادله‌ی (٥٢-٦) جاگذاری کنیم، سمت چپ آن صفر می‌شود. بنابراین، افزودن آن به پاسخ خاص تساوی را در معادله‌ی (٥٥-٦) برهم نمی‌زند؛ چون سمت چپ خطی است و اصل برنهش هم به دادمان رسید. پس ، پاسخ

عمومی معادله‌ی (۵۲-۶) عبارت است از

$$x(t)=e^{-\gamma t}\,(Ae^{t\sqrt{\gamma^{2}-\omega^{2}}}+Be^{-t\sqrt{\gamma^{2}-\omega^{2}}})+\left(\frac{C_{0}}{-\omega_{0}^{2}+2i\,\gamma\omega_{0}+\omega^{2}}\right)e^{i\,\omega_{0}t} \qquad (۶-۵۶)$$

حالا A و B با شرایط اولیه‌ی مسئله تعیین می‌شوند.

با توجه به اصل برنهش، اینک روشن است که اگر معادله‌ی دیفرانسیل ما اندکی متفاوت می‌بود و بیش از یک جمله در سمت راست خود می‌داشت، مانند

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^{2}=C_{1}e^{i\,\omega_{1}t}+C_{2}e^{i\,\omega_{2}t} \qquad (۶-۵۷)$$

راه‌کار حل آن چگونه می‌تواند باشد: نخست معادله را فقط با جمله‌ی اول سمت راست حل می‌کنیم. سپس معادله را فقط با جمله‌ی دوم سمت راست حل می‌کنیم. این دو پاسخ را با هم جمع می‌کنیم و پاسخ معادله‌ی همگن، یعنی رابطه‌ی (۶-۶) را بر آنها می‌افزاییم تا پاسخ عمومی معادله‌ی (۵۷-۶) به دست آید. این کار را به این خاطر می‌توان انجام داد که سمت چپ معادله‌ی (۵۷-۶) خطی است واز اصل برنهی می‌توان استفاده کرد. سرانجام این که اگر چندین جمله در سمت راست داشته باشیم ، مانند

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^{2}=\sum_{n}C_{n}e^{i\,\omega_{n}t} \qquad (۶-۵۸)$$

باید n معادله را حل کنیم، هر بار فقط با یکی از n جمله‌ی سمت راست. سپس پاسخ‌ها را باهم جمع کنیم و سرانجام پاسخ معادله‌ی همگن، رابطه‌ی (۶-۶)، را هم به آنها اضافه کنیم. اگر تعداد جمله‌های سمت راست بینهایت باشد، ایرادی ندارد این بهترین حالت کاربرد اصل برنهی است. باید بینهایت جمله را با هم جمع کنیم.

نکته: آنچه که در بالا آمد به همراه نتیجه‌ی بنیادی تحلیل فوریه، اجازه می‌دهد تا بتوانیم هر معادله‌ی دیفرانسیل از نوع

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^{2}=f(t) \qquad (۶-۵۹)$$

را (دستکم، در بنیاد) حل کنیم.

بر اساس تحلیل فوریه هر تابع $f(t)$ خوش رفتاری را می‌توان به مولفه‌های فوریه‌ی آن تجزیه کرد و نوشت

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)e^{i\,\omega t}d\,\omega \qquad (۶-۶۰)$$

در این جمع پیوسته (یعنی انتگرال) $g(\omega)d\,\omega$ به جای C_n در رابطه‌ی (۵۸-۶) نشسته است. بنابراین، اگر در سمت راست (۵۹-۶)، تابع $f(t)$ نماینده‌ی فقط یک جمله باشد (یعنی یک جمله از نوع $e^{i\,\omega t}$) و پاسخ آن را با $x(t)=S_{\omega}(t)$ نشان بدهیم ($S_{\omega}(t)$ همان پاسخ (۵۵-۶) است بدون ضریب C_{0})، آنگاه بنابه اصل برنهی پاسخ کامل معادله‌ی (۵۹-۶) عبارت است از

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)S_{\omega}(t)d\,\omega \qquad (۶-۶۱)$$

یافتن ضریب $g(\omega)$ دشوارترین یا پیچیده ترین بخش این تحلیل است، ما به آن نخواهیم پرداخت ولی دانستن این که می‌توان هر معادله‌ای از نوع (۵۹-۶) را حل کرد خوب است. ♣

مثال ۸-۶ (سامانه‌ی واداشته‌ی میرا): فنری با ثابت k را در نظر بگیرید. جرم m برابر شکل (۹-۶) به انتهای آن بسته شده است. نیروی پسار متناسب با سرعت $F_f=-bv$ به آن وارد می‌شود. افزون براین، نیروی وادارنده‌ی $F_d(t)=F_d\cos\omega_d t$ به جرم اثر می‌کند. مکان جرم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

حل: نیروی کل وارد به جرم $F(x,\dot{x},t)=-b\dot{x}-kx+F_d\cos\omega_d t$ است . از $F=ma$ داریم

$$\ddot{x}+۲\gamma\dot{x}+\omega^۲x=F\cos\omega_d t=\frac{F}{۲}(e^{i\omega_d t}+e^{-i\omega_d t}) \qquad (۶-۶۲)$$

که در آن $۲\gamma\equiv b/m$، $\omega^۲\equiv k/m$ و $F\equiv F_d/m$ اند. توجه کنید که در اینجا دو بسامد ω و ω_d وجود دارند که لزوما به هم دیگر مربوط نیستند. رابطه‌ی (۶-۵۵) به همراه اصل برنهی می‌گویند که پاسخ خاص معادله‌ی (۶-۶۲) عبارت است از

$$x_p(t)=\left(\frac{F/۲}{-\omega_d^۲+۲i\gamma\omega_d+\omega^۲}\right)e^{i\omega_d dt}+\left(\frac{F/۲}{-\omega_d^۲-۲i\gamma\omega_d+\omega^۲}\right)e^{-i\omega_d dt} \qquad (۶-۶۳)$$

بنابراین، پاسخ عمومی عبارت است از جمع این پاسخ با پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل همگن که در رابطه‌ی (۶-۲۹) داده شده است. در رابطه‌ی (۶-۶۳) وجود i ها آن را موهومی نشان می‌دهد و این خوب نیست زیرا x مکان است و در نتیجه باید یک کمیت حقیقی باشد. می‌توانیم i ها را از رابطه‌ی بالا حذف کنیم. برای این کار صورت و مخرج هر یک از جمله‌ها را در مزدوج مختلط مخرج ضرب کنید و از قاعده‌ی $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ استفاده کنید. پس از اندکی عملیات جبری خواهیم داشت

$$x_p(t)=\left(\frac{F(\omega^۲-\omega_d^۲)}{(\omega^۲-\omega_d^۲)^۲+۴\gamma^۲\omega_d^۲}\right)\cos\omega_d t+\left(\frac{۲F\gamma\omega_d}{(\omega^۲-\omega_d^۲)^۲+۴\gamma^۲\omega_d^۲}\right)\sin\omega_d t \qquad (۶-۶۴)$$

نکته: می‌توانستیم پاسخ معادله‌ی (۶-۶۲) را با انتخاب قسمت حقیقی پاسخ معادله‌ی (۶-۵۲) یعنی با پاسخ (۶-۵۵) هم به دست آوریم . البته با جاگذاری‌های $a\to\omega^۲$ و $C_\circ\to F$. این کار شدنی است زیرا اگر قسمت حقیقی معادله‌ی (۶-۵۲) را نگاه کنیم داریم:

$$\frac{d^۲}{dt^۲}\big(\mathrm{Re}(x)\big)+۲\Omega\frac{d}{dt}\big(\mathrm{Re}(x)\big)+\omega^۲\big(\mathrm{Re}(x)\big)=\mathrm{Re}\Big(Fe^{i\omega_\circ t}\Big)=F\cos(\omega_\circ t) \qquad (۶-۶۵)$$

به بیان دیگر، اگر $x(t)$ در معادله‌ی (۶-۵۲) با طرف دوم به صورت $Fe^{i\omega_0 t}$ صدق کند، آنگاه قسمت حقیقی $x(t)$ یعنی $\mathrm{Re}(x)$ در همان معادله با طرف دوم $F\cos\omega_\circ t$ صدق می‌کند. بنابراین، روشن است که قسمت حقیقی پاسخ (۶-۵۵) به نتیجه‌ی (۶-۶۴) می‌انجامد.

اگر دوست ندارید از اعداد مختلط استفاده کنید، هنوز راه دیگری برای حل معادله‌ی (۶-۶۲) با طرف دوم به صورت $\cos\omega_d t$ وجود دارد. کافی است پاسخ آزمونی به صورت $A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t$ برگزینید و آن را در معادله قرار دهید و سپس A و B را به دست آورید. باز هم به پاسخ (۶-۶۴) می‌رسید. جزییات آن را به مسئله ها واگذار می کنیم. ♣

پاسخ (۶-۶۴) را می‌توان ساده‌تر نوشت. کافی است کمیت R را به صورت زیر تعریف کرد

$$R\equiv\sqrt{(\omega^۲-\omega_d^۲)^۲+(۲\gamma\omega_d)^۲} \qquad (۶-۶۶)$$

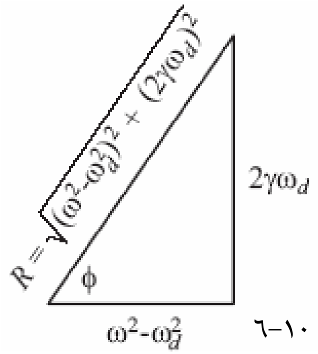
حالا پاسخ خاص معادله‌ی (۶-۶۲) یعنی رابطه‌ی (۶-۶۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_p(t)=\frac{F}{R}\left(\frac{(\omega^۲-\omega_d^۲)}{R}\cos\omega_d t+\frac{۲\gamma\omega_d}{R}\sin\omega_d t\right)\equiv\frac{F}{R}\cos(\omega_d t-\phi) \qquad (۶-۶۷)$$

فاز ϕ با رابطه‌های زیر داده شده است

$$\cos\phi=\frac{\omega^۲-\omega_d^۲}{R},\quad \sin\phi=\frac{۲\gamma\omega_d}{R}\ \Rightarrow\ \tan\phi=\frac{۲\gamma\omega_d}{\omega^۲-\omega_d^۲} \qquad (۴-۶۸)$$

مثلثی که زاویه‌ی ϕ را توصیف می کند در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده است. توجه کنید که $۰\le\phi<\pi$ ، چون در رابطه‌ی (۶-۶۸) $\sin\phi$ بزرگتر یا مساوی صفر است. معادله‌ی (۶-۶۷) پاسخ خاص معادله‌ی دیفرانسیل (۶-۶۲) است و برای این که پاسخ عمومی را بیابیم، همان‌گونه که به آن اشاره کردیم باید پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل همگن را نیز که در رابطه‌ی (۶-۲۴)



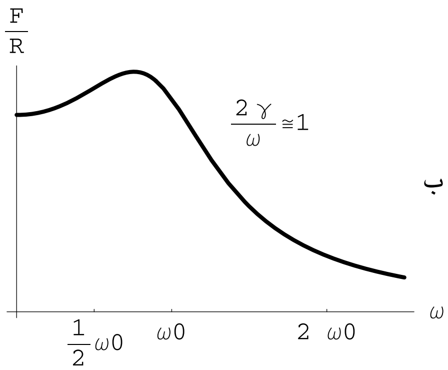
شکل ۱۰-٦

داده شده است به پاسخ (٦٧-٦) اضافه کنیم. پس ، سرانجام برای پاسخ کامل خواهیم داشت:

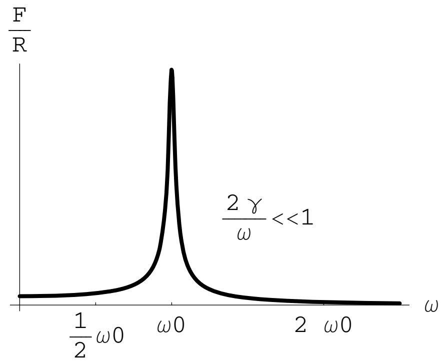
$$x(t)=\frac{F}{R}\cos(\omega_d t-\phi)+e^{-\gamma t}\left(Ae^{\Omega t}+Be^{-\Omega t}\right) \qquad (٦٩-٦)$$

A و B را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. توجه کنید که اگر در سامانه میرایی وجود نداشته باشد (یعنی $\gamma>0$) پاسخ قسمت همگن (جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (٦٩-٦)) به ازای زمان‌های بزرگ به صفر می‌گراید و تنها پاسخ خاص باقی می‌ماند. به بیان دیگر، سامانه به یک $x(t)$ مشخص میل می‌کند که مستقل از شرایط اولیه است.

دامنه‌ی F/R و فاز ϕ هر دو تابعی از ω_d اند. رفتار آنها به $2\gamma/\omega$ بستگی دارد. این رفتار برای F/R در شکل (١١-٦) نشان داده شده است. برای میرایی سبک، دامنه‌ی F/R در $\omega_d=\omega$ بیشینه است. در این حالت حدیِ **تشدید** دامنه $F/2\gamma\omega$ است .



شکل ١١-٦ ب



شکل ١١-٦ الف

با $\gamma\to 0$ دامنه به $F/2\gamma\omega\to\infty$ میل می کند؛ چیزی که برای نوسانگر نامیرا انتظار داریم.

١-٥-٦ تشدید

دامنه‌ی حرکت با $1/R$ متناسب است. برای ω_d و γ داده شده بیشینه‌ی آن در $\omega=\omega_d$ است. برای ω و γ بیشینه‌ی آن در $\omega_d=\sqrt{\omega^2-2\gamma^2}$ است (برای به دست آوردن این مقدار به ازای ω و γ از R مشتق بگیرید و کمینه‌ی آن را بیابید.) در حالت میرایی سبک، یعنی برای $\gamma\ll\omega$ این مقدار به $\omega\approx\omega_d$ کاهش می‌یابد. واژه‌ی تشدید برای توصیف حالتی به کار می‌رود که دامنه بیشترین مقدار ممکن خود را دارد. به طور شهودی هم می‌توان پذیرفت که این حالت (تشدید) هنگامی روی بدهد که بسامد وادارنده و بسامد فنر باهم برابر باشند. اما فاز، ϕ ، حرکت در حالت تشدید چقدر است؟ با استفاده از رابطه‌ی (٦٨-٦) می‌بینیم که وقتی $\omega\approx\omega_d$ است $\tan\phi\approx\pm\infty$ می‌شود. پس در حالت تشدید داریم $\phi=\pi/2$ (توجه بکنید که این مقدار $\pi/2$ است و نه $-\pi/2$ ؛ چون $\sin\phi$ مثبت است.) و حرکت ذره با ضریبی از دوره‌ی نوسان نیروی وادارنده عقب است. برای نمونه، اگر جرم چسبیده به فنر به سمت راست حرکت کند و از مبداء بگذرد (یعنی هنوز باید ١/٤ چرخه‌ی نوسان را بپیماید تا به بیشینه‌ی مسافت x برسد) نیرو در بیشینه‌ی خودش قرار دارد و هنگامی که ذره به بیشینه‌ی جابه‌جایی خود می‌رسد نیرو به صفر رسیده است.

از نگاه انرژی هم می‌توان دریافت که وقتی نیرو بیشینه است که جرم بیشترین سرعت را دارد. اگر بخواهیم دامنه بزرگتر بشود باید به سامانه تا جایی که می‌توانیم انرژی بدهیم. برای این کار باید بر روی سامانه کار انجام دهیم. یعنی تا جایی که بتوانیم

بر روی سامانه کار انجام می‌دهیم. برای این که بیشینه کار ممکن را روی سامانه انجام دهیم باید نیرو تا مسافت بزرگتری به سامانه اعمال شود و این یعنی نیرو را باید هنگامی به سامانه اعمال کنیم که جرم بیشترین سرعت خود را داشته باشد (وقتی که جرم از مبداء می‌گذرد و سرعت می‌گیرد). کوتاه آنکه، سرعت v مشتق مسافت x است و بنابراین به اندازه‌ی ۱/٤ چرخه‌ی نوسان از x جلوتر است. چون در حالت تشدید می‌خواهیم نیرو و سرعت هم فاز باشند، پس باید نیرو نیز به اندازه‌ی ۱/٤ چرخه‌ی نوسان از x جلوتر باشد.

۲-۵-۶ فاز ϕ

فاز حرکت با رابطه‌ی (٦-٦٨) به صورت زیر داده شده است

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_d}{\omega^2 - \omega_d^2} \qquad (٦-٧٠)$$

اینک می خواهیم برای چند مقدار ω_d بینیم فاز ϕ چه مقدارهایی را می‌پذیرد.

- اگر $\omega_d \approx 0$ (یا دقیق تر $\omega_d \ll \omega$) باشد، آنگاه $\phi \approx 0$ می‌شود، یعنی حرکت و نیرو هم فازند. فهمیدن ریاضی این رفتارساده است. برای $\omega_d \approx 0$ هر دوی $\ddot{x}$ و $\dot{x}$ کوچک اند (چون آنها به ترتیب با ω_d^2 و ω_d متناسب اند). پس در رابطه‌ی (٦-٦٢) دو جمله‌ی نخست قابل چشم پوشی‌اند و داریم $x \propto \cos\omega_d t$. یعنی فاز حرکت صفر است. دلیل فیزیکی‌اش این است که چون حرکت اساسا شتاب ندارد، نیروهای برآیند صفر است. این بدان معنی است که نیروی وادارنده و نیروی فنر یکدیگر را حذف می‌کنند (یعنی این دو نیرو به اندازه ی 180°با هم اختلاف فاز دارند) و البته نیروی میراننده هم وجود دارد اما قابل چشم پوشی است زیرا با سرعت متناسب است و داریم $\dot{x} \approx 0$. اما نیروی فنر هم به اندازه‌ی 180° با حرکت اختلاف فاز دارد (به خاطر علامت منفی در $F = -kx$) بنابراین، نیروی وادارنده با حرکت هم فاز می‌شود.
- اگر $\omega_d \approx \omega$ باشد، آنگاه $\tan\phi \approx \pi/2$ می‌شود که حالت تشدید است و در بالا به آن پرداختیم.
- اگر $\omega_d \approx \infty$ باشد، (دقیق تر $\omega_d \gg \omega$) آنگاه $\phi \approx \pi$ می‌شود. دلیل ریاضی آن، این است که اگر $\omega_d \approx \infty$ باشد، جمله‌ی $\ddot{x}$ در معادله‌ی (٦-٦٢) بر جمله‌های دیگر چیره می‌شود. در نتیجه، داریم $\ddot{x} \propto \cos\omega_d t$. پس، $\ddot{x}$ با نیرو هم فاز است. اما x و $\ddot{x}$ به هم 180° اختلاف فاز دارند. این سبب می‌شود که x و نیرو به اندازه‌ی 180° اختلاف فاز پیدا کنند. دلیل فیزیکی: اگر $\omega_d \approx \infty$ باشد، آنگاه جرم چسبیده به فنر به سختی حرکت می‌کند؛ چون از رابطه‌ی (٦-٦٧) می‌دانیم که دامنه با $1/R$ و بنابراین، با $1/\omega_d^2$ متناسب است. این دامنه می‌گوید که سرعت با $1/\omega_d$ متناسب است. پس، هر دوی x و v همواره کوچک اند. اما اگر x و v هر دو همواره کوچک باشند می‌توان از نیروی فنر که با x متناسب است چسم‌پوشی کنیم. هم‌چنین می‌توان از نیروی میراننده که با v متناسب است چشم‌پوشی کرد. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از جرمی که به آن تنها نیروی وادارنده اعمال می‌شود. البته رفتار ذره‌ای را که تنها تحت اثر نیروی نوسانی حرکت می‌کند، می شناسیم: جرم متصل به فنر. جرمی را که در این حالت به فنر بسته‌ایم نمی تواند بگوید که آیا تحت اثر نیروی وادارنده‌ی نوسانی حرکت می‌کند یا به وسیله‌ی نیروی فنر پس و پیش می‌شود. برای جرم هر دو یکی است. پس، باید در هر دو صورت فاز حرکت یکسان باشد. اما در مسئله‌ی ما علامت منفی در $F = -kx$ می‌گوید که نیرو به اندازه‌ی 180° با حرکت اختلاف فاز دارد. پس، برای $\omega_d \approx \infty$ نیز نتیجه همان است.

۶-۶ نوسانگرهای جفت شده

تاکنون در بخش‌های پیش ، تنها با یک تابع وابسته به زمان، $x(t)$، سروکار داشتیم. اگر دو تابع وابسته به زمان، $x(t)$ و $y(t)$ داشته باشیم که به وسیله‌ی دو معادله ی دیفرانسیل "جفت شده" به هم مربوط باشند چه کنیم؟ معادله‌های دیفرانسیل زیر را برای نمونه در نظر بگیرید

$$2\ddot{x}+\omega^2(5x-3y)=0 \qquad , \qquad 2\ddot{y}+\omega^2(5y-3x)=0 \tag{۶-۷۱}$$

به این گونه معادله‌ها می گوییم معادله های دیفرانسیل جفت شده، چون x و y در هردوی آنها وجود دارند و چندان روشن نیست که چگونه می‌توان آنها را از هم جدا کرد و x و y را به دست آورد. در حال حاضر کاری نداریم که این گونه معادله‌ها از کجا می‌آیند. به زودی با وضعیت‌های فیزیکی که به این گونه معادله‌های جفت شده می‌انجامند روبرو خواهیم شد. نخست می‌خواهیم شیوه‌ی حل آن ها را بیاموزیم، یعنی $x(t)$ و $y(t)$ را چنان بیابیم که در رابطه‌ی (۶-۷۱) صدق کنند. دستکم دو شیوه برای حل معادله‌های دیفرانسیل جفت شده وجود دارد. بگذارید آن‌ها را ببینیم

روش ۱: گاهی می‌توان ترکیب‌های خطی از معادله‌های داده شده را یافت که زیبا و آشنا هستند. معادله‌های رابطه‌ی (۶-۷۱) این ویژگی را دارند. اگر آن ها را باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$(\ddot{x}+\ddot{y})+\omega^2(x+y)=0 \tag{۶-۷۲}$$

خب! در این رابطه می‌بینیم که x و y تنها به صورت جمع مختصات ظاهر شده‌اند. اگر تغییر متغیری به صورت $z\equiv x+y$ تعریف کنیم آنگاه رابطه‌ی (۶-۷۲) به معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده و آشنای $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ تبدیل می‌شود که پاسخش را می‌شناسیم

$$x+y=A_1\cos(\omega t+\phi_1) \tag{۶-۷۳}$$

و البته می‌دانیم که ثابت‌های A_1 و ϕ_1 را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. اگر تفاضل معادله‌های رابطه‌ی (۶-۵۹) را حساب کنیم، خواهیم داشت

$$(\ddot{x}-\ddot{y})+4\omega^2(x-y)=0 \tag{۶-۷۴}$$

این رابطه هم مانند رابطه‌ی (۶-۷۲) است و x و y تنها به صورت تفاضل مختصات در آن ظاهر شده‌اند. رابطه‌ی (۶-۷۴) هم همانند معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده است و پاسخ آن را می‌دانیم

$$x-y=A_2\cos(2\omega t+\phi_2) \tag{۶-۷۵}$$

حالا اگر معادله‌های (۶-۷۳) و (۶-۷۵) را باهم حل کنیم، $x(t)$ و $y(t)$ به دست می‌آیند. داریم:

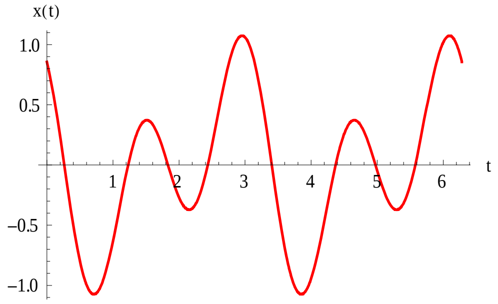
$$\begin{aligned} x(t)&=B_1\cos(\omega t+\phi_1)+B_2\cos(2\omega t+\phi_2) \\ y(t)&=B_1\cos(\omega t+\phi_1)-B_2\cos(2\omega t+\phi_2) \end{aligned} \tag{۶-۷۶}$$

در این جا $B_i=A_i/2$ اند.

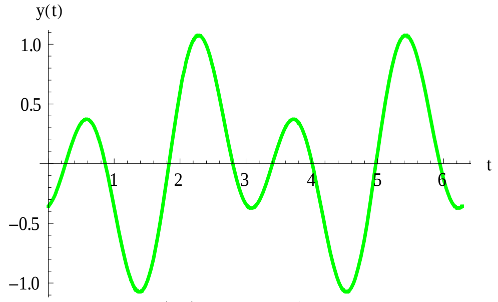
خب! توانستیم معادله‌های دیفرانسیل جفت شده را حل کنیم و توابع $x(t)$ و $y(t)$ را به صورت ترکیب خطی دو پاسخ آشنا بنویسیم. نکته‌ی مهمی که در فرایند حل این معادله‌ها به آن دست یافتیم این است که توانستیم معادله‌های (۶-۷۳) و (۶-۷۵) را به دست آوریم. ترکیب‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ "**مختصات بهنجار**" سامانه نام دارند. در هر کدام از این دو معادله تنها یک بسامد وجود دارد. بسامد نوسان برای $(x+y)$ عبارت است از ω و برای $(x-y)$ بسامد نوسان چیز دیگری است: 2ω.

حرکت $x(t)$ و $y(t)$ در حالت عمومی پیچیده است و دشوار است که تنها با نگاه کردن به آن‌ها بتوان گفت که هر یک فقط از دو بسامد تشکیل شده است (البته در مثال ما $x(t)$ و $y(t)$ هر یک ترکیبی خطی از دو حرکت نوسانی با بسامد ω و 2ωاست)

در شکل‌های (۱۲-٦) ما $x(t)$ و $y(t)$ مربوط به رابطه‌ی (٧٦-٦) را نشان داده ایم. همان‌گونه که دیده می‌شود، دشوار است

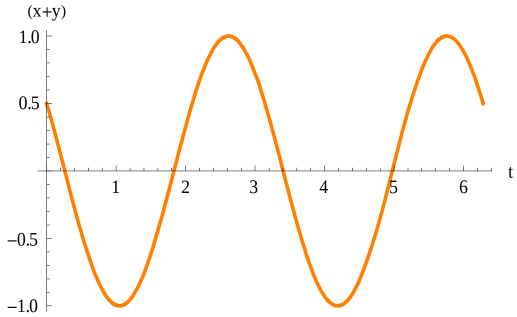


شکل ۱۲-٦ (الف)

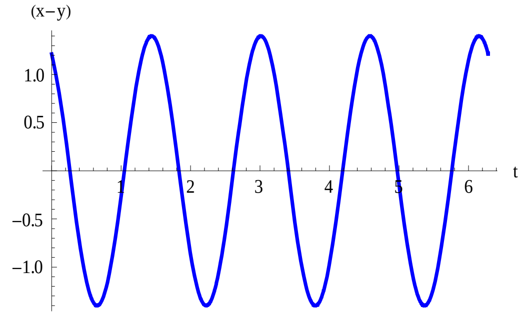


شکل ۱۲-٦ (ب)

که بگوییم بسامد حرکت در آنها چیست. اما اگر $(x+y)$ و $(x-y)$ را رسم کنیم می‌بینیم که برای هر حرکت سامانه، آنها با گذشت زمان همواره توابع خوش رفتار سینوسی خواهند بود. در مقایسه با رفتار ناخوش آیند x و y این قابل توجه است. در شکل‌های (۱۳-٦) ترکیب‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ نشان داده شده اند. برای این که این نکته را به روشنی ببینید و کمکی در



شکل۱۳-٦ الف



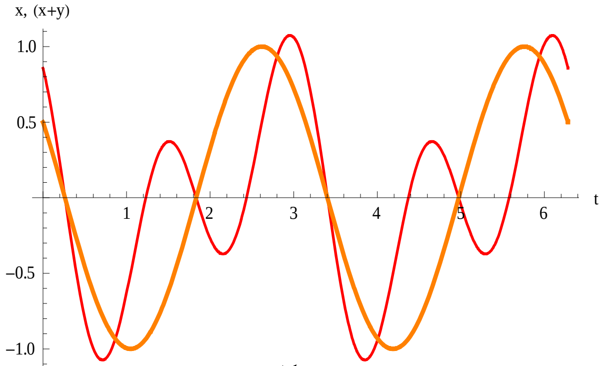
شکل ۱۳-٦ ب

فهمیدن مفهوم "حالت‌های بهنجار" باشد، در شکل (١٤-٦) هر دوی x و $(x+y)$ را در یک نمودار رسم کرده‌ام. به تفاوت رفتار آنها توجه کنید.

روش ۲: در مثال بالا حدس زدن ترکیب‌های خطی معادله‌های رابطه‌ی (٧١-٦) آسان بود وما را به یافتن $(x+y)$ و $(x-y)$ و نیز به x و y رهنمون شد. در مسئله‌های دیگر فیزیکی گمانه‌زنی به این آسانی نیست. خوشبختانه، شیوه‌ای عمومی ومطمئن وجود دارد که ما را به پاسخ و حالت‌های بهنجار می‌رساند. در زیر این فرایند را دنبال می‌کنیم. با توجه به آنچه که در بخش ١-٦ گفتیم، پاسخ‌های آزمون را به صورت $x=Ae^{i\alpha t}$ و $x=Be^{i\alpha t}$ برگزینید. برای آسانی من آن ها را به صورت زیر

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\alpha t} \qquad (٧٧-٦)$$

می‌نویسم. ما نمی‌دانیم و در واقع روشن هم نیست که وابستگی x و y به t یکسان باشند، با وجود این، بگذارید کارمان را پی بگیریم و ببینیم چه پیش می‌آید. همچنین، توجه کنید که من i را به روشنی در توان این پاسخ های آزمون وارد کردم. این کار از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. اگر α موهومی باشد آنگاه توان این پاسخ‌ها حقیقی خواهند شد. این یک گزینه‌ی شخصی است که i



شکل ١٤-٦

را در توان پاسخ‌های آزمون به کار ببریم یا نه. اگر این پاسخ های آزمون و مشتق های آنها را در معادله‌های (۷۱-۶) قرار دهیم و به $e^{i\alpha t}$ تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &۲A(-\alpha^{۲})+۵A\,\omega^{۲}-۳B\,\omega^{۲}=۰ \\ &۲B(-\alpha^{۲})+۵B\,\omega^{۲}-۳A\,\omega^{۲}=۰ \end{aligned} \qquad (۶-۷۸)$$

یا به طور هم‌ارز، می‌توان نوشت

$$\begin{pmatrix} -۲\alpha^{۲}+۵\omega^{۲} & -۳\omega^{۲} \\ -۳\omega^{۲} & -۲\alpha^{۲}+۵\omega^{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \qquad (۶-۷۹)$$

که یک معادله‌ی همگن برای A و B است و هنگامی پاسخ غیر بدیهی (بدیهی به این معنی که هر دوی A و B صفرند) دارد که دترمینان ضرایب آن صفر باشد. به بیان دیگر

$$\begin{vmatrix} -۲\alpha^{۲}+۵\omega^{۲} & -۳\omega^{۲} \\ -۳\omega^{۲} & -۲\alpha^{۲}+۵\omega^{۲} \end{vmatrix}=۰ \quad \Rightarrow \quad ۴\alpha^{۲}-۲۰\alpha^{۲}\omega^{۲}+۱۶\omega^{۴}=۰ \qquad (۶-۸۰)$$

این یک معادله‌ی درجه دو نسبت به $\alpha^{۲}$ است و ریشه‌هایش عبارتند از $\alpha=\pm\omega$ و $\alpha=\pm۲\omega$. بنابراین ، چهار پاسخ داریم.

اگر $\alpha=\pm\omega$ باشد و آن را در در معادله‌های (۷۹-۶) قرار دهیم خواهیم داشت $A=B$ (هر دو علامت به یک نتیجه می‌انجامد.)

اگر $\alpha=\pm۲\omega$ باشد، آنگاه با جاگذاری در معادله‌های (۷۹-۶) خواهیم داشت $A=-B$. توجه کنید که نمی‌توانیم A و B را حساب کنیم؛ بلکه فقط می‌توانیم نسبت آنها را به دست آوریم. حالا بنا به اصل برنهی، چهار پاسخ را با هم جمع می‌کنیم و پاسخ عمومی x و y را به صورت زیر می‌نویسیم (ما آنها را به شکل بردار نوشتیم که پی‌گیری‌شان آسان‌تر باشد)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A_{۱}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}e^{i\omega t}+A_{۲}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}e^{-i\omega t}+A_{۳}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{۲i\omega t}+A_{۴}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{-۲i\omega t} \qquad (۶-۸۱)$$

چهار مقدار ثابت A_i را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. این رابطه را می‌توان اندکی آشناتر نوشت. اگر x و y توصیف مکان ذره‌ها باشند باید حقیقی باشند. بنابراین، $A_{۱}$ و $A_{۲}$ لازم است که مزدوج مختلط یکدیگر باشند. همین طور برای $A_{۳}$ و $A_{۴}$. اگر تعریف کنیم $A_{۲}^{*}=A_{۱}\equiv(B_{۱}/۲)e^{i\phi_{۱}}$ و $A_{۴}^{*}=A_{۳}\equiv(B_{۲}/۲)e^{i\phi_{۲}}$ می‌توانیم پاسخ بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B_{۱}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}\cos(\omega t+\phi_{۱})+B_{۲}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}\cos(۲\omega t+\phi_{۲}) \qquad (۶-۸۲)$$

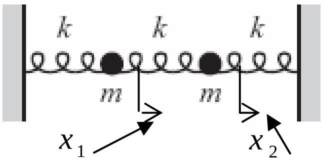
که در آن $B_{۱,۲}$ و $\phi_{۱,۲}$ اعداد حقیقی‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. پس، می‌بینیم که دوباره به همان پاسخ پیشین، رابطه‌ی (۷۶-۶) ، رسیدیم.

رابطه‌ی (۸۲-۶) به روشنی نشان می‌دهد که ترکیب‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ (مختصات بهنجار) به ترتیب با بسامدهای ω و ۲ω نوسان می‌کنند؛ زیرا در ترکیب $(x+y)$ جمله‌ی $B_{۲}$ وجود ندارد و در ترکیب $(x-y)$ جمله‌ی $B_{۱}$ نیست.

روشن است که اگر $B_{۲}=۰$ باشد داریم $x=y$. یعنی هردو با یک بسامد، ω، نوسان می‌کنند. اگر $B_{۱}=۰$ باشد آنگاه $x=-y$ می شود و هر دو با بسامد یکسان ۲ω نوسان خواهند کرد. این دو نوسان با یک بسامد خالص برای هر دو را" *حالت های بهنجار*" می‌نامند. آنها به ترتیب با بردارهای $(۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ نشان داده شده اند. در مثال زیر اهمیت حالت‌های بهنجار روشن خواهد شد.

مثال ۹-۶ (دو جرم و سه فنر): دو جرم یکسان m با سه فنر یکسان با ثابت فنر k برابر شکل (۱۵-۶) به یکدیگر و به دو

دیوار وصل اند. عمومی‌ترین پاسخ مکان‌های دو ذره را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید. مختصات بهنجار آنها کدامند و حالت های بهنجار چیستند؟



شکل ۱۵-۶

حل: ما مسئله را به هر دو روش بالا حل خواهیم کرد. فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب مکان‌های جرم‌های سمت چپ و سمت راست از نقاط ترازمندی آنها باشد. x_1 و x_2 را به سمت راست مثبت فرض کنید. در این صورت فنر سمت چپ به اندازه‌ی x_1 به راست کشیده می‌شود و در نتیجه، نیرویی برابر kx_1 و به سمت چپ به جرم سمت چپ وارد می‌کند. فنر میانی اندکی پیچیده تر است؛ چون جابه‌جایی هر دو جرم برآن اثر می‌گذارند. اما به آسانی می‌توان دید که فنر میانی به اندازه‌ی $x_2 - x_1$ کشیده می‌شود. زیرا به اندازه‌ی x_1 به سمت راست فشرده می‌شود و به اندازه‌ی x_2 به سمت راست کشیده می‌شود. در نتیجه داریم: کشیدگی منهای فشردگی = کشیدگی خالص فنر میانی. پس، فنر میانی نیرویی به اندازه‌ی $k(x_2 - x_1)$ و به سمت راست به جرم سمت چپ وارد می‌کند. بنابراین، نیروی خالص وارد به جرم سمت چپ عبارت است از

$$\text{نیروی وارد به جرم سمت چپ} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \tag{6-83}$$

به همین ترتیب، نیروهای وارد به جرم سمت راست را می‌توان حساب کرد: فنر سمت راست به اندازه‌ی x_2 فشرده شده است. این فنر نیروی kx_2 به جرم سمت راست وارد می‌کند. جهت این نیرو به چپ است. فنر میانی به اندازه‌ی $x_2 - x_1$ کشده شده است و نیروی $k(x_2 - x_1)$ را به جرم سمت راست اعمال می‌کند. جهت این نیرو هم به سوی چپ است. پس نیروی خالص وارد به جرم سمت راست عبارت است از

$$\text{نیروی وارد به جرم سمت راست} = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = kx_1 - 2kx_2 \tag{6-84}$$

حال می‌توان با استفاده از $F = ma$ معادله‌های حرکت را برای این دو جرم نوشت.

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \tag{6-85}$$
$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2$$

اکر تعریف کنیم $\omega^2 \equiv k/m$ آنگاه رابطه‌ی بالا را میتوان به صورت زیر نوشت

$$\ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 = 0 \tag{6-86}$$

روش ۱: این دو معادله دوستانه به نظر می‌آیند و می‌توان با بهره گیری از روش ۱ دید که جمع و تفاضل آنها ترکیب‌های خطی دلخواه ما هستند. اگر آنها را با هم جمع کنیم داریم

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0 \tag{6-87}$$

و اگر از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\omega^2(x_1 - x_2) = 0 \tag{6-88}$$

پاسخ‌های این دو معادله برای $(x_1 + x_2)$ و $(x_1 - x_2)$ مختصات بهنجارند و آنها را می‌شناسیم

$$x_1 + x_2 = A_+ \cos(\omega t + \phi_+)$$
$$x_1 - x_2 = A_- \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-) \tag{6-89}$$

حالا از جمع و تفاضل این مختصات طبیعی، $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به دست می‌آیند. داریم

$$x_1(t) = B_+ \cos(\omega t + \phi_+) + B_- \cos(\sqrt{3}\,\omega t + \phi_-)$$
$$x_2(t) = B_+ \cos(\omega t + \phi_+) - B_- \cos(\sqrt{3}\,\omega t + \phi_-) \tag{6-90}$$

در این جا هم $B_i = A_i/2$ و به همراه ϕ_i ها با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

روش ۲ : برای تمرین هم که شده باشد بگذارید این مسئله را به روش دترمینان هم حل کنیم. باز هم پاسخ‌های آزمون را به صورت $x_1 = Ae^{i\alpha t}$ و $x_2 = Be^{i\alpha t}$ برگزینید. پاسخ های آزمون را به همراه مشتق‌هایشان در رابطه‌های (۸۶-۶) جاگذاری کنید. پس از تقسیم کردن به $e^{i\alpha t}$ خواهیم داشت

$$-\alpha^2 A + 2\omega^2 A - \omega^2 B = 0$$
$$-\alpha^2 B + 2\omega^2 B - \omega^2 A = 0 \qquad (۶-۹۱)$$

و یا اگر به صورت بردار بنویسیم، داریم

$$\begin{pmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۶-۹۲)$$

و برای این که پاسخ‌های غیر بدیهی برای A و B داشته باشیم دترمینان ضرایب باید برابر صفر باشد:

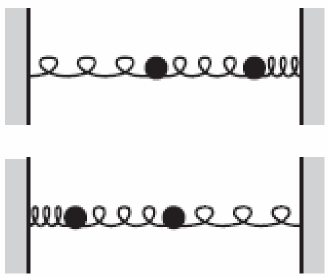
$$\begin{vmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - 4\alpha^2\omega^2 + 3\omega^4 = 0 \qquad (۶-۹۳)$$

باز هم به یک معادله‌ی درجه دو نسبت به α^2 رسیدیم. ریشه‌های آن $\alpha = \pm\omega$ و $\alpha = \pm\sqrt{3}\,\omega$ اند. از جاگذاری $\alpha = \pm\omega$ در رابطه‌ی (۸۱-۶) می‌بینیم که $A = B$ و از جاگذاری $\alpha = \pm\sqrt{3}\,\omega$ درمی‌یابیم که $A = -B$. بنابراین، شکل عمومی پاسخ‌ها عبارتند از

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{i\omega t} + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-i\omega t} + A_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{\sqrt{3}i\omega t} + A_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-\sqrt{3}i\omega t} \qquad (۶-۹۴)$$
$$\equiv B_+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \phi_+) + B_-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-)$$

که با رابطه‌ی (۹۰-۶) هم‌ارز است.

حالت‌های بهنجار را با قرار دادن $B_- = 0$ یا $B_+ = 0$ در رابطه‌ی (۹۰-۶) یا در رابطه‌ی (۹۴-۶) به دست می‌آوریم. پس ، حالت های بهنجار $(1,1)$ و $(1,-1)$ است. چگونه باید این حالت‌های بهنجار را تجسم کرد و آنها را نشان داد؟ حالت بهنجار $(1,1)$ با بسامد ω نوسان می‌کند. در این حالت $B_- = 0$ است وبرای همه‌ی زمان‌ها داریم $x_1(t) = x_2(t) = B_+\cos(\omega t + \phi_+)$ ، یعنی هر دو جرم مانند هم حرکت نوسانی پس و پیش دارند. در شکل (۱۶-۶) این حالت نوسانی نشان داده شده است. روشن است که بسامد این حرکت ω است. چون تا جایی که به دو جرم مربوط می‌شود، انگار فنر میانی وجود ندارد و هر جرم فقط تحت تاثیر یک فنر نوسان می‌کند و در نتیجه بسامد هر کدام ω است. در شکل (۱۶-۶) دیده می‌شود که دو جرم

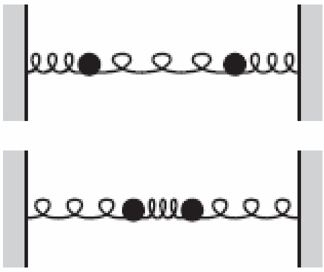


شکل ۱۶-۶

چگونه با هم به سمت چپ و یا به سمت راست می‌روند. حالت بهنجار $(1,-1)$ با بسامد $\sqrt{3}\,\omega$ نوسان می‌کند. در این حالت $B_+ = 0$ است و از رابطه‌های (۹۰-۶) یا (۹۴-۶) پیداست که برای همه زمان‌ها $x_1(t) = -x_2(t) = B_-\cos(\sqrt{3}\,\omega t + \phi_-)$ است. یعنی جرم ها در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. این رفتار در شکل (۱۷-۶) نشان داده شده است.

روشن است که در این حالت بسامد حرکت باید بزرگتر از حالت قبلی باشد، زیرا در این حالت، فنر میانی کشیده یا فشرده

می‌شود و در نتیجه، به جرم ها نیروی بیشتری وارد می‌شود و از این رو بسامد حرکت بزرگتر می‌شود.



شکل ۱۷-۶

حالت بهنجار (۱,۱) در بالا به مختصات بهنجار x_1+x_2 مربوط است. بسامد هر دوی x_1 و x_2 در این حالت ω است. اما دلیل این تناظر ربطی به این ندارد که ضریب‌های x_1 و x_2 هر دو ۱ است. بلکه به این دلیل است که حالت نوسانی دیگر، یعنی $(1,-1)\propto(x_1-x_2)$ سهمی در x_1+x_2 ندارد. در مثال بالا تعداد ۱ ها زیاد است و این اجازه نمی‌دهد تا به روشنی ببینیم چه چیزی به کدام حالت مربوط است. فرض کنید مسئله‌ای را حل کرده ایم و پاسخ آن به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (6-95)$$

در این مثال مختصات بهنجار مربوط به حالت بهنجار (۳,۲) عبارت است از $5x+y$ ؛ چون در یک چنین ترکیبی است که دیگر $\cos(\omega_2 t+\phi_2)$ ظاهر نمی‌شود. بگذارید این را با جزییات بیشتری ببینیم. از رابطه‌ی (۹۵-۶) داریم

$$\begin{aligned} x &= 3B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \\ y &= 2B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-5B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{aligned} \qquad (6-96)$$

حالا دیده می‌شود که در ترکیب $5x+y$ دیگر $\cos(\omega_2 t+\phi_2)$ وجود ندارد. به همین ترتیب $2x-3y$ مختصات بهنجار مربوط به حالت بهنجار $(1,-5)$ است که با بسامد ω_2 نوسان می‌کند و در آن دیگر $\cos(\omega_1 t+\phi_1)$ وجود ندارد.

مثال‌های تکمیلی

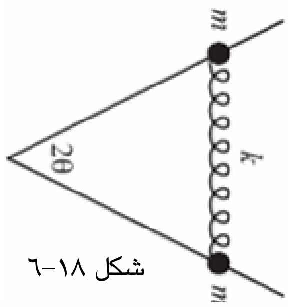
ت-۱ فرض کنید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ پاسخ‌های معادله‌ی دیفرانسیل $\ddot{x}^2=bx$ باشند. نشان دهید که $x_1(t)+x_2(t)$ پاسخ معادله‌ی $\ddot{x}^2=bx$ **نیست**.

ت-۲ معادله‌ی $\ddot{x}=ax$ را در نظر بگیرید. اگر $a=0$ باشد، پاسخ معادله‌ی $\ddot{x}=0$ عبارت است از $x(t)=C+Dt$. نشان دهید که در حد $a\to 0$ رابطه‌ی (۲-۶) به این پاسخ کاهش پیدا می‌کند. (توجه کنید که $a\to 0$ زبان گویایی برای منظور ما نیست.) روش درست برای بیان این حد چیست؟

ت-۳ پرتابه‌ای به جرم m در مبداء مختصات به فنری با ثابت k و طول طبیعی صفر وصل است. پرتابه با سرعت v_0 و با زاویه‌ی θ شلیک می‌شود.

(الف): $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب): نشان دهید که به ازای $\omega\equiv\sqrt{k/m}$ های کوچک، مسیر این پرتابه به مسیر پرتابه‌ی معمولی کاهش می‌یابد. هم‌چنین نشان دهید که به ازای ω های بزرگ مسیر آن به مسیر حرکت نوسانگر ساده تقلیل پیدا می‌کند، یعنی به حرکت نوسانی در راستای خط راست، کاهش پیدا (دستکم پیش از آن که پرتابه با زمین برخورد کند.) به جای" ω کوچک" و " ω بزرگ" چه گزاره‌ی مناسب‌تری را پیشنهاد می‌کنید؟



شکل ۱۸-۶

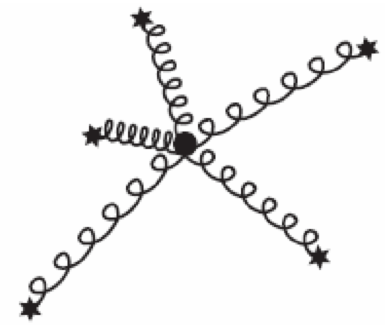


شکل ۱۹-۶

(**پ**): به ازای چه مقدار ω پرتابه در برخورد با زمین در راستای خط قائم حرکت می‌کند؟

ت-۴ ریسمانی به طول L و چگالی جرمی $\lambda\,\mathrm{kg/m}$ از روی قرقره‌ی بدون جرم گذشته است و از دو طرف آن آویزان است. یک انتهای ریسمان به اندازه‌ی $x_\circ$ در زیر مکان میانگین دو انتها و دیگری به اندازه‌ی $x_\circ$ بالای آن قرار دارد. ریسمان را با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ از این وضعیت رها می‌کنیم. برای این که ریسمان قرقره را ترک نکند، این سرعت اولیه چقدر باید باشد؟

ت-۵ دو میله‌ی بدون اصطکاک با هم زاویه‌ی ۲θ می‌سازند و در روی یک سطح افقی قرار دارند. دو ذره هر یک به جرم m مقیدند در روی میله‌ها حرکت کنند. جرم‌ها با فنری با ثابت k به یکدیگر وصل‌اند. طول طبیعی فنر در وضعیتی است که در شکل (۱۸-۶) نشان داده شده است. اگر حرکت چنان باشد که همواره فنر موازی وضعیت نشان داده شده در شکل باقی بماند، بسامد حرکت نوسانی را به دست آورید.


شکل ۲۰-۶

ت-۶ (**الف**) جرم m برابر شکل (۱۹-۶) به دو فنر با ثابت‌های یکسان وصل است. طول طبیعی فنرها صفر است و انتهای دیگر آن‌ها در به نقطه‌های ثابتی وصل‌اند. جرم m ابتدا در مکان ترازمندی خود است. به آن تلنگری در جهت دلخواه وارد می‌شود. حرکت سامانه را توصیف کنید. (اگرچه نیازی نیست، اما می‌توانید از گرانش چشم‌پوشی کنید.)

(**ب**): جرم m برابر شکل (۲۰-۶) به n فنر با ثابت‌های $k_1,k_2,\cdots,k_n$ وصل است. طول طبیعی فنرها صفر اند. انتهای دیگر فنرها به نقاط ثابتی در فضا وصل‌اند. . جرم m ابتدا در مکان ترازمندی خود است. به آن تلنگری در جهت دلخواه وارد می‌شود. حرکت سامانه را توصیف کنید. (بازهم، اگرچه نیازی نیست، اما می‌توانید از گرانش چشم‌پوشی کنید.)

مسئله ها

۱-۶ (kx **نیروی**): ذره‌ای به جرم m تحت نیروی $F(x)=kx$ قرار دارد؛ $K>\circ$. عمومی‌ترین پاسخ $x(t)$ کدام است؟ اگر ذره از نقطه‌ی $x_\circ$ شروع به حرکت کند به ازای کدام مقدار خاصِ سرعت اولیه، پس از زمانی طولانی ذره خیلی از مبداء دور نخواهد شد؟

۲-۶ (**دامنه**): معادله‌ی حرکت جسمی به صورت $x(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t$ است. دامنه‌ی این حرکت را حساب کنید.

۳-۶ نشان دهید که پاسخ‌های نوسانگر هماهنگ در شکل‌های $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ و $x(t)=D\cos(\omega t+\phi)$ هم‌ارزند. رابطه‌ی بین (A,B) و (D,ϕ) را به دست آورید.

۴-۶ فنری با ثابت k و طول طبیعی ℓ را در نظر بگیرید. جرم m را به فنر می‌بندیم و مجموعه را قائم نگه می‌داریم.

(**الف**): طول حالت ترازمندی فنر (یعنی طول فنر وقتی که دیگر جرم نوسان نمیکند) را بیابید.

(**ب**) : بسامد طبیعی نوسانگر قائم را پیدا کنید.

(**پ**): همین فنر را با همان جرم در روی میز افقی بدون اصطکاک قرار می دهیم و آن را به نوسان در می‌آوریم. بسامد

نوسانهای بهنجار فنر را در این حالت با حالت قائم مقایسه کنید.

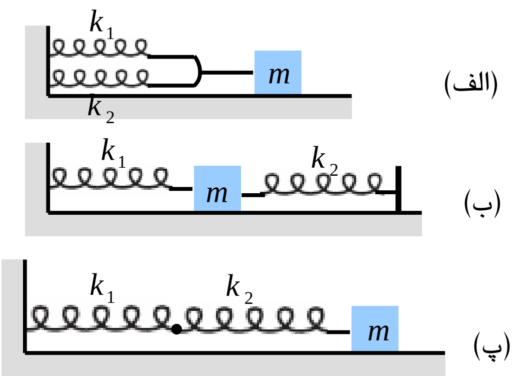
۵-۶ برای نوسانگر ساده (مانند جرمی که به فنر وصل است) با انرژی پتانسیل U و انرژی جنبشی T

(الف): $U(t)$ و $T(t)$ راروی یک نمودار برحسب t رسم کنید.

(ب): $U(x)$ و $T(x)$ راروی یک نمودار برحسب x رسم کنید.

(پ): میانگین زمانی U و T را برای یک دوره ی نوسان حساب کنید.

(ت): میانگین فضایی U و Tرا برای یک دوره ی نوسان حساب کنید.



شکل ۲۱-۶

۶-۶ دو فنر با طول‌های طبیعی یکسان، اما با ثابت های فنر متفاوت k_1 و k_2 به قطعه‌ای به جرم m وصل اند. قطعه روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. ثابت موثر k_{eff} را برای هر یک از سه حالت (الف) ، (ب) و (پ) در شکل (۲۱-۶) حساب کنید. ضریب ثابت موثر با رابطه‌ی $\sum F = -k_{eff}\, x$ تعریف می‌شود.

۷-۶ جسمی به جرم m به فنری با ثابت k وصل است و با بسامد f_1 نوسان می‌کند. فنر را دو نیم می‌کنیم و جسم را به یکی از نیمه‌ها می‌بندیم. جسم با بسامد f_2 نوسان می‌کند. نسبت f_2/f_1 را با توجه به قسمت (پ) مسئله‌ی ۶-۶ حساب کنید.

۸-۶ کشیدن فنرهای واقعی معمولا آسان‌تر از فشردن آنهاست. این واقعیت را می‌توان با نسبت دادن ثابت‌های متفاوت برای $x > ۰$ و $x < ۰$ توصیف کرد. برای نمونه فنری را در نظر بگیرید که نیروی بازگرداننده آن به صورت زیر است.

$$F = \begin{cases} -kx & ; \quad x > ۰ \\ -۲kx & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

جرم m روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد و به این فنر وصل است. جرم را می‌کشیم و به اندازه‌ی $x = A$ آن را جابه‌جا و سپس رها می‌کنیم تا نوسان کند.

(الف): دوره‌ی حرکت را پیدا کنید. آیا دوره‌ی حرکت به A بستگی دارد؟ آیا این حرکت نوسانی هماهنگ ساده است؟

(ب): بیشینه مقدار منفی x که جرم به آن می‌رسد چقدر است؟ آیا نسبت به نقطه‌ی $x = ۰$ این نوسان متقارن است؟

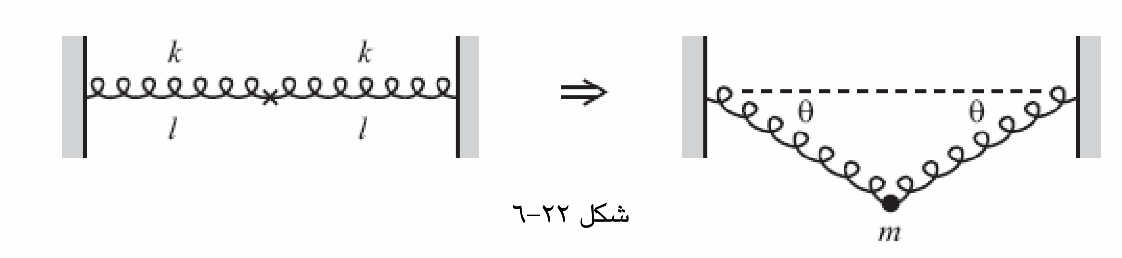
۹-۶ به جرم m نیروی بازدارنده‌ی $-bv$ و نیروی وادارنده‌ی $F_d \cos\omega_d t$ وارد می‌شود، اما نیروی فنر وجود ندارد. پاسخ $x(t)$ حرکت را به صورت $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$ یا یکی از شکل‌های مناسب هم‌ارز بنویسید (A و B را حساب کنید). اگر پاسخ را به صورت $x(t) = C\cos(\omega_d t - \phi)$ برگزیدید، C و ϕ را بیابید. (*راهنمایی:* رابطه‌ی ۵۲-۶ را نگاه کنید)

۱۰-۶ دو فنر بدون جرم یکسان با ثابت k و طول طبیعی ℓ را به هم می‌بندیم و انتهاهای آزاد فنرها را برابر شکل (۲۲-۶) به دو دیوار روبرو به فاصله‌ی 2ℓ از هم وصل می‌کنیم. جرم m را به نقطه‌ی میانی می‌بندیم و آن را به آرامی پایین می‌آوریم تا در جایگاه ترازمندیش به حال سکون در آید. در این مکان ترازمندی، هر یک از فنرها با افق زاویه‌ی θ می سازد.

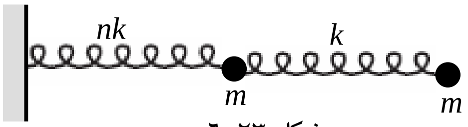
(الف): مقدار m را برحسب θ (و شاید k، ℓ و g) به دست آورید.

(ب): اگر به جرم تلنگر کوچکی در امتداد قائم وارد کنیم، بسامد نوسان‌های کوچک را برحسب θ (و شاید k، ℓ و g ؛ اما از

پاسخ قسمت (الف) استفاده کنید و m را برحسب کمیت‌های دیگر بنویسید) به دست آورید.

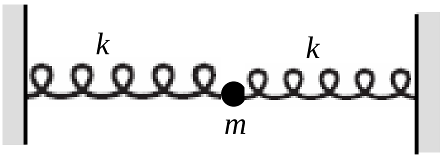


شکل ۲۲–۶

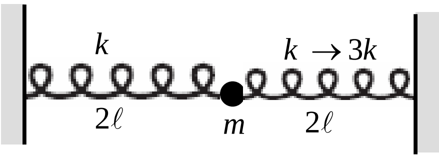


شکل ۲۳–۶

۱۱–۶ در چیدمان شکل (۲۳–۶) هر دو جرم m و ثابت‌های فنرها به ترتیب nk (n یک ضریب عددی است) و k اند. طول طبیعی فنرها یکسان است. فرض کنید که شرایط اولیه چنان فراهم شده است که با نوسان جرم‌ها، طول فنرها در هر لحظه‌ای با هم برابر باشند. از گرانش چشم پوشی کنید و n را به دست آورید.



شکل ۲۴–۶



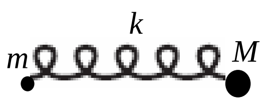
شکل ۲۵–۶

۱۲–۶ در شکل (۲۴–۶) جرم m به دو فنر وصل است. فنرها طول حالت تعادل خود را دارند. جرم m با دامنه‌ی d در راستای فنرها نوسان می‌کند. در یک لحظه که (می‌توانید این لحظه را $t=0$ فرض کنید) جرم در فاصله‌ی $x=d/2$ از مکان ترازمندی قرار دارد و به سمت راست در حرکت است، فنر سمت راست را حذف می‌کنیم (با سازوکاری ثابت آن را صفر می‌کنیم.)

(الف): معادله‌ی حرکت $x(t)$ جدید را بیابید.

(ب): دامنه‌ی نوسان جدید را حساب کنید.

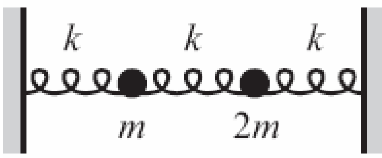
۱۳–۶ دو فنر هر یک با ثابت k و طول طبیعی ℓ را در نظر بگیرید. هر دو فنر را به اندازه‌ی ℓ می‌کشیم و برابر شکل (۲۵–۶) به جرم m و دو دیوار روبرو می‌بندیم . در یک لحظه‌ی معین ثابت فنر سمت راست با سازوکاری ناگهانی به $3k$ تغییر می‌کند اما طول طبیعی آن ℓ باقی می‌ماند. درزمان بعدی $t=(\pi/4)\sqrt{m/k}$ مکان جرم m را بیابید. سرعت ذره در این مکان چیست؟ (در این مسئله از گرانش چشم پوشی کنید).



شکل ۲۶–۶

۱۴–۶ جرم‌های m و M با فنر بدون جرم و ثابت k برابر شکل (۲۶–۶) به هم وصل اند. جرم‌ها را از هم دور می‌کنیم و فنر به اندازه‌ی A کشیده می‌شود. سپس جرم‌ها را از حالت سکون رها می‌کنیم. مکان m را برحسب زمان پیدا کنید. فرض کنید $x=0$ مکان نیم راه حرکت جرم m است (*راهنمایی:* مرکزجرم چه می‌کند؟)

۱۵–۶ جرمی را به فنری با بسامد طبیعی ω وصل می‌کنیم و از مکان x_0 رها می‌کنیم. این آزمایش را در درون مایعی تکرار می کنیم. مایع سبب می شود که حرکت با ضریب میرایی γ تندمیرا شود. نسبت بیشینه‌ی سرعت‌ها را در دو وضعیت به دست آورید. در حالت‌های حدی تند میرایی $\gamma \gg \omega$ و در حد میرایی بحرانی این نسبت چه خواهد شد؟



شکل ۲۷–۶

۱۶–۶ سه فنر یکسان و جرم‌های m و $2m$ برابر شکل (۲۷–۶) به هم و به دو دیوار روبرو وصل اند. حالت های بهنجار سامانه را بیابید.

حل مثال‌های تکمیلی

ت-۱ جمع x_1+x_2 پاسخ معادله‌ی $\ddot{x}^2=bx$ است اگر داشته باشیم

$$\left(\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}\right)^2=b(x_1+x_2) \quad\Leftrightarrow\quad (\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)^2=b(x_1+x_2)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ddot{x}_1^2+2\ddot{x}_1\ddot{x}_2+\ddot{x}_2^2=b(x_1+x_2) \qquad (۶-۹۷)$$

اما بنا به فرض مسئله می‌دانیم که $\ddot{x}_1^2=bx_1$ و $\ddot{x}_2^2=bx_2$ اند. بنابراین، جمله‌ی $2\ddot{x}_1\ddot{x}_2$ در سمت چپ رابطه‌ی بالا تساوی را نقض می‌کند. (توجه کنید که $2\ddot{x}_1\ddot{x}_2$ نمی‌تواند صفر باشد؛ چون در این صورت اگر هر کدام $\ddot{x}_1$ یا $\ddot{x}_2$ صفر باشند، باید x_1 یا x_2 هم صفر باشد که در این صورت پاسخی برای معادله‌ی دیفرانسیل باقی نمی‌ماند.)

ت-۲ یکای a به صورت T^{-2} است و عدد صفر بدون بعد است. بنابراین، "$a\to 0$" بیان درستی برای این حد نیست. بیان درست این است که بگوییم رابطه‌ی (۲-۶) وقتی به $x(t)=C+Dt$ کاهش می‌یابد که $\sqrt{a}t\ll 1$ و یا، به طور هم‌ارز، $t\ll 1/\sqrt{a}$ باشد. در این صورت کمیت‌های با بعد یکسان مقایسه می‌شوند. هرچه a کوچک شود، t بزرگ می‌شود و بنابراین اگر $a\to 0$ آنگاه t می‌تواند هر مقداری را بپذیرد. با فرض $\sqrt{a}t\ll 1$ می‌توان نوشت $e^{\pm\sqrt{a}t}\approx 1+\sqrt{a}t$ و در نتیجه رابطه‌ی (۲-۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$x(t)\approx A\left(1+\sqrt{a}t\right)+B\left(1-\sqrt{a}t\right)=(A+B)+\sqrt{a}(A-B)t\equiv C+Dt \qquad (۶-۹۸)$$

C مکان اولیه و D سرعت ذره است. اگر این کمیت‌ها از مرتبه‌ی بزرگی ۱ در یکاهای مربوطه باشند، آنگاه با به دست آوردن A و B می‌بینیم که به تقریب باید منهای یکدیگر برابر و هر دو از یک مرتبه‌ی بزرگی $1/\sqrt{a}$ باشند. در نتیجه، اگر مکان اولیه و سرعت از یک مرتبه‌ی بزرگی باشند، A و B در حد $a\to 0$ واگرا می‌شوند. اگر a کوچک، اما غیر صفر شود، سرانجام t به اندازه‌ای بزرگ خواهد شد که دیگر $\sqrt{a}t\ll 1$ برقرار نخواهد بود. در این حالت، شکل خطی رابطه‌ی (۲-۶) دیگر برقرار نیست.

ت-۳ **(الف)** نیروی وارد به پرتابه عبارت است از $\mathbf{F}=-k\mathbf{r}-mg\,\mathbf{j}$. مولفه‌ی x معادله‌ی حرکت $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ به دست می‌دهد

$$m\ddot{x}=-kx \quad\Rightarrow\quad x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \qquad (۶-۹۹)$$

که در آن $\omega\equiv\sqrt{k/m}$ است. از مولفه‌ی y داریم $m\ddot{y}=-ky-mg$. با تعریف $z\equiv y+mg/k$ این رابطه به صورت زیر درمی‌آید

$$m\ddot{z}=-kz \quad\Rightarrow\quad z=C\cos\omega t+D\sin\omega t \qquad (۶-۱۰۰)$$

$$\Rightarrow\quad y=z-mg/k=C\cos\omega t+D\sin\omega t-mg/k$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از $x(0)=0$ ، $\dot{x}(0)=v_0\cos\theta$ و $y(0)=0$ ، $\dot{y}(0)=v_0\sin\theta$. از این شرط‌ها به دست می‌آید $A=0$ ، $B=v_0\cos\theta/\omega$ و بنابراین،

$$x(t)=\left(\frac{v_0\cos\theta}{\omega}\right)\sin\omega t \qquad (۶-۱۰۱)$$

از شرایط اولیه در راستای y به دست می‌آید: $C=mg/k$ و $D=(v_0\sin\theta/\omega)\cos\omega t$ و بنابراین،

$$y(t)=\left(\frac{mg}{k}\right)(\cos\omega t-1)+\left(\frac{v_0\sin\theta}{\omega}\right)\sin\omega t \qquad (۶-۱۰۲)$$

به ازای ω های کوچگ $\sin\omega t\approx\omega t$ و $\cos\omega t\approx ۱-(\omega t)^۲/۲$. بنابراین، داریم

$$x(t)\approx\left(\frac{v_\circ\cos\theta}{\omega}\right)\omega t=(v_\circ\cos\theta)t \qquad (۶-۱۰۳)$$

و با استفاده از $\omega^۲=k/m$

$$y(t)\approx\left(\frac{mg}{k}\right)\left(\frac{-(k/m)t^۲}{۲}\right)+\left(\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\right)\omega t=-\frac{۱}{۲}gt^۲+(v_\circ\sin\theta)t \qquad (۶-۱۰۴)$$

این‌ها معادله‌های حرکت پرتابه‌ی معمولی اند. برای این که تقریب بالا معنی‌دار باشد باید در تمام طول حرکت $\omega t\ll ۱$ باشد. اگر فرض کنیم $\omega(۲v_\circ\sin\theta/g)\ll ۱$، آنگاه تقریب بالا برای $t=(۲v_\circ\sin\theta)/g$ درست است و در این صورت به ازای همه‌ی زمان‌ها $y\approx \circ$ می‌شود؛ یعنی پرتابه با زمین برخورد کرده است و حرکت به پایان رسیده است. در نتیجه،"ω کوچک" به معنی $\omega\ll g/(v_\circ\sin\theta)$ است. حال ω بزرگ را در نظر بگیرید. به ازای **هر** t دلخواه $x(t)$ حرکت نوسانی ساده دارد. برای این که کل حرکت نوسانی ساده باشد، باید حرکت در امتداد خط راست باشد و در نتیجه باید y/x مقدار ثابتی باشد. این بدان معنی است که جمله‌ی $(mg/k)(\cos\omega t-۱)$ در $y(t)$ باید قابل چشم‌پوشی باشد. پس، لازم است که

$$\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\gg\frac{mg}{k}\quad\Rightarrow\quad\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\gg\frac{g}{\omega^۲}\quad\Rightarrow\quad\omega\gg\frac{g}{v_\circ\sin\theta} \qquad (۶-۱۰۵)$$

و این معنی" ω بزرگ" است. در این حالت، هر دوی x و y اساسا با $\sin\omega t$ متناسب‌اند. پرتابه تا بیشینه فاصله‌ی $v_\circ/\omega$ از مبداء دور می‌شود و سپس برمی‌گردد.

دو شرط بالا برای ω را می‌توان به این صورت خلاصه کرد که بدون گرانش، مقیاس زمانی، $۱/\omega$، حرکت باید خیلی بزرگ‌تر یا خیلی کوچک‌تر از مقیاس زمانی حرکت پرتابی بدون فنر، $(۲v_\circ\sin\theta)/g$ باشد.

(**پ**): می‌خواهیم وقتی $\dot{x}=\circ$ می‌شود، $y=\circ$ باشد. اما $\dot{x}=(v_\circ\cos\theta)\cos\omega t$ است که به ازای $t=\pi/۲$ صفر است. پس، مقدار y در زمان $t=\pi/۲$ عبارت است از $(mg/k)(\circ-۱)+(v_\circ\sin\theta/\omega)(۱)$ که اگر برابر صفر قرار دهیم و با استفاده از $\omega^۲=k/m$ خواهیم داشت

$$\frac{g}{\omega^۲}=\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{g}{v_\circ\sin\theta} \qquad (۶-۱۰۶)$$

که به حسابی درست در وسط دو حد بالاست.

ت-۴ فرض کنید x فاصله‌ی هر انتهای ریسمان از مکان میانگین باشد (یک انتها به اندازه‌ی x بالا و دیگری در زیر آن). در این صورت نیروی در امتداد ریسمان $\lambda(2x)g$ است. از $F=ma$ داریم

$$۲\lambda gx=\lambda L\ddot{x}\quad\Rightarrow\quad\ddot{x}=(۲g/L)x \qquad (۶-۱۰۷)$$

که معادله‌ی نوسانگر ساده با است. پاسخ آزمون معادله‌ی بالا را به صورت $x(t)=Ae^{\alpha t}$ فرض کنید و در رابطه‌ی (۶-۱۰۷) جایگزین کنید. به دست می‌آید

$$A\alpha^۲e^{\alpha t}=\frac{۲g}{L}Ae^{\alpha t}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\pm\sqrt{۲g/L} \qquad (۶-۱۰۸)$$

بنابراین، پاسخ عمومی معادله‌ی (۶-۱۰۷) عبارت است از

$$x(t)=Ae^{\sqrt{۲g/L}\,t}+Be^{-\sqrt{۲g/L}\,t} \qquad (۶-۱۰۹)$$

اما ما می‌خواهیم $A=0$ باشد؛ چون جمله‌ی اول با گذشت زمان به طور نمایی افزایش پیدا می‌کند. پس: $x(t)=Be^{-\sqrt{2g/Lt}}$. به شرط $x(t=0)=x_0$ خواهیم داشت $B=x_0$ و

$$x(t)=x_0e^{-\sqrt{2g/Lt}} \quad \Rightarrow \quad v(t)=-x_0\sqrt{2g/L}e^{-\sqrt{2g/Lt}} \qquad (6\text{–}110)$$

بنابراین، باید انتهای بالاتر را با سرعت $v(0)=x_0\sqrt{2g/L}$ به پایین کشید.

ت–۵ مکان هر یک از جرم‌ها را در امتداد میله، نسبت به حالت ترازمندی، x بنامید. فنر به اندازه‌ی $2x\sin\theta$ کشیده می‌شود و نیروی $2kx\sin\theta$ به وجود می‌آید. مولفه‌ی این نیرو در امتداد میله $2kx\sin^2\theta$ است. از $F=ma$ در امتداد میله داریم

$$-2kx\sin^2\theta=m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{2k/m}\sin\theta \qquad (6\text{–}111)$$

ت–۶ **(الف)**: نکته‌ی مسئله در این است که چون طول طبیعی فنر صفر است، نیروی فنر را می‌توان به صورت $-k\mathbf{r}$ نوشت (که در آن $\mathbf{r}$ نسبت به انتهای ثابت فنر اندازه‌گیری می‌شود). در بردار $-\mathbf{r}$ جهت و اندازه، هر دو درست‌اند. بنابراین، اگر یکی از فنرها نسبت به انتهای ثابتش از مکان $\mathbf{r}_1$ به مکان $\mathbf{r}_2$ جابه‌جا شود، اختلاف نیروی آن $\Delta\mathbf{F}=-k(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=-k\,\Delta\mathbf{r}$ می‌شود. همین گزاره در باره‌ی فنر دوم هم درست است. توجه کنید که بردارهای $\mathbf{r}$ نسبت به انتهای ثابت هر فنر اندازه‌گیری می‌شود که با انتهای ثابت فنر اولی فرق دارد. با وجود این، تاثیری در نتیجه‌ی $\Delta\mathbf{F}=-k\,\Delta\mathbf{r}$ ندارد. پس، وقتی جرم به اندازه‌ی بردار $\Delta\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود، تغییر کل نیرو $-2k\,\Delta\mathbf{r}$ است. اما، از آنجایی که در مکان ترازمندی جرم، نیرو صفر است، نیروی کل وارد به جرم در مکان $\Delta\mathbf{r}$ از نقطه‌ی ترازمندی آن برابر $-2k\,\Delta\mathbf{r}$ است. به بیان دیگر، اساسا جرم در انتهای فنری با ثابت $2k$ است. پس، فنر در امتداد خط راستی (خطی بین مکان ترازمندی و نقطه‌ی اولیه‌ای که تلنگر ذره را در آن نقطه قرار می‌دهد) حرکت نوسانی هماهنگ ساده با بسامد $\sqrt{2k/m}$ خواهد داشت. این بسامد مستقل از جهت تلنگر است.

(ب): بنابر آنچه که در قسمت (الف) گفته شد، اگر جرم نسبت به مکان ترازمندی‌اش، در مکان $\Delta\mathbf{r}$ باشد نیروی کل وارد به آن $\mathbf{F}=-(k_1+k_2+\cdots+k_n)\Delta\mathbf{r}$ است. پس، جرم اساسا به انتهای فنری با ثابت $(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ وصل است و حرکت نوسانی ساده با بسامد $\sqrt{(k_1+k_2+\cdots+k_n)/m}$ در امتداد خط راست خواهد داشت. این بسامد مستقل از جهت اولیه‌ی تلنگر است.

فصل ۷

گرانش، نیروهای مرکزی و قانون های کپلر

۱-۷ نیروهای مرکزی:

بنا به تعریف، نیروی مرکزی نیرویی است که در راستای شعاع است و اندازه آن تنها به فاصله تا چشمه‌ی نیرو بستگی دارد. (یعنی به زاویه‌ی حول چشمه وابسته نیست). تعریف هم‌ارز این است که بگوییم، نیرویی مرکزی نیرویی است که پتانسیل آن تنها به فاصله از چشمه بستگی دارد. یعنی اگر چشمه در مبداء مختصات باشد آنگاه انرژی پتانسیل به صورت $\mathbf{V(r)} = V(r)$ باشد. یک چنین پتانسیلی به نیروی مرکزی می‌انجامد، چون

$$\mathbf{F(r)} = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۷-۱)$$

یعنی $\mathbf{F(r)}$ در راستای شعاع است و تنها به r وابسته است. نیروهای گرانش و الکتروستاتیک با پتانسیل $V(r) \propto 1/r$ مرکزی اند. افزون بر این، آن ها پایستار هم هستند. نیروی فنر با پتانسیل $V(r) \propto (r-\ell)^{2}$ هم مرکزی است؛ که در آن ℓ طول حالت ترازمندی فنر است.

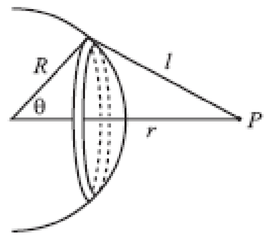
دو حقیقت مهم درباره‌ی نیروهای مرکز وجود دارد (۱): در طبیعت فراگیرند، پس بهتر است آنها را بشناسیم (۲): کار کردن با آنها آسان‌تر از آن است که فکر می‌کنید، زیرا وقتی V تنها تابع r باشد، معادله‌های حرکت بسیار ساده‌تر می‌شوند.
در این فصل نخست به نیروی گرانش خواهیم پرداخت و سپس نیروهای مرکزی را در حالت عمومی بررسی خواهیم کرد و سرانجام دو باره به گرانش باز خواهیم گشت و به مدارهای سیاره ها خواهیم پرداخت.

۲-۷ گرانش

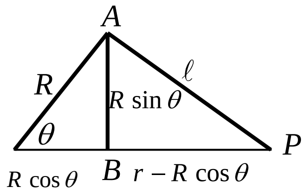
نیروی گرانش را به گونه‌ای همه می شناسیم. نیرویی است که ما را در روی زمین نگه می‌دارد و عامل گردش زمین در مداری پیرامون خورشید است. گرانش همین کار را با دیگر سیاره‌های سامانه‌ی خورشیدی هم می‌کند و برای جرم‌های آسمانی دیگر هم در کار است. در واقع، گرانش به خاطر جرم‌دار بودن اجسام است و یکی از چهار نیروی بنیادی طبیعت است که از ویژگی جرم ریشه می‌گیرد. بنابراین، نیروی گرانش بین هر دو جسم دارای جرم وجود دارد.
نیروی گرانش که از سوی جرم نقطه‌ای M به جرم نقطه‌ای دیگر m در فاصله‌ی r از جرم نخست وارد می‌شود به وسیله‌ی قانون نیوتون داده شده است.

$$F(r) = \frac{-GMm}{r^{2}} \qquad (۷-۲)$$

در اینجا علامت منها نشانگر آن است که این نیرو ربایشی است. اگر جرم نقطه‌ای M را با کره‌ای که جرمش M و شعاعش R است جایگزین کنیم، چه نیرویی به جرم نقطه‌ای m وارد می‌شود؟ با فرض اینکه کره، تقارن کروی دارد یعنی چگالی جرم تنها تابعی از r است، پاسخ هنوز هم $-GMm/r^{2}$ است. کره درست همانند جرم نقطه‌ای رفتار می‌کند که در مرکز آن قرار دارد. این یک نتیجه بسیار خوشایندی است. اگر این چنین نمی‌بود، عالم بسیار پیچیده‌تر از آنچه که هست می‌شد. به ویژه؛ توصیف رفتار کره‌های آسمانی دشوارتر می‌شد. برای اثبات این نتیجه، آسانتر است که نخست انرژی پتانسیل کره را حساب کنیم و سپس از آن مشتق بگیریم و نیرو را به دست آوریم. این کار بهتر از آن است که نیرو را مستقیم حساب کنیم. کافی است این نتیجه را برای یک پوسته‌ی کروی نازک نشان دهیم؛ چون هر کره‌ای عبارت است از جمع پوسته‌هایی که بر روی هم چیده شده‌اند. شیوه‌ی ما برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل حاصل از یک پوسته‌ی کروی در نقطه‌ی P، این است که پوسته را به



شکل ۱-۷



شکل ۲-۷

حلقه‌هایی که در شکل (۱-۷) نشان داده شده است تقسیم کنیم. فرض کنید شعاع پوسته R است و نقطه‌ی P به فاصله‌ی r از مرکز پوسته قرار دارد و حلقه با خطی که به مرکز کره وصل می‌شود زاویه‌ی θ بسازد. فاصله‌ی ℓ نقطه‌ی P تا حلقه، تابعی از R و r و θ است. می‌توان آن را به صورت زیر حساب کرد. در شکل (۲-۷) طول خط AB برابر است با $R\sin\theta$ و طول خط BP مساوی $r-R\cos\theta$ است. بنابراین، طول ℓ در مثلث ABP عبارت است از:

$$\ell=\sqrt{(R\sin\theta)^{2}+(r-R\cos\theta)^{2}}=\sqrt{R^{2}+r^{2}-2rR\cos\theta} \qquad (۷-۳)$$

مساحت حلقه بین θ و $\theta+d\theta$ حاصل ضرب پهنای ($R\,d\theta$) و پیرامون آن ($2\pi R\sin\theta$) است. اگر چگالی جرمی پوسته را با ($\sigma=M/(4\pi R^{2})$ نشان دهیم، می‌بینیم که در اثر این حلقه‌ی باریک، انرژی پتانسیل جرم m در نقطه‌ی P برابر $-Gm\sigma(R\,d\theta)(2\pi R\sin\theta)/\ell$ است. انرژی پتانسیل گرانشی

$$V(r)=-\frac{Gm_{1}m_{2}}{\ell} \qquad (۷-۴)$$

یک کمیت عددی است و هر جزء جرم روی حلقه در نقطه‌ی P سهمی در پتانسیل دارد. این سهم‌های کوچک با هم جمع می‌شوند. فاصله‌ی همه‌ی جزء جرم‌های روی حلقه تا نقطه‌ی P با هم برابرند و انرژی پتانسیل کل در نقطه‌ی P تنها به این فاصله بستگی دارد. جهت این فاصله بی‌ربط است (بر خلاف نیرو) . پس انرژی پتانسیل کل حاصل از کره در نقطه‌ی P عبارت است از جمع پیوسته‌ی سهم همه‌ی حلقه‌های کره:

$$V(r)=-\int_{0}^{\pi}\frac{2\pi\sigma GR^{2}m\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^{2}+r^{2}-2rR\cos\theta}}=\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\sqrt{R^{2}+r^{2}-2rR\cos\theta}\Big|_{0}^{\pi} \qquad (۷-۵)$$

توجه کنید که وجود $\sin\theta$ در صورت کسر، انتگرال‌گیری را آسان کرد. حال باید دو حالت را در نظر بگیریم. (۱) اگر $r>R$ باشد (یعنی بیرون کره) داریم:

$$V(r)=-\frac{2\pi\sigma GRm}{r}[(r+R)-(r-R)]=-\frac{G(4\pi R^{2}\sigma)m}{r}=-\frac{GMm}{r} \qquad (۷-۶)$$

که همان پتانسیل ذره‌ای به جرم M جایگزیده در مرکز پوسته است: چیزی که به دنبال آن بودیم. (۲) اگر $r<R$ باشد (درون کره) ، آنگاه داریم:

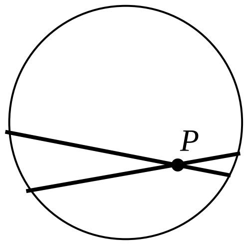
$$V(r)=-\frac{2\pi\sigma GRm}{r}[(r+R)-(R-r)]=-\frac{G(4\pi R^{2}\sigma)m}{R}=-\frac{GMm}{R} \qquad (۷-۷)$$

که مستقل از r است. حال که پتانسیل $V(r)$ را یافتیم، می‌توانیم گرادیان آن را حساب کنیم و در یک منها ضرب کنیم تا $F(r)$ را به دست آوریم. چون V تنها تابعی از r است گرادیان آن $\hat{\mathbf{r}}(d/dr)$ خواهد بود. پس:

$$F(r)=-\frac{GMm}{r^{2}} \quad ; \quad r>R$$
$$F(r)=0 \quad ; \quad r<R \qquad (۷-۸)$$

این نیروها، البته در جهت شعاع اند. کره‌ی توپر جمع پوسته‌های زیادی است که بر روی هم نهاده شده اند. پس ، اگر نقطه‌ی P در بیرون کره باشد، آنگاه نیرو در نقطه‌ی P عبارت است از $-GMm/r^{2}$ که در آن M جرم کل کره است. این نتیجه برای

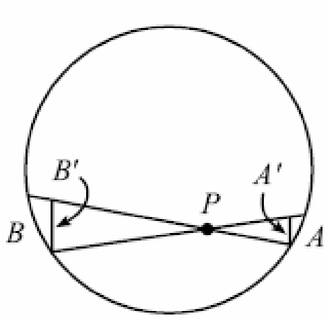
پوسته‌هایی هم که چگالی جرمی متفاوت دارند (اما چگالی جرمی هر پوسته همگن است) درست است.
اگر P در درون کره باشد، آنگاه فقط جرم موجود در درون کره‌ای هم مرکز که از P می‌گذرد مهم است، چون، بنا به معادله‌ی دوم رابطه (۷-۸) نیروی همه‌ی پوسته‌هایی که در بیرون از این ناحیه قرار دارند صفر می شود. تا جایی که به گرانش مربوط است جرم «بیرون» از P انگار وجود ندارد.



شکل (۳-۷)

البته خیلی روشن نیست که چرا نیرو در درون پوسته‌ی کروی صفر است. نقطه‌ی P را در شکل (۳ -۷) در نظر بگیرید. جزء جرم dm واقع در سمت راست پوسته، نیروی بزرگتری را در نقطه‌ی P ایجاد می‌کند تا جزء جرم موجود در سمت چپ آن. این به خاطر وابستگی $1/r^2$ است. فاصله‌ی جزء جرم dm موجود در سمت راست تا نقطه‌ی P کم تر از فاصله‌ی جزء جرم موجود در سمت چپ آن است. اما همانگونه که در شکل می‌بینید؛ جرم موجود در سمت چپ P بیشتر از جرم موجود در سمت راست آن است. این دو اثر یکدیگر را حذف می‌کنند. در مثال زیر این فرایند حذف شدن را نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۷: نخست نشان دهید که نیروی جرم های موجود در دو انتهای مخروط کوچک شکل (۳-۷) یکدیگر را در نقطه‌ی P حذف می‌کنند و سپس با استفاده از این نتیجه ثابت کنید که نیروی گرانش در درون پوسته‌ی کروی صفر است.
حل: در شکل (۴-۷) فرض کنید a فاصله رویه‌ی A تا نقطه‌ی P و b فاصله‌ی رویه‌ی B تا P باشند. مقاطع "عمودی" مخروط ها را بکشید و آنها را به ترتیب A' و B' بنامید. نسبت سطح های A' و B' عبارت است از a^2/b^2 که در واقع نسبت جرم‌های موجود در آنهاست. نکته‌ی کلید در اینجا آن است که زاویه‌ی بین صفحه‌های A و A' با زاویه‌ی بین صفحه‌های B و B' برابر است زیرا خط بین A و B در هر دو انتها، دایره را با یک زاویه قطع می‌کند. پس، نسبت مساحت‌های A و B هم a^2/b^2 است. اما نیروی گرانش به صورت $1/r^2$ کاهش پیدا می‌کند و این اثر دقیقاً نسبت مساحت‌های a^2/b^2 را حذف می‌کند. به بیان دیگر: مقدار جرم موجود در سطح‌های A و B با توان دو فاصله تا نقطه‌ی P افزایش می‌یابد و نیرو با عکس مجذور فاصله کاهش پیدا می‌کند. این دو یکدیگر را خنثی می‌کند. پس، نیروی‌های حاصل از A و B (که می‌توان جرم‌های نقطه‌ای پنداشت، چون مخروط را باریک فرض می‌کنیم) در نقطه P از نظر اندازه با هم برابر و در خلاف جهت یکدیگرند. در نتیجه نیرو در نقطه P صفر است.

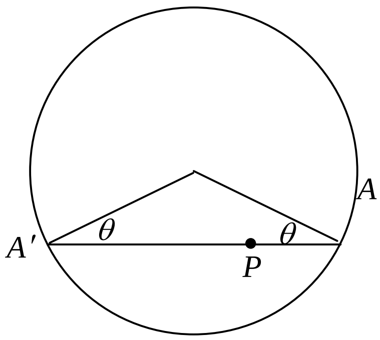


شکل ۴-۷)

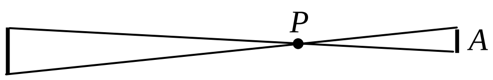
شاید به جاست که یک بار دیگر، با روشنی بیشتر این موضوع را بیان کنیم که نیروی گرانش در درون پوسته‌ی کروی صفر است و این درست به خاطر وابستگی $1/r^2$ نیروی گرانش است. نیروی کولمب نیز که به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند، این ویژگی را دارد. اگر چه سرشت نیروهای گرانش و کولمب متفاوت‌اند. دوباره نیروی وارد به نقطه P در درون یک پوسته‌ی کروی را در نظر بگیرید که جرم (یا بار الکتریکی) موجود در سطح کوچک A روی کره ایجاد می‌کند. نکته این است که می‌توانیم سطح کوچک A' را در سوی دیگر نقطه‌ی P بسازیم (شکل ۵-۷). کافی است از هر نقطه روی مرزهای A خطی بکشیم که از P بگذرد و به سطح پوسته برسد. به این ترتیب سطح A' (یا مرزهای آن) روی پوسته مشخص می‌شود. حال می‌خواهیم نشان

دهیم که نسبت سطح A' به سطح A با نسبت مربع فاصله‌های A' و A از P برابر است. چون نیرو با $1/r^2$ متناسب است نیروی حاصل از A' نیروی حاصل از A را در نقطه‌ی P حذف می‌کند. اگر A به نقطه‌ی P نزدیکتر باشد سطح A نیزآنگاه با نسبت درستی کوچکتر می‌شود تا نیرو را حذف کند. نخست، نسبت مساحت‌ها را بررسی کنیم. در شکل (٧–٥) اگر از P به ناحیه‌ی A نگاه کنیم، مرزهای A زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ را می‌پوشاند. بنا به تعریف A' نیز به زاویه‌ی فضایی یکسان $d\Omega$ باز شده است. مساحت بخشی از یک کره به شعاع ρ و به مرکز P با زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ برابر است با $\rho^2 d\Omega$ (این تعریف زاویه‌ی فضایی است) چون $d\Omega$ بسیار کوچک است، این سطح تقریباً تخت است. در نتیجه، با سطح ناحیه‌ای که عمود بر خط گذرنده از P و به فاصله‌ی ρ از آن است (سطح A' یا B' در شکل ٧–٤)، برابر است. در نتیجه، نسبت سطح‌های A و A' در شکل (٧–٥) همان نسبت مربع فاصله‌ی آنها از P است.

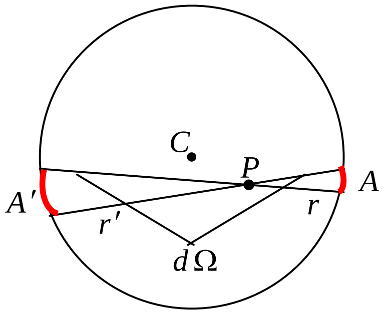
البته سطح‌های روی پوسته بزرگتر از سطح‌های عمودی در شکل (٧–٦) اند. چون خمیده‌اند، اما هر دو با یک زاویه خمیده‌اند. اگر در شکل (٧–٧)به مثلث متساوی‌الساقین نگاه کنید، می‌بینید که خط‌های مماس بر پوسته به شعاع‌ها عمودند. بنابراین، هر دو سطح خمیده به اندازه‌ی $1/\cos\theta$ از سطح‌های عمودی بزرگترند.



شکل ٧–٧



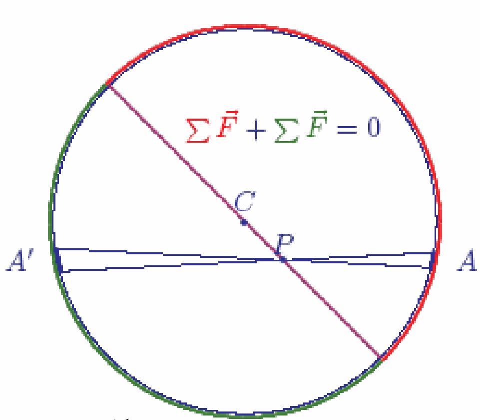
شکل ٧–٦



شکل ٧–٥

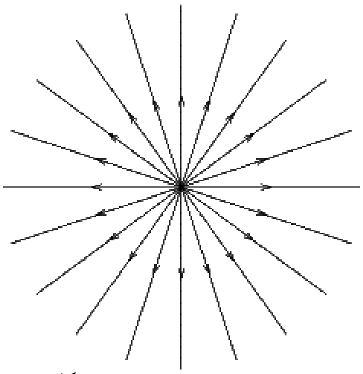
در نتیجه، نسبت سطح‌های خمیده همان نسبت مربع فاصله‌های آنها از نقطه‌ی P است. این نشان می‌دهد که به ازای هر جزء سطح در روی پوسته‌ی کروی، جزء سطح دیگری در سوی دیگر وجود دارد که در P نیرویی یکسان و در خلاف جهت ایجاد می‌کند. اما، این هنوز کافی نیست. باید مطمئن شویم که هر گاه روی کره انتگرال می‌گیریم هر کدام از این سطح‌های جزیی فقط یکبار به حساب می‌آیند. خوشبختانه، این کار آسان است. می‌توانیم صفحه‌ای را در نظر بگیریم که از نقطه‌ی P و مرکز کره می‌گذرد و با انتگرال‌گیری روی سطحی که در یک طرف این صفحه قرار دارد نیروی وارد به نقطه‌ی P را حساب کنیم. سطحی که این نیرو را حذف می‌کند در سوی دیگر صفحه‌ی گذرنده از P و مرکز کره قرار دارد، شکل (٧–٨). بنابراین، همه‌ی کره را در نظر گرفتیم. این اثبات بخش نخست قضیه‌ی نیوتون است که به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه: نیروی وارد به یک جرم نقطه‌ای یا بار الکتریکی نقطه‌ای از سوی پوسته‌ی کروی یا بار یکنواخت، در درون پوسته صفر و در بیرون پوسته برابر با نیرویی است که اگر همه‌ی جرم یا بار در مرکز کره متمرکز می‌شد، به جرم یا بار نقطه‌ای وارد می‌کرد.

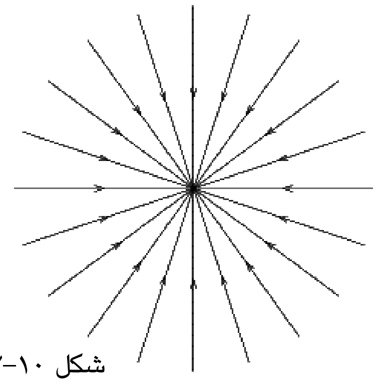


شکل ٧–٨

اثبات بخش دوم قضیه: اینک ما از مفهوم "خط‌های میدان" استفاده می‌کنیم تا بخش دوم قضیه را ثابت کنیم. می‌توان درباره‌ی نیروهای الکترو مغناطیسی به صورت زیر نگاه کرد. بار الکتریکی میدان الکتریکی تولید می‌کند که روی بارهای دیگر اثر می‌گذارد، به آنها نیرو وارد می‌کند. میدان الکتریکی را می‌توان با خط‌های میدان نشان داد که از بار مثبت آغاز (شکل۹-۷) و به بار منفی پایان می‌گیرند (شکل۱۰-۷). هرگز از فضای تهی آغاز نمی‌شوند و در فضای تهی نیز پایان نمی‌گیرند؛ از بار آغاز و به بار ختم می‌شوند. خط‌های میدان در جهت میدان الکتریکی‌اند و چگالی خط‌های میدان با شدت میدان الکتریکی متناسب است. یک بار تنها در همه سو به طور یکسان خط میدان گسیل می‌کند.اگر در دور و بر، بار دیگری وجود نداشته باشد، این خط‌های میدان پایان نمی‌گیرند و در نتیجه پخش می‌شوند. روی سطحی به شعاع r، خط‌ها روی مساحت $4\pi r^2$ پخش می‌شوند بنابراین چگالی خط‌های میدان به صورت $1/r^2$ کاهش می‌یابد. در نتیجه، میدان الکتریکی و بنابراین نیرو به صورت $1/r^2$ کاهش پیدا می‌کند. این دلیل بنیادی نیروی کولمب است. برای گرانش نیز خط‌های میدان بسیار شبیه خط‌های میدان نیروی الکتریکی است. چون در اینجا فقط یک نوع بار ـ که همان جرم است ـ وجود دارد و بارهای همنام یکدیگر را می‌ربایند، می‌توان فرض کرد که خط های میدان از بینهایت می‌آیند و در روی جرم‌ها به هم می‌رسند. مثل خط‌های میدان الکتریکی؛ خط‌های میدان گرانشی هم نمی‌توانند در جایی که جرم وجود ندارد پایان بگیرند. خوب؛ این چه ربطی به قضیه‌ی نیوتون دارد؟ پوسته جرم کروی همگن را در نظر بگیرید. توزیع جرم روی آن تقارن کروی دارد. این یعنی نیرو باید شعاعی و در هر دو سوی یکسان باشد. بگذارید این را نشان دهیم. نخست نیرو را در نقطه‌ای مانند $\mathbf{r}$ در نظر بگیرید. اگر توزیع جرم را حول محور $\mathbf{r}$ بچرخانیم، این نیرو نباید در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ تغییر کند و این یعنی نیرو در جهت $\mathbf{r}$ است؛ زیرا همه‌ی مؤلفه‌های عمودی نیرو هم با چرخش توزیع جرم خواهند چرخید (این یعنی ناوردایی چرخشی). پس، اگر یکبار بدانیم که نیرو شعاعی است آنگاه روشن است که نیرو در همه‌ی جهت‌ها یکسان است و اندازه‌ی آن تنها تابعی از $|\mathbf{r}|$ است. چون نیرو در درون پوسته صفر است، پس هیچ میدان گرانشی و در نتیجه خط میدان در درون پوسته وجود ندارد. همه‌ی خط‌های میدان از بینهایت شروع و به پوسته پایان می‌گیرند، صرف نظر از اینکه شعاع پوسته چه باشد، تعداد خط‌های نیرو که جرم کل روی کره تولید می‌کند، برای هر شعاعی یکسان است. این گزاره‌ی درستی است، چون اگر از فاصله‌ی دور به پوسته نگاه کنیم به صورت یک جرم نقطه‌ای به نظر خواهد آمد. بنابراین، همه‌ی خطهایی که از بینهایت سرچشمه می‌گیرند مستقل از این که شعاع پوسته چیست، باید به آن نقطه برسند (شکل۱۱-۷). خط‌های میدان در بیرون از پوسته نیز نمی‌توانند ناپدید یا ظاهر شوند زیرا در آنجا جرم وجود ندارد. پس در بیرون پوسته، خط‌های میدان کاملاً مستقل از شعاع پوسته است و در نتیجه مانند همانی است که به وسیله‌ی جرم نقطه‌ای جایگزیده در مرکز پوسته تولید می‌شود.

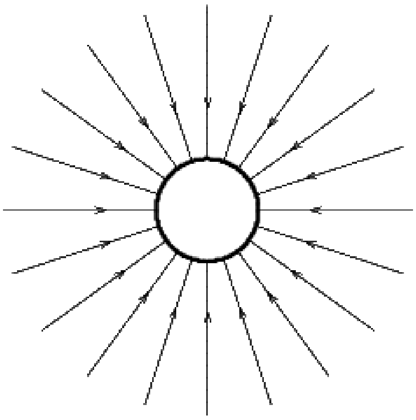


شکل ۹-۷



شکل ۱۰-۷

این پایان اثبات قضیه است. قضیه‌ی نیوتون پی‌آمدهای مهمی دارد. یکی از آنها نیروی گرانش وارد به جرم نقطه‌ای m است که در درون توزیع جرم کروی متقارن قراردارد و مرکز این توزیع جرم در مبداء مختصات است. اگر جرم نقطه‌ای در فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از مرکز این توزیع باشد، آنگاه بنا به قضیه‌ی نیوتون، نیرویی که توزیع جرم وارد به آن وارد می‌کند، برابر است با:



شکل ۱۱-۷

$$-\hat{\mathbf{r}}\frac{GMm}{r^2} \qquad (۷-۹)$$

که در آن M جرم موجود در **درون کره‌ی $\mathbf{r}$** است.

این نتیجه‌ی قضیه، برای یکی از نظریه‌های شگفت‌آور درباره‌ی عالم ـ وجود ماده‌ی تاریک ـ بسیار مهم است.

کدام یک بنیادی‌تر است؟ قانون $1/r^2$ یا خط های میدان؟ پاسخ سرراست این است که بگوییم نیرو به صورت $1/r^2$ است و این به ما اجازه می‌دهد تا نشان دهیم که نگاره‌ی خط های میدان معنی دارد. از سوی دیگر؛ می‌توانیم بگوییم خط‌های میدان بنیادی‌ترند و چون خط‌های میدان روی سطح کره پخش می‌شوند و سطح کره با r^2 متناسب است پس خط های میدان به ما می‌آموزد که نیرو به صورت $1/r^2$ است. واقعیت این است که براساس توصیفی بنیادی‌تر از سرشت این نیروها، ما بر این باوریم که نگاره‌ی خط‌های میدان بنیادی‌ترند. تا هنگامی که ما با سه بعد سر و کار داریم، البته فرقی نمی‌کند اما در نظریه‌هایی که ابعاد اضافی دارند؛ بنیادی پنداشتن خط‌های میدان اهمیت پیدا می‌کند. در n بعد، چون سطح کره‌ای به شعاع r به صورت r^{n-1} افزایش پیدا می‌کند، نیروهای الکتریکی و گرانشی به صورت $1/r^{n-1}$ کاهش می‌یابند! از قضیه‌ی نیوتون نتیجه می‌شود که نیروی گرانش بین دو جسم متقارن کروی مانند آن است که جرم‌شان در مرکزشان متمرکز باشد. این را از خطی بودن وقانون سوم نیوتون می‌توان نتیجه گرفت. دو جسم کروی A و B را در نظر بگیرید. نیروی که A به اجزاء جرم در روی B وارد می‌کند، مانند نیرویی است که اگر تمامی جرم A در مرکزش متمرکز می‌بود، به B وارد می کرد. بنا به قانون سوم نیوتون، این هم‌چنین بدان معنی است که نیروی وارد به جسم A از هر نقطه‌ی جرمی در B برابر با نیرویی است که اگر کل جرم B در مرکز آن متمرکز می‌بود، ایجاد می کرد؛ و می‌دانیم که این همانند نیروی بین دو جرم نقطه‌ای واقع در مرکز A و B است. یک نتیجه‌ی جالب این گفتار آن است که دو جسم کروی به یکدیگر گشتاور وارد نمی‌کنند. این نکته را به زودی در آغاز بخش ۵-۷ خواهیم دید

- **نیروی گرانش بین دو توده‌ی جرمی**

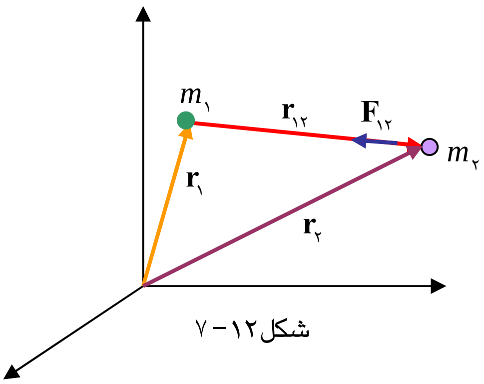
رابطه‌ی (۱-۷) نیروی گرانش بین دو جرم نقطه‌ای m و M را توصیف می‌کند که به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دارند. اگر به جای جرم‌های نقطه‌ای، توده‌های جرم می‌داشتیم چگونه می‌توانستیم نیروی گرانش بین آنها را حساب کنیم؟ برای این که بتوانیم این محاسبه را انجام دهیم، ناگزیریم اندکی نمادگذاری ها را تغییر دهیم. فرض کنید جرم‌های نقطه‌ای m_1 و m_2 نسبت به چارچوبی در مکان های $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ باشند؛ آنگاه رابطه‌ی (۱-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت که نیروی وارد از سوی ذره‌ی m_1 به ذره‌ی m_2 است:

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (۷-۱۰)$$

و در آن $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ بردارهای مکان m_1 و m_2 اند. $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ برداری است از m_1 به m_2. هم‌چنین $r_{21}=|\mathbf{r}_{21}|$ و بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ عبارت است از $\hat{\mathbf{r}}_{21}=\mathbf{r}_{21}/r_{21}$. این بردارها در شکل (۱۲-۷) نشان داده شده‌اند. چون نیروی گرانش نسبت به جرم‌ها خطی است (یعنی با توان اول جرم ها متناسب است) می‌توانیم نیروی گرانش وارد به یک جرم نقطه‌ای از سوی یک توزیع فضایی جرم $\rho(\mathbf{r})$ را حساب کنیم

$$\mathbf{F}_{21} = -Gm_2 \int_{V_1} d^3 r_1 \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (۷-۱۱)$$

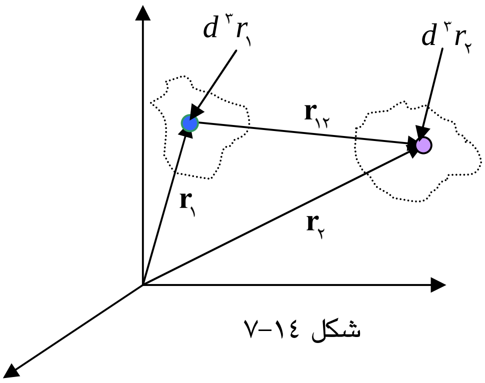
که در آن انتگرال روی توزیع جرم گرفته می‌شود (شکل۱۳-۷). توجه کنید که بردار مکان نسبی $\mathbf{r}_{21}$ به $\mathbf{r}_1$ بستگی دارد. می‌توانیم این شیوه را تعمیم بدهیم و فرض کنیم که m_2 هم به جای جرم نقطه‌ای، جسمی دارای بعد با توزیع جرم است. فرض کنید چگالی جرم جسم ۱ برابر $\rho_1(\mathbf{r})$ و چگالی جرمی جسم ۲ مساوی $\rho_2(\mathbf{r})$ باشد آنگاه رابطه‌ی (۱۰-۷) به صورت زیر درمی‌آید:



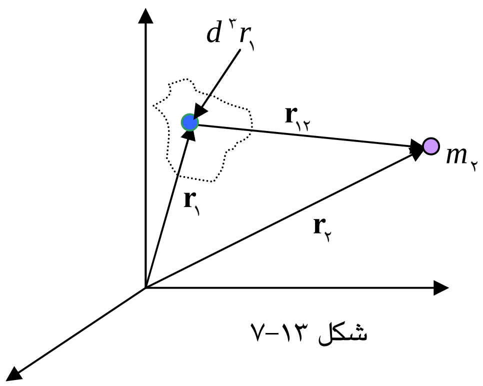
شکل۱۲-۷

$$\mathbf{F}_{21} = -G \int_{V_1}\int_{V_2} d^3 r_2 d^3 r_1 \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (۷-۱۲)$$

که نیروی گرانش بین دو جسم است (شکل۱٤-۷). باز هم توجه کنید که $\mathbf{r}_{21}$ با هر دوی $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ تغییر می‌کند. ترتیب انتگرال‌گیری مهم نیست.



شکل ۱٤-۷

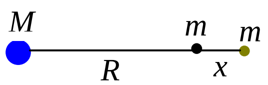


شکل ۱۳-۷

۳-۷ نیروهای کشندی

در زمین همواره با پدیده‌ی کشند (بالا آمدن و فرو افتادن آب اقیانوس‌ها) روبرو هستیم. علت این پدیده آن است که نیروی گرانش وارد به زمین از سوی یک جرم نقطه‌ای (یا یک جسم کروی مانند خورشید و ماه) در همه جای زمین یکنواخت نیست. هم جهت و هم اندازه‌ی این نیرو در جاهای مختلف روی زمین با هم فرق دارد. جهت نیروی وارد به قسمت های مختلف زمین به این دلیل با هم فرق دارند که خطهای نیرو در چشمه‌ی به وجود آورنده‌ی نیرو واگرا می‌شوند. اندازه‌ی نیرو در مکان‌های مختلف زمین هم به این دلیل با هم فرق دارند که نیروی گرانش به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند و البته فاصله‌ی نقاط مختلف زمین تا چشمه‌ی نیرو متفاوت است. این اثرها سبب می‌شوند که آب اقیانوس‌ها بالا بیایند و کشندهای روزانه به وجود آورند. بررسی پدیده‌ی کشند به دو دلیل سودمند است. نخست آنکه یک پدیده‌ی واقعی جهان است. دوم این که دستاویز خوبی برای به کار بردن بسط تیلور و تقریب زنی است. پیش از آنکه حالت عمومی را بررسی کنیم، به دو حالت خاص نیروی کشندی افقی و نیروی کشندی عمودی می پردازیم.

۱-۳-۷ نیروی کشندی افقی



شکل ۱٥-۷

در شکل(۱٥-۷) دو ذره به جرم‌های m در نقاط $(R,0)$ و $(R+x,0)$ قرار دارند. فرض کنید $x \ll R$. پرسش این است: سیاره‌ای به جرم M در مبداء مختصات است. تفاوت نیروی گرانش وارد به این دو جرم از سوی سیاره چیست؟ با توجه به این که $x \ll R$ است، تفاوت

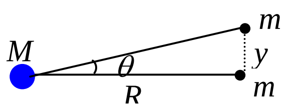
نیروی گرانش عبارت است از:

$$\frac{-GMm}{(R+x)^{2}}-\frac{-GMm}{R^{2}}\approx\frac{-GMm}{R^{2}+2Rx}+\frac{GMm}{R^{2}}=\frac{GMm}{R^{2}}\left(\frac{-1}{1+2x/R}+1\right)$$
$$\approx\frac{GMm}{R^{2}}[-(1-2x/R)+1]=\frac{2GMmx}{R^{3}} \qquad (۷-۱۳)$$

این نتیجه برابر است با x ضربدر مشتق نیرو نسبت به x (مشتق گیری همان حساب کردن تفاضل‌ها است). این تفاوت نیروی گرانش در دو نقطه در راستای خطی است که جرم‌های m را به هم وصل می‌کند و اثرش این است که جرم‌های m را از هم دور کند. این نیرو به طور خطی با فاصله‌ی x دو جرم m متناسب و با R^{3} نسبت وارون دارد. نتیجه‌ی بالا نیروی کشندی افقی است.

۷-۳-۲ نیروی کشندی عمودی

در شکل (۱۶-۷) دو ذره به جرم m در نقاط $(R,0)$ و (R,y) قرار دارند و $y \ll R$ است. سیاره‌ی M در مبداء مختصات قرار دارد. اختلاف نیروی گرانش که سیاره به این دو ذره وارد وارد می کند چقدر است؟ فاصله‌ی هر دو جرم از M (با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث) یکسان و برابر R است (با تقریب از مرتبه‌ی دو در y/R). پس، اندازه‌ی نیروهای وارد به آنها اساساً یکسان است (تا مرتبه‌ی نخست در y/R). جهت آنها تنها چیزی است که متفاوت است. از شکل (۱۶-۷) می توان دید که نیروی وارد به جرم پایینی مولفه‌ی y ندارد، اما نیروی وارد به جرم بالایی مؤلفه‌ی y دارد. بنابراین، تفاوت نیروهای وارد به این دو جرم تنها در مولفه‌ی y آنهاست. اندازه‌ی این مؤلفه برای جرم بالایی عبارت است از:



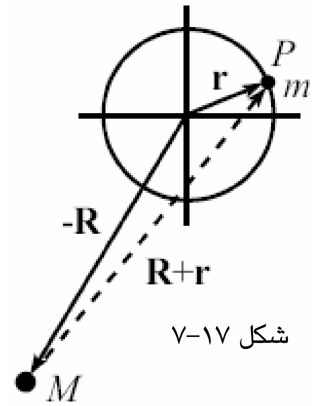
شکل ۱۶-۷

$$\frac{GMm}{R^{2}}\sin\theta\approx\frac{GMm}{R^{2}}\left(\frac{y}{R}\right)=\frac{GMmy}{R^{3}} \qquad (۷-۱۴)$$

این تفاوت نیرو در راستای خطی است که جرم‌ها را به هم وصل می‌کند و اثرش آن است که جرم‌ها را به هم نزدیک می‌کند. مانند حالت پیش، نیروی کشندی عمودی هم با جدایی y به‌طور خطی و با فاصله تا چشمه به صورت عکس مکعب متناسب است. این تقاوت، نیروی کشندی عمودی است.

۷-۳-۳ حالت عمومی

حال نیروی کشندی وارد بر جرمی دلخواه را حساب می کنیم که در مدار دایره‌ای شکل به شعاع r قرار دارد. در شکل (۱۷-۷) فرض کنید مرکز دایره در مبداء مختصات است (دایره= زمین) و نیرو را جرم M جایگزیده در $-\mathbf{R}$ ایجاد می کند.



شکل ۱۷-۷

می خواهیم نیروی کشندی حاصل از M را نسبت به مبداء حساب کنیم. توجه کنید که برداری که M را به یک نقطه مانند P در روی دایره مربوط می کند $\mathbf{R}+\mathbf{r}$ است و طبق معمول فرض می‌کنیم $|\mathbf{R}|\gg|\mathbf{r}|$ باشد. نیروی گرانش ربایشی را می‌توان به صورت $\mathbf{F}(\mathbf{x})=-GMm\,\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^{3}$ نوشت که در آن $\mathbf{x}$ برداری از M به نقطه‌ی مورد نظر است. یعنی فرض کنید $\mathbf{x}=\mathbf{R}+\mathbf{r}$. بنابراین، نیروی کشندی عبارت است از تفاوت نیروی گرانش وارد به جرم m در نقطه‌ی P و نیروی وارد به جرم m در مبداء مختصات.

نخستین کار ما این است که جمله‌ی $|\mathbf{R}+\mathbf{r}|$ را با استفاده از $r \ll R$ بازنویسی کنیم.

$$\left|\mathbf{R}+\mathbf{r}\right|=\sqrt{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{r})}=\sqrt{R^{۲}+r^{۲}+۲\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}\approx R\sqrt{۱+۲\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^{۲}}\approx R\left(۱+\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^{۲}}\right) \qquad (۷-۱۵)$$

دوباره با استفاده از $r \ll R$ داریم:

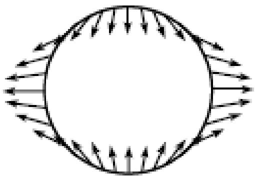
$$\frac{\mathbf{F}_t(\mathbf{r})}{GMm}\approx-\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^{۳}(۱+\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^{۲})^{۳}}+\frac{\mathbf{R}}{R^{۳}}\approx\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^{۳}(۱+۳\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^{۲})}+\frac{\mathbf{R}}{R^{۳}}\approx-\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^{۳}}(۱-\frac{۳\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^{۲}})+\frac{\mathbf{R}}{R^{۳}} \qquad (۷-۱٦)$$

چون $\hat{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{R}/R$ است، سرانجام داریم. (یکبار دیگر از $r \ll R$ استفاده کنید)

$$\mathbf{F}_t(r)\approx\frac{GMm(۳\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{r})}{R^{۳}} \qquad (۷-۱۷)$$

این نیروی کشندی است. می‌توان آن را ساده‌تر نوشت. اگر M را روی قسمت منفی محور x قرار دهیم، (برای این کار کافی است محورها را بچرخانیم) در این صورت خواهیم داشت: $\hat{\mathbf{R}}=\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}=x$ و رابطه بالا می‌گوید که نیروی کشندی در نقطه‌ی $P=(x\,,y)$ عبارت است از:

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{r})\approx\frac{GMm}{R^{۳}}(۳x\hat{\mathbf{x}}-(x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}))=\frac{GMm}{R^{۳}}(۲x\,,-y) \qquad (۷-۱۸)$$


شکل ۱۸-۷

در شکل (۱۸-۷) نیروهای کشندی در مکان‌های مختلف دایره نشان داده شده است. اگر زمین جسم سخت می‌بود، آنگاه نیروهای کشندی بر روی آن بی‌اثر می‌شد. اما آب اقیانوس‌ها به راحتی جابه‌جا می‌شوند. آب‌های روی کره‌ی زمین در راستای خط بین زمین- ماه و نیز بین زمین- خورشید برآمدگی پیدا می‌کنند. در زیر این برآمدگی‌های آب، زمین می‌چرخد و کسی که روی زمین است می‌بیند که این برآمدگی‌ها نسبت به زمین می‌چرخند. همان گونه که از شکل (۱۸-۷) می‌بینیم، این اثر در هر روز دو برآمدگی و دو فرو رفتگی ایجاد می‌کند. البته تعداد برآمدگی‌ها دقیقا دو تا نیست چون کره‌ی ماه دور زمین می‌گردد، اما این حرکتی آهسته است و یک ماه طول می‌کشد. بنابراین، برای منظور ما ، فرض ثابت بودن کره‌ی ماه پذیرفتنی است. توجه کنید که ماه آب‌های روی زمین را که در سمت دورتر از آن قرار دارد، **پس نمی‌راند**، بلکه آنها را هم به سوی خود می کشد. اما این کشش، ضعیف‌تر از کشش بخش خاکی زمین است. کشندها اثرهای مقایسه‌ای اند.

دو نکته: ۱. دو جرم یکسان را در روی زمین در نظر بگیرید که فاصله‌ی معینی از هم دارند. نیروی گرانشی خورشید بر روی آنها بسیار بزرگ‌تر از نیروی گرانشی ماه است؛ در حالی‌که نیروی کشندی مربوط به خورشید روی آنها اندکی کوچک‌تر از نیروی کشندی مربوط به ماه است. به طور کیفی، نسبت نیروهای گرانش برابر است با

$$\frac{F_S}{F_M}=\left(\frac{GM_S}{R_{E,S}^{۲}}\right)\Big/\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^{۲}}\right)=\frac{٦,۱۰^{-۳}\ \mathrm{m/s^{۲}}}{۳,٤\times۱۰^{-٥}\ \mathrm{m/s^{۲}}}\approx۱۷٥ \qquad (۷-۱۹)$$

و نسبت نیروهای کشندی عبارت است از

$$\frac{F_{t,S}}{F_{t,M}}=\left(\frac{GM_S}{R_{E,S}^{۳}}\right)\Big/\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^{۳}}\right)=\frac{٤,۱۰^{-۱٤}\ \mathrm{s^{-۲}}}{۹,۱۰^{-۱٤}\ \mathrm{s^{-۲}}}\approx۰,٤٥ \qquad (۷-۲۰)$$

۲. رابطه‌ی (۲۰-۷) نشان می‌دهد که اثرهای کشندی ماه به تقریب دو برابر اثرهای کشندی خورشید است. این آموزه‌ی جالبی را در باره‌ی چگالی‌های ماه و خورشید به دست می‌دهد. برای مثال، نیروی کشندی از سوی ماه متناسب است با

$$\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^3}\right)=\left(\frac{G\left(4\pi r_M^3/3\right)\rho M}{R_{E,M}^3}\right)\propto \rho M\left(\frac{r_M}{R_{E,M}}\right)^3\approx \rho M\,\theta_M^3 \qquad (۷-۲۱)$$

که در آن θ_M نصف اندازه‌ی زاویه‌ی رویت ماه است. نیروی کشندی خورشید هم یک چنین رابطه‌ای دارد. اما اندازه‌های زاویه های رویت ماه و خورشید، به تقریب با هم برابرند. این را می توانید با نگاه کردن به آنها (بهتر است با یک عدسی این کار را بکنید) و یا با توجه به این که گرفتِ کامل خورشید پدیده‌ی کمیاب است، ببینید. بنابراین، دو رابطه‌ی (۲۰-۷) و (۲۱-۷) با هم می گویند که چگالی ماه به تقریب دو برابر چگالی خورشید است.

۴-۷ **گشتاور** : **تکانه ی زاویه ای**

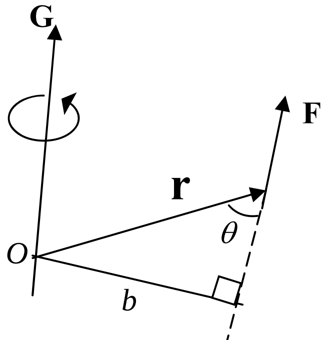
گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ که به ذره‌ای واقع در مکان $\mathbf{r}$ وارد می‌شود، نسبت به مبدأ O با حاصل ضرب برداری

$$\mathbf{G}=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۷-۲۲)$$

زیر تعریف می‌شود. مولفه‌های برداری $\mathbf{G}$ **گشتاور حول محورهای** $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ ، $\mathbf{z}$ اند.

$$G_x=yF_z-zF_y \;,\; G_y=zF_x-xF_z \;,\; G_z=xF_y-yF_x \qquad (۷-۲۳)$$

جهت بردار $\mathbf{G}$ همانند بردار یکه عمود بر صفحه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است و محوری را تعریف می‌کند که نیرو می‌خواهد حول این محور، ذره را به چرخش وادارد. اندازه‌ی گشتاور $\mathbf{G}$ برابر است با $G=rF\,Sin\,\theta=bF$ که در آن زاویه‌ی θ، زاویه‌ی بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است و b فاصله‌ی عمودی از مرکز تا راستای نیرو است. این کمیت هادر شکل (۱۹-۷) نشان داده شده اند. گشتاور نیرو در دینامیک جسم سخت نقش مهمی دارد و ما در فصل های آینده به آن خواهیم پرداخت. به همین ترتیب، بردار **تکانه‌ی زاویه‌ای** (یا **گشتاور تکانه**) یک *ذره نقطای* حول مرکز را که در مکان $\mathbf{r}$ با تکانه‌ی $\mathbf{p}$ حرکت می‌کند می‌توان تعریف کرد.



شکل ۱۹-۷

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \qquad (۷-۲٤)$$

مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای روی محور x ، y و z عبارتند از:

$$L_x=m\,(y\,\dot{z}-z\,\dot{y}) \quad , \quad L_y=m(z\,\dot{x}-x\,\dot{z}) \quad , \quad L_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})$$

برای تأکید در تمایز بین $\mathbf{p}$ و $\mathbf{L}$ ، بیشتر وقت‌ها $\mathbf{p}$ را **تکانه‌ی خطی** می‌نامند. توجه کنید که بردار $\mathbf{L}$ به این بستگی دارد که مبداء مختصات را کجا برگزینیم. آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای را با مشتق‌گیری نسبت به زمان از رابطه‌ی (۲٤-۷) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{L}}=m\,\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})=m\,(\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}) \qquad (۷-۲٥)$$

(توجه کنید که قاعده‌ی مشتق‌گیری از حاصلضرب، درباره‌ی حاصلضرب بردارها هم درست است به شرط آنکه ترتیب بردارها حفظ شود). جمله‌ی نخست در رابطه‌ی (۲٥-۷) یعنی $\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}$ برابر صفر است چون این جمله ضرب برداری یک بردار در خودش است. جمله‌ی دوم، $m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}$، را می‌توان به صورت $\mathbf{r}\times(m\ddot{\mathbf{r}})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ نوشت که همان بردار گشتاور $\mathbf{G}$ است. پس، به نتیجه‌ی مهمی رسیدیم: آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای با گشتاور نیروی اعمال‌شده برابر است.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{G} \qquad (۷-۲۶)$$

این نتیجه را با آهنگ تغییر تکانه‌ی خطی، یعنی $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ مقایسه کنید.

چون تعریف ضرب برداری به قرارداد پیچش انگشتان دست راست (قاعده انگشتان دست راست) بستگی دارد؛ جهت بردارهای $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ نیز به این قرارداد وابسته است. بردارهایی از این دست را بردار **مساحت** می‌نامند. از تعریف $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ چنان برمی‌آید که حاصل‌ضرب برداری دو بردار معمولی $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ یعنی $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ یک بردار معمولی نیست زیرا جهت آن با تغییر دستوارگی دستگاه مختصات وارون می‌شود. جهت بردار معمولی مستقل از سامانه‌ی مختصات است و بردار **قطبی** نام دارد. برداری که جهتگیری آن به دستوارگی دستگاه مختصات بستگی داشته باشد، بردار **محوری** یا **شبه‌بردار** نام دارد.

بردار گشتاور نیرو، $\mathbf{G}$، و بردار تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ بردارهای محوری اند. با این حال، ضرب خارجی بردار محوری و بردار قطبی، خود یک بردار قطبی می‌شود. تمایز بین بردارهای قطبی و محوری تنها هنگامی به وجود می‌آید که بخواهیم هر دو دستگاه مختصاتِ راست دستواره و چپ دستواره را در نظر بگیریم. بردارهای محوری بیشتر به چرخش حول یک محور مربوط اند. بنابراین، آنچه که به طور فیزیکی به آن تأکید می‌شود جهت در راستای یک محور نیست، بلکه راستگرد یا چپ‌گرد بودن چرخش حول محور است.

۷-۵ نیروهای مرکزی؛ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

بنا به تعریف، هر نیرویی که راستای آن در امتداد شعاع باشد و اندازه‌اش فقط به فاصله از مرکز نیرو بستگی داشته باشد، **نیروی مرکزی** نامیده می‌شود. بنابراین، هر نیرویی که جهتش همواره به سوی یک نقطه‌ی ثابت یا بیرون از نقطه‌ی ثابت باشد نیروی مرکزی است. نقطه‌ی ثابت را **مرکز نیرو** می‌گویند. اندازه‌ی نیروی مرکزی فقط تابعی از فاصله تا نقطه‌ی ثابت است. اگر مبدأ مختصات را این نقطه‌ی ثابت انتخاب کنیم این بدان معنی است که نیروی مرکزی $\mathbf{F}$ همواره با بردار مکان $\mathbf{r}$ موازی است. چون ضرب برداری دو بردار موازی همواره صفر است، پس شرط این که $\mathbf{F}$ مرکزی باشد این است که گشتاور آن حول مرکز صفر باشد.

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0 \qquad (۷-۲۷)$$

از رابطه‌ی (۲۶-۷) نتیجه می‌شود که اگر نیرو مرکزی باشد آنگاه تکانه‌ی زاویه‌ای مقدار ثابتی است و داریم:

$$\text{اگر } \mathbf{F} \text{ مرکزی باشد} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{ثابت} \qquad (۷-۲۸)$$

این قانون **پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای** در ساده‌ترین شکل آن است و برای منظور کنونی ما بسنده است. بحث فراگیرتر آن را به آینده واگذار می‌کنیم. چرا تکانه ی زاویه‌ای را با $\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ تعریف کردیم و نه با چیز دیگری مانند $\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$ یا $r^2p^5\mathbf{r}$ ؟ چون با این تعریف به برخی ویژگی‌های زیبای $\mathbf{L}$ که در رابطه‌ی (۲۴-۷) تعریف شد، می‌رسیم. یکی از این ویژگی‌ها را با قضیه ۱-۷ بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱-۷ اگر ذره‌ای فقط تحت تاثیر نیروی مرکزی باشد آنگاه تکانه‌ی زاویه‌ای آن پایسته است. یعنی

$$\text{اگر } V(\mathbf{r}) = V(r) \quad \text{آنگاه } \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \qquad (۷-۲۹)$$

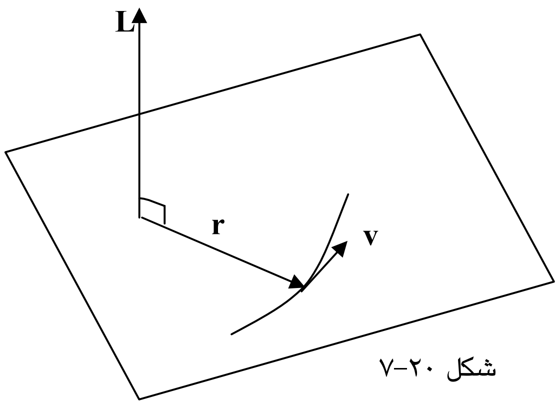
اثبات: اثبات این قضیه در بالا داده شد. بگذارید یک بار دیگر آن را بیان کنیم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{v}\times(m\mathbf{v})+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0 \qquad (۷-۳۰)$$

چون $\mathbf{F}$ نیروی مرکزی است و $\mathbf{F}\propto\mathbf{r}$ (یادتان می‌آید این را در کجا گفتیم ؟) در نتیجه، جمله‌ی دوم صفر است. جمله‌ی اول هم صفر است چون ضرب خارجی بردار $\mathbf{v}$ با خودش است. ■

در رابطه‌ی (۷-۲۸) و نیز در رابطه‌ی (۷-۳۰) به واقع دو گزاره مهم نهفته است: (**الف**) جهت $\mathbf{L}$ ثابت است. (**ب**) اندازه‌ی $\mathbf{L}$ ثابت است. اینک به این دو گزاره می‌پردازیم.

جهت $\mathbf{L}$، جهت بردار یکه‌ی عمود بر صفحه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ است. این که جهت $\mathbf{L}$ ثابت است یعنی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ باید همواره در یک صفحه‌ی باشند. به بیان دیگر، حرکت ذره در همه‌ی زمان‌ها محدود به صفحه‌ای است که با بردارهای اولیه‌ی مکان و سرعت ساخته می‌شود. شکل (۷-۲۰) را ببینید. از نظر فیزیکی این البته روشن است؛ زیرا نیرو مرکزی است و در نتیجه مولفه‌ای در راستای عمود بر صفحه ندارد (به خاطر بیاورید: نیروی مرکزی همواره با بردار مکان موازی است) و چون مولفه‌ی عمودی سرعت اولیه صفر است، باید برای همه‌ی زمان‌ها صفر باقی بماند. بگذارید این نتیجه را به صورت قضیه بیان بکنیم.



شکل ۲۰-۷

قضیه‌ی ۲-۷ اگر ذره‌ای فقط تحت تاثیر نیروی مرکزی باشد حرکت آن همواره در یک صفحه انجام می‌گیرد.

اثبات: صفحه‌ی P را که با بردارهای $\mathbf{r}_0$ (مبداء مختصات را در مکان چشمه‌ی نیرو برگزیده ایم) و $\mathbf{v}_0$ ساخته می‌شود در زمان t_0 در نظر بگیرید (توجه کنید که این صفحه برای حالتی که بردار $\mathbf{v}_0=0$ یا $\mathbf{r}_0=0$ باشد خوش تعریف نیست. اما در این حالت‌های خاص به آسانی می‌توان نشان داد که حرکت شعاعی است که محدودیتی بیش از حرکت در صفحه است.) P صفحه‌ای است که به بردار $\mathbf{n}_0=\mathbf{r}_0\times\mathbf{v}_0$ عمود است. اما در قضیه‌ی (۷-۱) نشان دادیم که $\mathbf{r}\times\mathbf{v}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}/m$ با زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین، برای همه‌ی زمان‌های t داریم $\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\mathbf{n}_0$ و چون $\mathbf{r}$ به یقین بر $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ عمود است پس $\mathbf{r}$ به $\mathbf{n}_0$ هم عمود است. این یعنی $\mathbf{r}$ در صفحه‌ی P قرار دارد. ■

به این قضیه نگاهی شهودی بیندازیم: چون بردارهای اولیه‌ی مکان، سرعت و شتاب (که با $\mathbf{F}$ متناسب است و بنابراین، با $\mathbf{r}$ هم متناسب است) همگی در صفحه‌ی P قرار دارند. پس، در آن لحظه دو سوی صفحه هم‌ارزند و برای ذره انگیزه‌ای وجود ندارد که از صفحه خارج شود و به یک سوی آن برود. پس، در آن لحظه در صفحه باقی می‌ماند. همین استدلال را برای هر لحظه‌ی بعدی هم می‌توان تکرار کرد و نتیجه گرفت که ذره برای همیشه در صفحه باقی می‌ماند.

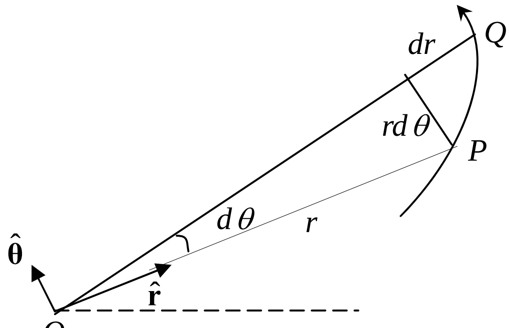
برای فهمیدن بخش دوم قانون، یعنی ثابت‌بودن اندازه‌ی $\mathbf{L}$؛ بهتر است به مختصات قطبی r و θ در صفحه‌ی حرکت توجه کنیم. در بازه‌ی زمانی کوتاه dt ، مختصات ذره به اندازه dr و $d\theta$ تغییر می‌کند. مسافت پیموده‌شده در راستای شعاعی dr و در راستای عمود بر شعاع $r\,d\theta$ اند (نگاه کنید به شکل ۲۱-۷). بنابراین، سرعت دو مؤلفه دارد: یکی در راستای شعاع و دیگری عمود بر شعاع. این مولفه‌ها عبارتند از:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad , \qquad v_\theta = \frac{r\,d\theta}{dr} = r\dot{\theta} \tag{۷-۳۱}$$

پس، اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای عبارت است از:

$$L = mrv_\theta = mr^{۲}\dot{\theta} \tag{۷-۳۲}$$

به دست آوردن رابطه‌ی (۳۲-۷) ساده است. چون بردار $\mathbf{L}$، حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ است. می‌توان آن را به صورت $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{r}\times(m\,\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times(m v_r\,\hat{\mathbf{r}} + m v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$ نوشت که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردارهای یکه در راستای r و θ اند. اگر به جای $v_r = \dot{r}$ و $v_\theta = r\dot{\theta}$ قرار دهیم خواهیم داشت: $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times(m\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + m\,r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$. ضرب برداری جمله‌ی اول صفر است؛ چون $\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$ است. یعنی بردار $\mathbf{L}$ در راستای شعاع مولفه ندارد و این البته از اول هم روشن بود، چون $\mathbf{L}$ برداری است که به $\mathbf{r}$ عمود است. پس، $\mathbf{L}$ تنها یک مولفه در راستای $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}$ یا در راستای محور عمود بر صفحه، $\hat{\mathbf{z}}$، دارد و مقدار آن عبارت است از: $L = m\,r^2\dot{\theta}$ که همان رابطه‌ی (۳۲-۷) است. اینک به توصیف هندسی ثابت بودن $\mathbf{L}$ می‌پردازیم. دوباره به شکل (۲۱-۷) بنگرید و فرض کنید که ذره‌ای به جرم m مسیر خمیده را تحت تأثیر یک نیروی مرکزی با مرکز نیروی O می‌پیماید. برای



شکل ۲۱-۷

زاویه‌ی $d\theta$ بسیار کوچک مساحت مثلث کوچک OPQ برابر است با $dA = (۱/۲)(r\cdot rd\theta) = (۱/۲)(r^{۲}d\theta)$. این مساحتی است که بردار شعاعی در جابه‌جایی به اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی $d\theta$ جارو می‌کند. آهنگ جاروکردن این مساحت عبارتست از

$$\frac{dA}{dt} = \frac{۱}{۲}r^{۲}\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲}r^{۲}\dot{\theta} = \frac{L}{۲m} \tag{۷-۳۳}$$

یا $r^{۲}\dot{\theta} = ۲\dot{A}$. یعنی $r^{۲}\dot{\theta}$ (**گشتاور سرعت**) دو برابر آهنگ مساحتی است که بردار شعاعی $\mathbf{r}$ جارو می‌کند. چون L و m در رابطه‌ی (۳۳-۷) مقدارهای ثابت اند، پس، آهنگ جارو شدن مساحت هم مقدار ثابتی است. این بیان **قانون دوم کپلر** است .

یکی از کاربردهای مهم رابطه‌ی (۳۳-۷) حرکت سیاره‌هاست. حرکت سیاره‌ها تحت اثر نیروی گرانش انجام می‌گیرد که گونه‌ی خاصی از نیروهای مرکزی است ولی نتیجه‌ی (۳۳-۷) برای هر نیروی مرکزی عمومی صادق است. رابطه (۳۳-۷) حتی برای نیروهای ناپایستار هم به کار می‌رود (مثل، ذره‌ای که به انتهای نخی بسته شده است و نخ به آهستگی به سوی مرکز کشیده می‌شود.) بیان همارز این قانون را می‌توان به طور مستقیم از رابطه‌ی (۳۲-۷) نتیجه گرفت: مولفه‌ی عمود بر شعاع سرعت، v_θ، با عکس فاصله از مرکز، r ، تغییر می‌کند: $v_\theta = L/mr$.

وقتی که نیرو هم مرکزی و هم پایستار است؛ دو قانون پایستگی انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، رابطه‌ی (۲۸-۷) یا (۳۰-۷) آگاهی های فراوانی درباره‌ی حرکت ذره به دست می‌دهند که دربخش بعد به آن می پردازیم.

اگر به جای مختصات قطبی از مختصات کارتزی استفاده می‌کردیم؛ رابطه‌ی (۳۳-۷) به صورت زیر درمی‌آمد

$$(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}) = ۲\dot{A} \tag{۷-۳۴}$$

(اثبات به عهده‌ی دانشجو واگذار شده است). این رابطه آموزنده است. سمت چپ آن مساوی L/m است که $۱/m$ برابر مؤلفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای در راستای محور z است

$$L_z = m\, r^۲\dot{\theta} = m(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}) = ۲m\,\dot{A} \qquad (۷-۳۵)$$

(چون حرکت محدود به صفحه‌ی $x-y$ است $\mathbf{L}$ فقط یک مولفه دارد که در راستای محور z است و بنابراین ، بر صفحه‌ی $x-y$ عمود است.) برای نیروهای مرکزی چون L ثابت حرکت است، پس، اگر m ثابت باشد، **سرعت سطحی** $\dot{A}$ هم ثابت است. اگر سرعت حرکت ذره خیلی زیاد نباشد که سبب تغییر در جرم جسم بشود آنگاه سرعت سطحی ثابت می‌ماند. این نگرانی به سبب نسبیت انیشتین برای سرعت‌های زیاد اهمیت پیدا می‌کند.

توجه کنید که ثابت‌بودن سرعت سطحی برای مدار خاصی حول مرکز نیروست و نباید از آن نتیجه گرفت که برای هر مداری مقدارش همان است. در حالت کلی؛ مقدار ثابت $\dot{A}$ برای مدارهای گوناگون، متفاوت است. با این حال، مثال زیر وضعیت جالبی را توصیف می‌کند که در آن برای نیرویی، سرعت سطحی همه‌ی مدارهای دایره‌ای با مرکزهای منطبق بر مرکز نیرو یکسان است.

مثال ۷-۲ نیروی مرکزی ربایشی $f(r)$ را چنان بیابید که همه‌ی مدارهای دایره‌ای هم مرکز با مرکز نیرو، سرعت سطحی یکسان داشته باشند.

حل: نیرویی که جسم را وادار به حرکت دایره‌ای می‌کند $mv^۲/r$ است که در آن m و v، به ترتیب جرم و سرعت جسم و r شعاع مدار است. پس، $mv^۲/r = f\,(r)$. اما $v = r\dot{\theta}$ و بنابراین

$$\frac{m\,(r\dot{\theta})^۲}{r} = \frac{m}{r^۳}\left(r^٤\dot{\theta}^۲\right) = f\,(r)$$

چون $r^۲\dot{\theta} = ۲\dot{A}$ مقدار ثابتی است که اگر آن را با $۲h$ نشان دهیم، خواهیم داشت $f\,(r) = ٤mh^۲/r^۳$. بنابراین، نیروی ربایشی که به ازای آن مدارهای دایره‌ای سرعت سطحی یکسان دارند، نیرویی است که با عکس توان سوم شعاع تغییر کند. این همچنین بدین معنی است که اگر مرکز مدارها و مرکز نیرو بر هم منطبق باشند، آنگاه برای این قانون نیرو، تکانه‌ی زاویه‌ای همه‌ی مدار های دایره‌ای یکسان و برابر $L = ۲mh$ اند.

۷-۶ پتانسیل موثر

مهم‌ترین نیروی پایستار مرکزی، نیروی گرانش و نیروی الکتروستاتیک است که از "قانون عکس مجذور" یا از قاعده‌ی $۱/r^۲$ پیروی می‌کنند. در این بخش به این حالت خاص خواهیم پرداخت. بحث خود را با مسئله‌ی خاصی که حل معادله‌های حرکت آن ساده‌تر است و آن‌ها را می‌شناسیم آغاز می‌کنیم: نوسانگر هماهنگ سه بعدی.

۷-۶-۱ نوسانگر هماهنگ همسانگرد

ذره‌ای را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی بازگرداننده‌ی متناسب با فاصله از مرکز، حرکت می‌کند.

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \qquad (۷-۳٦)$$

که در آن k مقدار ثابتی است. برای معادله‌ی حرکت، از $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ استفاده کنید. داریم

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = ۰ \qquad (۷-۳۷)$$

و اگر آن را برحسب مؤلفه‌هایش بنویسیم، خواهیم داشت

$$m\ddot{x} + kx = ۰, \qquad m\ddot{y} + ky = ۰, \qquad m\ddot{z} + kz = ۰ \qquad (۷-۳۸)$$

می‌بینیم که معادله‌ی حرکت برای هر کدام از مؤلفه‌ها همانند معادله‌ی حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ی یک بعدی (رابطه ۷-۶) است. این سامانه، نوسانگر *هم‌سانگرد* نامیده می‌شود؛ چون همه‌ی جهت‌ها (و نه تنها آنهایی که در راستای محورها هستند!) هم ارزند. نوسانگر نا هم‌سانگرد (ما به آن نخواهیم پرداخت) هم با معادله‌های مشابه توصیف می‌شود اما ثابت k درهر جهت متفاوت است. پاسخ‌های عمومی معادله‌های (۷-۳۸) همان رابطه‌ی (۸-۶)است:

$$\begin{aligned} x &= c_x \cos\omega t + d_x \sin\omega t \\ y &= c_y \cos\omega t + d_y \sin\omega t \\ z &= c_z \cos\omega t + d_z \sin\omega t \end{aligned} \qquad (۷-۳۹)$$

و $\omega^۲ \equiv k/m$ است . اگر بخواهیم آنها را با نماد برداری بنویسیم، داریم

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}\cos\omega t + \mathbf{d}\sin\omega t \qquad (۷-۴۰)$$

روشن است که حرکت دوره‌ای است و دوره‌ی آن $\tau \equiv ۲\pi/\omega$ است (پاسخ‌ها را می‌توان به شکل‌های دیگر هم نوشت؛ به رابطه های (۳-۶) مراجعه کنید. بردارهای دلخواه $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ مانند حالت نوسانگر یک بعدی، با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. اگر در زمان $t = ۰$ ذره در مکان $\mathbf{r}_\circ$ با سرعت $\mathbf{v}_\circ$ حرکت کند، آنگاه داریم

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_\circ \qquad , \qquad \mathbf{d} = \mathbf{v}_\circ/\omega \qquad (۷-۴۱)$$

می‌دانیم که برای نیروهای پایستار قانون پایستگی انرژی همواره برقرار است. در بخش ۵-۷ نشان دادیم که اگر نیرو مرکزی باشد پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای هم داریم. قانون نیرو دررابطه‌ی (۷-۳۶) نیروی مرکزی پایستار است و بنابراین، باید انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، هر دو، پایسته باشند. بگذارید این قانون‌های پایستگی را در باره‌ی این نیرو به روشنی نشان دهیم. از رابطه‌ی (۷-۴۰) به روشنی دیده می‌شود که $\mathbf{r}$ در صفحه‌ی $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ قرار دارد. بنابراین ، جهت $\mathbf{L}$ مشخص است. با استفاده از

$$\dot{\mathbf{r}} = -\omega\mathbf{c}\sin\omega t + \omega\mathbf{d}\cos\omega t \qquad (۷-۴۲)$$

داریم

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = m\omega\,\mathbf{c}\times\mathbf{d} = m\mathbf{r}_\circ\times\mathbf{v}_\circ \qquad (۷-۴۳)$$

چون $\mathbf{v}_\circ$ و $\mathbf{r}_\circ$ مقدارهای معینی هستند؛ پس روشن است که $\mathbf{L}$ مقدار ثابتی است.

انرژی پتانسیل قانون نیروی $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ ، یا برحسب مولفه‌هایش $\mathbf{F} = (-kx, -ky, -kz) = -k\mathbf{r}$ ، همان رابطه‌ای است که در فصل ۵ دیدیم:

$$V = \frac{۱}{۲}kr^۲ = \frac{۱}{۲}k\,(x^۲ + y^۲ + z^۲) \qquad (۷-۴۴)$$

پس، به سادگی می‌توان انرژی کل سامانه را حساب کرد.

$$E = \frac{۱}{۲}m\dot{\mathbf{r}}^۲ + \frac{۱}{۲}k\mathbf{r}^۲ = \frac{۱}{۲}k\,(\mathbf{c}^۲ + \mathbf{d}^۲) = \frac{۱}{۲}m\mathbf{v}_\circ^۲ + \frac{۱}{۲}k\mathbf{r}_\circ^۲ \qquad (۷-۴۵)$$

که باز هم می‌بینیم مقدار ثابتی است.

آیا می توان شکل مسیر حرکت سامانه را یافت؟ پاسخ البته مثبت است. برای این کار بهتر است رابطه‌ی (۷-۴۰) را به صورتی دیگر، اما هم ارز نوشت: فرض کنید θ زاویه‌ی ثابتی است. در این صورت رابطه‌ی (۷-۴۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos(\omega t - \theta) + \mathbf{b}\sin(\omega t - \theta) \qquad (۷-٤٦)$$

بردارهای **a** و **b** به وسیله‌ی رابطه‌های زیر به بردارهای **c** و **d** مربوط اند

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\cos\theta - \mathbf{b}\sin\theta \quad , \quad \mathbf{d} = \mathbf{a}\sin\theta + \mathbf{b}\cos\theta$$

یا (۷-٤۷)

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}\cos\theta + \mathbf{d}\sin\theta \quad , \quad \mathbf{b} = -\mathbf{c}\sin\theta + \mathbf{d}\cos\theta$$

زاویه‌ی θ یک پارامتر آزاد است و آزادیم که هر جور خواستیم آن را انتخاب کنیم. می‌توان آن را چنان برگزید که بردارهای **a** و **b** برهم عمود باشند. برای این کار باید داشته باشیم

$$\circ = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -(\mathbf{c}^۲ - \mathbf{d}^۲)\sin\theta\cos\theta + \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta)$$

یا (۷-٤۸)

$$\tan ۲\theta = \frac{۲\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{c}^۲ - \mathbf{d}^۲}$$

حال محور x را در راستای **a** و محور y را در راستای **b** برگزینید. در این نمایش، رابطه‌ی (۷-٤٦) به صورت زیر درمی‌آید

$$x = a\cos(\omega t - \theta) \quad , \quad y = b\sin(\omega t - \theta) \quad , \quad z = \circ \qquad (۷-٤۹)$$

و با حذف t از این رابطه‌ها معادله‌ی مسیر به دست می‌آید

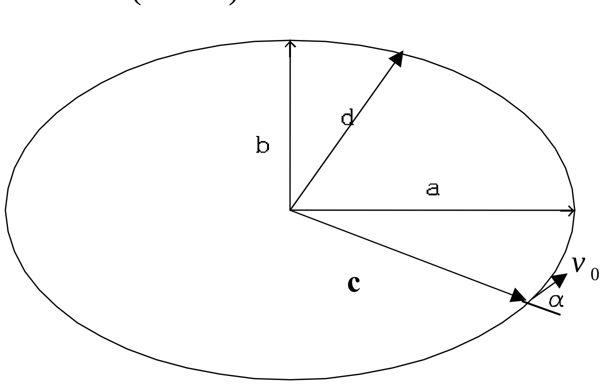
$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \quad , \quad z = \circ \qquad (۷-۵۰)$$

این معادله را می شناسیم. معادله‌ی بیضی است که مرکزش در مبداء مختصات است. **a** و **b** هم نیم‌محورهای آن و بردارهای **c** و **d** نیم‌قطرهای متناظر بیضی‌اند. این وضعیت درشکل (۲۲-۷) نشان داده شده است

ساده‌ترین روش یافتن اندازه‌های نیم محورهای **a** و **b** از شرایط اولیه (یعنی از **c** و **d**)، استفاده از ثابت های Eو L است.

اگر معادله‌های سطر اول را در رابطه‌ی (۷-٤۷) به توان دو برسانیم و باهم جمع کنیم خواهیم داشت $a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲$. هم چنین داریم $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{d}$. اگر زاویه‌ی بین **c** و **d** را α بنامیم، آنگاه $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{d} \Rightarrow ab = cd\sin\alpha$. با حذف $a^۲$ یا $b^۲$ بین این دو رابط ، خواهیم داشت

$$a^٤ - (c^۲ + d^۲)a^۲ + c^۲d^۲\sin^۲\alpha = \circ \qquad (۷-۵۱)$$



شکل ۲۲-۷

معمولا بزرگترین ریشه‌ی این معادله را برای a برمی‌گزینند و آن را نیم محور بزرگ بیضی می‌نامند.

۷-۶-۲ قانون‌های پایستگی و پتانسیل موثر

اینک به حالت عمومی نیروی پایستار مرکزی می‌پردازیم. همانگونه که در فصل ۵ دیدیم، برای هر نیروی پایستار، تابع انرژی پتانسیل $V(r)$ وجود دارد که تنها به مختصات شعاعی وابسته است. هم‌چنین دو قانون پایستگی داریم؛ یکی پایستگی انرژی و دیگری پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای است

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = E = \text{ثابت} \qquad \text{و} \qquad m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L} = \text{ثابت} \tag{۷-۵۲}$$

باتوجه به آنچه که در بخش۵-۷ گفته شد؛ از قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نتیجه می‌شود که حرکت به صفحه محدود است و از این‌رو مسئله در اساس، مسئله‌ی دوبعدی است. در زیر نشان خواهیم داد که این مسئله‌ی به ظاهر سه بعدی را می‌توان در واقع به مسئله یک بعدی کاهش داد. این که بتوان به جای سه مختصات از یک مختصه استفاده کرد، ساده سازی بسیار مهمی است. اگر در صفحه‌ی حرکت از مختصات قطبی استفاده کنیم، آنگاه دو قانون پایستگی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \\ &mr^2\dot{\theta} = L \end{aligned} \tag{۷-۵۳}$$

البته، این دو رابطه چیز تازه‌ای نیستند. اگر فراموش کرده‌اید بخش ۷-٤ را نگاه کنید. با این حال، بدون این که بخواهیم حتی آنها را حل کنیم و r و θ را به دست آوریم، از این دو رابطه اطلاعات فراوانی درباره‌ی حرکت ذره می‌توان به دست آورد. توجه کنید که اگر از رابطه‌ی دوم در (۷-۵۳)، $\dot{\theta}$ را برحسب L به دست آوریم و در رابطه‌ی نخست قرار دهیم، $\dot{\theta}$ حذف می‌شود و رابطه‌ای برحسب r و $\dot{r}$ به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \tag{۷-٥٤}$$

این رابطه را *معادله‌ی شعاعی انرژی* می‌نامند. برای L معین و داده شده‌ای، این رابطه شبیه رابطه‌ی (٦-٥) برای حرکت یک بعدی است که حالا به جای $V(x)$ *انرژی پتانسیل مؤثر* زیر جایگزین شده است.

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \tag{۷-۵۵}$$

فهمیدن اهمیت جمله‌ی اضافی $L^2/(2mr^2)$ در تابع انرژی پتانسیل بالا دشوار نیست. این جمله‌ی اضافی به «نیرویی» به شکل $L^2/(mr^3)$ منطبق است که همانا نیروی «مرکزگریز» $mr\,\dot{\theta}^2$ است که در آن $\dot{\theta}$ برحسب L نوشته شده است.

از معادله‌ی شعاعی انرژی می‌توان به همان‌گونه استفاده کرد که ما در فصل ۲-۵ استفاده کردیم (نگاه کنید به معادله‌ی (۱۲-۵) و گفتار بعد از آن.) چون r^2 کمیت مثبت است، حرکت به ناحیه‌هایی از r محدود است که داشته باشیم

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \le E \tag{۷-٥٦}$$

فاصله‌ی شعاعی بیشینه و کمینه در جاهایی اتفاق می‌افتد که در رابطه (۷-٥٦) علامت تساوی برقرار باشد. برای مثال؛ نوسانگر

هماهنگ همسانگرد را در نظر بگیرید که $V(r)=kr^{۲}/۲$ است. بنابراین، تابع انرژی پتانسیل مؤثر عبارت است از $V_{eff}(r)=(L^{۲}/۲mr^{۲})+kr^{۲}/۲$. کمینه‌ی این تابع در $r=\left(L^{۲}/mk\right)^{۱/۴}$ است؛ درست مانند تعادل پایدار در حالت نوسانگر یک بعدی. وقتی E با کمینه‌ی V_{eff} برابر باشد $\dot{r}$ باید همواره صفر باشد. این را به آسانی می‌توان از رابطه‌ی (۵٤-۷) دید. در کمینه‌ی V_{eff} تغییرات r نسبت به زمان صفر است. یعنی فاصله‌ی کمینه‌ی $r=\left(L^{۲}/mk\right)^{۱/۴}$ تغییر نمی‌کند. بنابراین، ذره روی دایره‌ای حول مرکز حرکت می‌کند و مولفه‌ی سرعت روی پیرامون دایره $r\dot{\theta}$ است.

مکان کمینه، یعنی $r=\left(L^{۲}/mk\right)^{۱/۴}$ را می‌توان به گونه‌ی دیگری هم به دست آورد. چون این مقدار r فاصله‌ی تعادلی است، پس برآیند نیروها باید به ازای آن صفر باشد. نیروهای موجود، نیروی ربایشی یا بازگرداننده‌ی kr و نیروی «مرکز گریز» $L^2/(mr^3)$ اند. اگر این دو نیرو را مساوی هم قرار دهیم مقدار کمینه‌ی r به دست می‌آید. برای هر مقدار E که بزرگتر از کمینه‌ی $V_{eff}(r)$ باشد، حرکت به ناحیه‌ی $b\le r\le a$ محدود می‌شود. a و b مقدارهای حدی r اند که از حل معادله‌ی (۵٦-۷) به دست می‌آیند. اگر در آغاز، ذره در فاصله‌ی $r_{\circ}$ از مرکز نیرو باشد و در جهتی که با شعاع زاویه‌ی α می‌سازد با سرعت $v_{\circ}$ حرکت کند (شکل ۲۲-۷ را ببینید). آنگاه مقدارهای E و L عبارتند از

$$E=\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}+\frac{۱}{۲}kr_{\circ}^{۲}\qquad,\qquad L=mr_{\circ}v_{\circ}\sin\alpha \tag{۵۷-۷}$$

برای یافتن مقادیر حدی r ،یعنی a و b ، اینک باید رابطه (۵٦-۷) را به ازای این مقدارهای E و L حل کرد. بنابراین، داریم

$$\frac{L^{۲}}{۲mr^{۲}}+\frac{۱}{۲}kr^{۲}\le\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}+\frac{۱}{۲}kr_{\circ}^{۲} \tag{۵۸-۷}$$

اگر دو طرف را در $۲r^{۲}/k$ ضرب کنیم و به جای L مقدار $mv_{\circ}r_{\circ}\sin\alpha$ را قرار دهیم، خواهیم داشت $r^{٤}-(r_{\circ}^{۲}+(m/k)v_{\circ}^{۲})r^{۲}+(m/k)r_{\circ}^{۲}v_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\alpha=\circ$. ریشه‌های این معادله مقدارهای حدی a و b را به دست خواهند داد. توجه به این نکته نیز جالب است که این رابطه همانند رابطه (۵۱-۷) است. کمیت $L=mr^2\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است و با زمان تغییر نمی‌کند. مقدار آن را شرایط اولیه تعیین می‌کند. برای مثال، با دادن مقدارهای اولیه‌ی r و $\dot{\theta}$.

پتانسیل "موثر" مفهوم بسیار سودمندی است و می‌گوید اگر می‌خواهیم یک مسئله‌ی دو بعدی (که ممکن است از یک مسئله‌ی سه بعدی آمده باشد) را با نیروی مرکزی حل کنیم، می‌توانیم آن را با اندک تغییر در تابع پتانسیل به صورت مسئله‌ی یک بعدی درآوریم. می‌توان فراموش کرد که اصلا در مسئله‌ی ما متغیری به نام θ وجود داشته است و مسئله‌ی یک بعدی را برای یافتن $r(t)$ حل کنیم. البته پس از یافتن $r(t)$، می‌توان از $\dot{\theta}(t)=L/mr^{۲}$ استفاده و $\theta(t)$ هم به دست آورد.

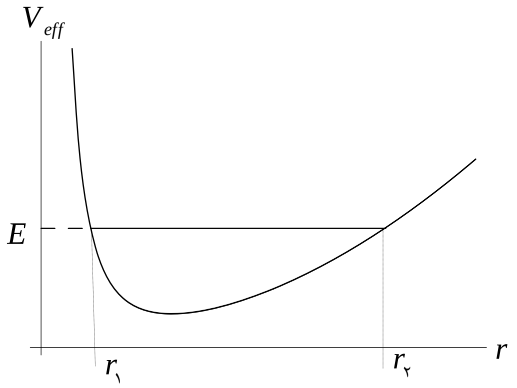
توجه بکنید که دلیل این که می‌توان مسئله‌ای دو بعدی را به مسئله‌ی یک بعدی کاهش داد، این است که کمیت مستقل از زمان L در مسئله وجود دارد و r و θ را به هم مربوط می‌کند. بنابراین ، سرشت مسئله به جای دو بعدی بودن، یک بعدی است.

برای این که ببینیم چگونه r با زمان تغییر می‌کند، کافی است نمودار V_{eff} را رسم کنیم. برای مثال، فرض کنید $V(r)=Ar^{۲}$ است. این پتانسیل فنری است که طول حالت ترازمندیش صفر است. بنابراین داریم

$$V_{eff}=\frac{L^{۲}}{۲mr^{۲}}+Ar^{۲} \tag{۵۹-۷}$$

برای رسم نمودار این V_{eff}، باید L و A را بدانیم. با وجود این، شکل عمومی آن شبیه شکل (۲۳-۷) است. در این شکل، انرژی

E (که آن هم باید داده شود) هم نشان داده شده است. فاصله‌های $r_۱$ و $r_۲$ نقاط برگشت اند. در این نقطه‌ها $V_{eff} = E$ است و سامانه به ازای این مقدار E بین $r_۱$ و $r_۲$ پس و پیش می‌رود (برای پتانسیل $Ar^۲$ در این مثال، حرکت روی مسیر بیضی انجام می‌گیرد و $r_۱$ و $r_۲$ طول نیم‌محورهای آن است. این مسئله را ما پس از آموختن برخی شیوه‌ها به عنوان مثال در همین فصل حل خواهیم کرد.) اگر E با کمینه‌ی V_{eff} برابر باشد آنگاه $r_۱ = r_۲$ می شود. در این صورت، r مقدار ثابتی می‌شود، یعنی مسیر حرکت یک دایره می‌شود. توجه کنید که E نمی تواند کمتر از کمینه‌ی V_{eff} باشد.



شکل ۲۳-۷

نکته: گاهی جمله‌ی $L^۲/۲mr^۲$ در پتانسیل موثر را *سد تکانه‌ی زاویه‌ای* می‌گویند. اثر این جمله آن است که از نزدیک شدن بیش از اندازه‌ی ذره به مبداء (که ما آن را چشمه‌ی نیرو برگزیدیم) جلوگیری کند. نکته این است که $L = mr^۲\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است و بنابراین با کوچک شدن r (یعنی نزدیک شدن جسم به مبداء) $\dot{\theta}$ باید بزرگ شود. اما آهنگ افزایش $\dot{\theta}$ بیشتر از آهنگ کاهش r است ؛ چون r با توان دو در $L = mr^2\dot{\theta}$ ظاهر می‌شود با افزایش تند $\dot{\theta}$ سرانجام به جایی می‌رسیم که انرژی جنبشی مماسی $mr^۲\dot{\theta}^۲/۲$ بیش از مقداری می‌شود که پایستگی انرژی اجازه می‌دهد. اگر $V(r)$ سریع تر از $-۱/r^۲$ به $-\infty$ میل کند، این گفتار دیگر درست نیست. می‌توانید آن را ببینید، کافی است تابعی برای V_{eff} برگزینید و آن را رسم کنید که به جای اینکه با $r \to ۰$ به $+\infty$ میل کند به $-\infty$ برود. در این صورت دیده می شود که کاهش $V(r)$ به اندازه‌ای سریع است که افزایش انرژی جنبشی را جبران می‌کند.) ♣

توجه کنید که لازم نیست از پتانسیل موثر استفاده کنیم. می‌توانیم معادله‌ی دیفرانسیل حرکت را حل کنیم. وارد کردن پتانسیل موثر به ما اجازه می‌دهد که به رفتار سامانه آسان‌تر پی ببریم.

۷-۷ گرانش؛ قانون های کپلر

دو معادله‌ی مربوط به پایستگی انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، رابطه‌های (۵۳-۷) و (۵٤-۷)، برای حل مسئله حرکت جسم در میدان نیروی مرکزی کافی اند. اما باید مشخص کنیم که منظور ما از واژه‌ی"حل" در اینجا چیست. این واژه اندکی مبهم است. یعنی باید بگوییم چه کمیتی را می‌خواهیم برحسب کدام کمیت‌ها به دست آوریم. دو کار می‌توان کرد. می‌توان r و θ را برحسب t حساب کرد و یا r را برحسب θ به دست آورد. رهیافت نخست این برتری را دارد که به ما اجازه می‌دهد سرعت‌ها و مکان ذره را در هر لحظه‌ی t بدانیم. رهیافت دوم اگرچه نمی‌گوید حرکت ذره چگونه است اما این برتری را دارد که نشان می‌دهد مسیر ذره در فضا چگونه است. هنگامی که با نیروی گرانش و قانون‌های کپلر سروکار داریم رهیافت دوم کارسازتر است. با وجود این، ما به هر دو رهیافت می‌پردازیم.

۷-۷-۱ یافتن $r(t)$ و $\theta(t)$

از رابطه‌ی (۷-۵٤) اندازه‌ی $\dot{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-\frac{L^2}{2mr^2}-V(r)} \qquad (۷-٦۰)$$

برای این که بتوان از این رابطه $r(t)$ واقعی را به دست آورد، باید E و L را بدانیم (این دو کمیت همان گونه که پیش‌تر نیز گفتیم، با مقدارهای اولیه‌ی r، $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ به دست می‌آیند.) همچنین $V(r)$ را هم باید بدانیم. رابطه‌ی (۷-٦۰) معادله‌ی دیفرانسیل است و برای حل آن باید متغیرها را از هم جدا کرد و سپس از دو طرف آن انتگرال گرفت. یعنی باید معادله‌ی زیر را حل کرد.

$$\int\frac{dr}{\sqrt{E-L^2/(2mr^2)-V(r)}}=\pm\int\sqrt{2/m}\,dt=\pm\sqrt{2/m}\,(t-t_\circ) \qquad (۷-٦۱)$$

این بدان معنی است که مجبوریم انتگرال زشت سمت چپ را حساب کنیم تا t را برحسب r به دست آوریم. پس از آنکه $t(r)$ را یافتیم آن را وارون کنیم تا $r(t)$ به دست بیاید. در این صورت می‌توانیم با جاکذاری این $r(t)$ در $\dot{\theta}=L/mr^2$، رابطه‌ی (۷-۵۳)، $\dot{\theta}$ را حساب کنیم و سرانجام از آن انتگرال بگیریم و $\theta(t)$ را بیابیم. خبر بد در این فرایند به ظاهر طولانی این است که برای بسیاری از توابع پتانسیل $V(r)$ نمی‌توان انتکرال سمت چپ رابطه‌ی (۷-٦۱) را برحسب توابع معمولی حساب کرد. تنها انگشت شماری $V(r)$ های خوب وجود دارد که می‌توان برای آنها انتگرال را حساب کرد. حتی برای آن ها هم محاسبه درد آور است. خبر خوب این است که همین چند پتانسیل $V(r)$ خوب، پتانسیل‌هایی اند که به آنها علاقمندیم. به ویژه پتانسیل گرانش که به صورت $1/r$ است (پتانسیل فنر هم که با r^2 متناسب است، خوب است). با وجود این، نمی‌خواهیم این شیوه را برای گرانش به کار ببریم؛ به جای آن از رهیافت زیر استفاده خواهیم کرد.

- **یافتن** $r(\theta)$

می‌توان dt را از معادله‌های (۷-۵۳) و (۷-۵٤) حذف کرد. برای این کار نخست جمله‌ی $\dot{r}^2$ را در سمت چپ معادله‌ی (۷-۵٤) تنها نگه می‌داریم و سپس آن را به مجذور معادله‌ی نخست تقسیم می کنیم. ضریب dt^2 حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{2mE}{L^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{2mV(r)}{L^2} \qquad (۷-٦۲)$$

اینک می‌توان (در بنیاد) از این رابطه جذر گرفت، متغیرها را جدا کرد و سپس انتگرال گرفت تا θ برحسب r به دست بیاید. پس از این عملیات می‌توان یافته‌ی خود را وارون کرد و r را بر حسب θ به دست آورد. برای این کار البته باید $V(r)$ را بدانیم. پس، بگذارید $V(r)$ را برای خود تعریف کنیم و مسئله را تا پایان حل کنیم. مهم‌ترین پتانسیل، گرانش، را بررسی می‌کنیم.

- **محاسبه‌ی** $r(\theta)$

هدف ما در این بخش یافتن r بر حسب θ در پتانسیل گرانشی است. فرض کنید با سامانه‌ی خورشید و زمین سر و کار داریم و جرم‌های آنها را به ترتیب با $M_\odot$ و m نشان می‌دهیم. انرژی پتانسیل گرانشی زمین ـ خورشید عبارت است از:

$$V(r)=-\frac{\alpha}{r} \quad \text{که در آن} \quad \alpha\equiv GM_\odot m \qquad (۷-٦۳)$$

فرض کنید که خورشید در مرکز مختصات ساکن نشسته است. چون $M_{\odot} >> m$ این فرض تقریب خوبی است (اگر بخواهیم مسئله را دقیق و بدون تقریب حل کنیم باید از جرم کاهیده استفاده کنیم). در این صورت، معادله‌ی (۶۲-۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{rL^2} \qquad (۷-۶۴)$$

همان‌گونه که در بالا گفتم، می‌توان جذر گرفت، متغیرها را جدا کرد و سپس انتگرال گرفت و $\theta(r)$ را به دست آورد و سرانجام آن را وارون کرد و $r(\theta)$ را یافت. اگر چه این شیوه سر راست است اما بسیار شلوغ است. در اینجا با شگرد دیگری $r(\theta)$ را حساب خواهیم کرد: چون جمله‌های $1/r$ در رابطه‌ی (۶۴-۷) فراوانند، آسانتر است که به جای r معادله را برای $1/r$ حل کنیم. با توجه به $d(1/r)/d\theta = -(dr/d\theta)/r^2$ و با جایگزینی $y \equiv 1/r$ در (۶۴-۷) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -y^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}y + \frac{2mE}{L^2} \qquad (۷-۶۵)$$

در این مرحله، می‌توان از شیوه‌ی جدا سازی متغیرها استفاده کرد. برای سادگی در نوشتن بگذارید $z \equiv y - m\alpha/L^2$ را تعریف کنیم . اینک رابطه‌ی (۶۵-۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2\left(1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) \equiv -z^2 + B^2 \quad ; \quad B \equiv \frac{m\alpha}{L^2}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \qquad (۷-۶۶)$$

بنابراین، می‌توان متغیرها را جدا کرد و از دو طرف انتگرال گرفت:

$$\int_{z_1}^{z}\frac{dz'}{\sqrt{B^2 - z'^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta} d\theta' \quad \Rightarrow \quad \cos^{-1}\left(\frac{z'}{B}\right)_{z_1}^{z} = (\theta - \theta_1)$$
$$\Rightarrow z = [(\theta - \theta_1) + \cos^{-1}(z_1/B)] \equiv B\cos(\theta - \theta_0) \qquad (۷-۶۷)$$

معمولاً محور را چنان انتخاب می‌کنند که $\theta_0 = 0$ باشد. پس، می‌توان از θ_0 چشم‌پوشی کرد. چون $z \equiv 1/r - m\alpha/L^2$ و نیز B با معادله‌ی (۶۶-۷) تعریف شده‌اند. پس رابطه‌ی (۶۷-۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1 + \varepsilon\cos\theta) \qquad (۷-۶۸)$$

که در آن ε *خروج از مرکز* حرکت ذره است و به صورت زیر تعریف شده است

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \qquad (۷-۶۹)$$

خوب! این یافتن $r(\theta)$ را برای پتانسیل $V(r) \propto 1/r$ کامل می‌کند. چندان بد هم نبود با یک صفحه محاسبه به آن رسیدیم، اگر چه اندکی پیچیده بود اما خیلی هم تحمل ناپذیر نبود.

مقدارهای حدی r کدامند؟ کمینه‌ی r جایی است که سمت راست رابطه‌ی (۶۸-۷) یعنی، $(1+\varepsilon)m\alpha/L^2$ بیشینه مقدارش را دارد. پس،

$$r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha(1+\varepsilon)} \qquad (۷-۷۰)$$

بیشینه‌ی r چیست؟ پاسخ این پرسش بستگی به این دارد که ε بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد.

- $\varepsilon < 1$ (در این حالت مدار دایره یا بیضی است. آن را خواهم دید) در این صورت کمینه‌ی سمت راست رابطه‌ی (۶۸-۷)

- برابر است با $(1-\varepsilon)m\alpha/L^2$ و بنابراین داریم

$$r_{\max}=\frac{L^2}{m\alpha(1-\varepsilon)} \qquad \text{برای} \quad \varepsilon<1 \tag{7-71}$$

- $\varepsilon\geq 1$ (در این حالت مدار سهمی یا هذلولی است) و سمت راست رابطه‌ی (۶۸-۷) به ازای $\cos\theta=-1/\varepsilon$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه

$$r_{\max}=\infty \qquad \text{برای} \quad \varepsilon\geq 1 \tag{7-72}$$

اینک همه چیز آماده است تا مدارهای حرکت را بررسی کنیم. پیش از آن، به چند مثال می‌پردازیم. این مثال‌ها فهمیدن نیمه کیفی بحث را آسان می‌کنند.

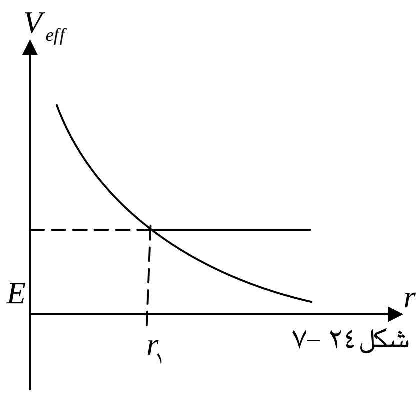
مثال ۳-۷ (قانون نیروی عکس مجذور فاصله):

نیروی $\mathbf{F}=\left(k/r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ را در نظر بگیرید که در آن k ثابت است. شکل این نیرو مانند نیروی گرانش است که به جای k کمیت $-Gm_im_j$ نشسته است. نیروی الکتروستاتیک نیز از همین شکل پیروی می‌کند و به جای k مقدار $q_iq_j/4\pi\varepsilon_0$ قرار دارد. k ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر k مثبت باشد نیرو رانشی است، و اگر k منفی باشد نیرو ربایشی است. معادله‌ی شعاعی انرژی، (۵۴-۷)، برای این حالت عبارت است از

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{k}{r}=E \tag{7-73}$$

چون پتانسیل مربوط به این نیرو k/r است. پس انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با: $V_{eff}(r)=L^2/(2mr^2)+k/r$. برای هر دو حالت رانشی و ربایشی در باره‌ی مسیر حرکت ذره‌ای در این میدان نیرو بحث کنید.

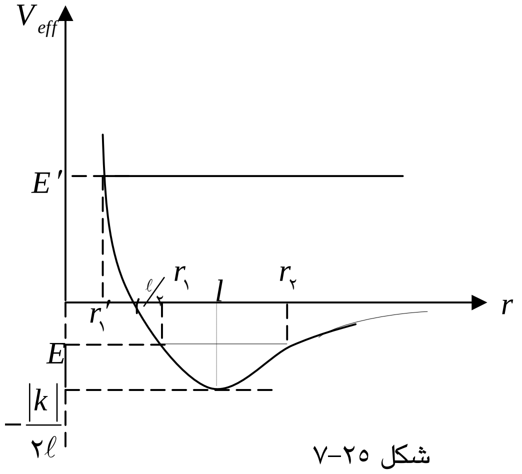
حل: (**الف**) **حالت رانشی** ($k>0$): در این حالت $V_{eff}(r)$ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد. از ∞ در $r=0$ تا صفر در $r=\infty$ به طور یکنواخت فرو می‌افتد. این رفتار در شکل (۲۴-۷) نشان داده شده است. معنی این حرف آن است که $V_{eff}(r)$ دارای کمینه نیست و بنابراین، حرکت دایره‌ای شدنی نیست. البته به ازای هر مقدار مثبت E ، معادله‌ی $V_{eff}(r)=E$ دارای پاسخ است: $r=\left(1/4mE\right)\left(2mk\pm\sqrt{(4m^2k^2)+8mEL^2}\right)$ اگرریشه‌ی مثبت r را r_1 بنامیم، این کمینه مقداری است که r می‌تواند داشته باشد. این کمینه یگانه است. اما r مقدار بیشینه ندارد. ذره‌ای که سرعت اولیه‌ی آن در راستای شعاع وبه سوی مرکز است، باید در مداری حرکت کند که r تا r_1 کاهش پیدا کند (و در r_1 جهت سرعت آن کاملاً وارون می‌شود) و سپس بدون حد افزایش یابد. r_1 درواقع نقطه‌ی **بازگشت** است و مدار هذلولی است. در بخش بعدی به شکل مدارها خواهیم پرداخت.



شکل ۲۴ -۷

(**ب**): حالت ربایشی ($k<0$): پیش از آنکه گونه‌های ممکن حرکت را برای این حالت بررسی کنیم، برای سادگی کمیت $\ell\equiv L^2/m|k|$ را تعریف می‌کنیم که بعد طول دارد. تابع انرژی پتانسیل موثر اینک عبارت است از

$$V_{eff}(r)=|k|\left(\frac{\ell}{۲r^۲}-\frac{۱}{r}\right) \qquad (۷-۷٤)$$



شکل ۲۵-۷

این تابع در شکل (۲۵-۷) نشان داده شده است. در $r=\ell$ مقدار $V_{eff}(r)$ کمینه و برابر با $V_{eff}(r=\ell)=-|k|/۲\ell$ است.توجه کنید که به ازای $r=\ell/۲$ داریم $V_{eff}(r=\ell/۲)=۰$. برحسب این که انرژی سامانه چه داشته باشد، رفتارش متفاوت خواهد بود :

(۱) : $E=-|k|/۲\ell$: این مقدار انرژی البته همان مقدارکمینه‌ی V_{eff} است. پس $\dot{r}$ باید همواره صفر باشد و ذره در مدار دایره‌ای به شعاع ℓ حرکت می‌کند. سرعت مداری جسم را به آسانی می‌توان از انرژی جنبشی $T=E-V$ به دست آورد. چون انرژی پتانسیل $V=-|k|/r$ است و $r=\ell$. پس، $V=-|k|/\ell$ و باید داشته باشیم.

$$T=\frac{|k|}{۲\ell} \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{|k|}{m\ell}} \qquad (۷-۷۵)$$

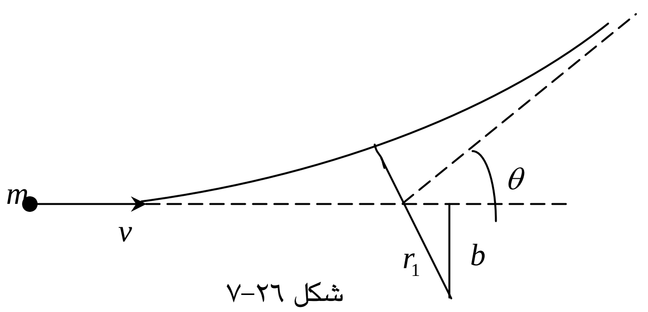
همین نتیجه را می‌توانستیم از برابری نیروی ربایشی $|k|/\ell^۲$ و نیروی «مرکز گریز» $mv^۲/\ell$ به دست آوریم. به این نتیجه‌ی جالب نیز توجه کنید که برای حرکت روی مدار دایره‌ای انرژی پتانسیل همواره منهای دو برابر انرژی جنبشی است.

(۲) $-|k|/۲\ell<E<۰$: در شکل (۲۵-۷) این وضعیت با انرژی E نشان داده شده است. می‌بینیم که فاصله‌ی شعاعی به بازه‌ی بین $r_۱$ و $r_۲$ محدود است. $r_۱$ کوچکترین فاصله‌ای است که جسم می‌تواند به مرکز نیرو نزدیک شود. $r_۲$ بیشترین فاصله از مرکز نیروست و خواهیم دید که در این حالت مدار بیضی است.

(۳) $E=۰$: در این حالت نزدیک‌ترین فاصله‌ی ذره به مرکز نیرو $r_۱=\ell/۲$ و بیشینه فاصله $r_۲=\infty$ اند. ذره به اندازه‌ای انرژی دارد که به بینهایت بگریزد. انرژی جنبشی آن با افزایش فاصله به صفر میل کند. در این حالت مدار سهمی است.

(۴) $E>۰$: این وضعیت در شکل (۲۵-۷) با E' نشان داده شده است و فقط کمترین فاصله تا مرکز نیرو را دارد. این بار ذره می‌تواند با انرژی جنبشی غیرصفر به بینهایت بگریزد و مدار یک هذلولی است.

مثال ۴-۷ (نزدیکترین فاصله): ذره‌ی بارداری با بار q در میدان نیروی ذره‌ی باردار q' حرکت می‌کند $qq'>۰$. برابر شکل (۲٦-۷) بار q از فاصله‌ای دور با سرعت v به مرکز نیرو نزدیک می‌شود. مسیر حرکت ذره چنان است که اگر روی خط راست ادامه یابد، با فاصله‌ی b از کنار مرکز نیرو



شکل ۲٦-۷

می‌گذرد. نزدیکترین فاصله‌ای که ذره می‌تواند به مرکز نیرو نزدیک شود کدام است؟ فاصله‌ی b را **پارامتر برخورد** می‌گویند.

حل : چون ذره از فاصله‌های بسیار دور به حرکت درمی‌آید (از بینهایت) بنابراین انرژی پتانسیل اولیه‌ی را می‌توان صفر فرض کرد (مبداء پتانسیل را بینهایت فرض می‌کنیم). پس، انرژی کل ذره برابر است با: $E = mv^۲/۲$. افزون بر این، چون مؤلفه‌ی عمودی $\mathbf{r}$ تا v همان b است،پس تکانه‌ی زاویه‌ای حرکت $L = mvb$ است. (از رابطه (۷-۵۳) می‌دانیم که این ثابت حرکت است). پس، نزدیک‌ترین فاصله به چشمه‌ی نیرو، $r_۱$، را با جایگزینی مقادیر L و E در معادله‌ی شعاعی انرژی می‌توان به دست آورد. در اینجا $k = qq'/۴\pi\varepsilon_۰$ است و نیز می‌دانیم که در نزدیکترین فاصله‌ی ذره از چشمه‌ی نیرو $\dot{r} = ۰$ است. بنابراین، رابطه‌ی (۷-۵۳) یعنی معادله‌ی شعاعی انرژی، به صورت زیر درمی‌آید.

$$r_۱^۲ - ۲ar_۱ - b^۲ = ۰ \qquad ; \qquad a = \frac{qq'}{۴\pi\varepsilon_۰ mv^۲} \tag{۷-۷۶}$$

و پاسخ مثبت این معادله‌ی درجه دو $r_۱ = a + \sqrt{a^۲ + b^۲}$ است.

مثال ۵-۷ (سرعت گریز): کمینه سرعت لازم پرتابه‌ای که از سطح زمین شلیک می‌شود باید چقدر باشد تا پرتابه بتواند از میدان گرانش زمین بگریزد؟ زمین را کره‌ای به جرم M و شعاع R فرض کنید. بستگی آن به زاویه‌ی پرتاب چگونه است؟

حل: فرض کنید پرتابه با سرعت v و با زاویه‌ی α نسبت به خط عمود پرتاب شود. انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای به ترتیب عبارتند از $E = mv^۲/۲ - GMm/R$ و $L = mRv\sin\alpha$. در اینجا G ثابت گرانش نیوتون است. برای این‌که انرژی را برحسب کمیت‌های آشنا بنویسیم، توجه داریم که نیرو گرانش وارد به یک ذره در سطح زمین $mg = GMm/R^۲ \Rightarrow GM = R^۲g$ است. پس، $E = mv^۲/۲ - Rgm$. پرتابه هنگامی به بینهایت خواهد گریخت که $E \geq ۰$ یا $v \geq \sqrt{۲Rg}$ باشد. بنابراین، کمینه سرعت لازم برای گریز $v_e = \sqrt{۲Rg}$ است که **مستقل** از زاویه‌ی پرتاب α (تا هنگامی که از نیروی پس‌کشی هوا چشم پوشی کنیم) است. با استفاده از اندازه‌های $R = ۶۳۷۰\,\mathrm{km}$ و $g = ۹{,}۸۱\,\mathrm{ms^{-۲}}$، مقدار عددی سرعت گریز از زمین $v_e = ۱۱{,}۲\,\mathrm{kms^{-۱}}$ می‌شود. اگر سرعت شلیک پرتابه از این مقدار کوچکتر باشد، پرتابه به ارتفاع بیشینه‌ی خود خواهد رسید و دوباره به زمین فرو خواهد افتاد. در مثال بعدی این فاصله را حساب می‌کنیم.

مثال۶-۷ (ارتفاع بیشینه‌ی پرتابه): اگر سرعت v، پرتاب ذره‌ای، با سرعت حرکتش در مدار دایره‌ای درست در بالای سطح زمین ، v_c، برابر باشد. بیشینه ارتفاعی که پرتابه به ازای زاویه‌ی پرتاب α می‌تواند داشته باشد، چقدر است؟

حل: بیشینه فاصله‌ی $r_۲$ از مرکز زمین، بزرگترین ریشه معادله‌ی $V_{eff}(r) = E$ است. مقدارهای E و L را از مثال ۵-۷ داریم. پس،

$$V_{eff}(r) = |k|\left(\frac{\ell}{۲r^۲} - \frac{۱}{r}\right) = \frac{L^۲}{۲mr^۲} - \frac{|k|}{r} \tag{۷-۷۷}$$

و چون $k = GMm = gR^۲m$ است، بنابراین

$$\frac{L^۲}{۲mr^۲}-\frac{mgR^۲}{r}=\frac{۱}{۲}mv^۲-mgR$$

$$R^۲v^۲\sin^۲\alpha-۲gR^۲r=(v^۲-۲Rg)r^۲$$

یا

$$(۲Rg-v^۲)r^۲-۲R^۲gr+R^۲v^۲\sin^۲\alpha=۰ \qquad (۷-۷۸)$$

سرعت حرکت در مدار دایره‌ای را می‌توان از رابطه‌های (۷-۷۵) و $GM=R^۲g$ حساب کرد: $v_c=\sqrt{|k|/m\ell}=\sqrt{Rg}=۷{,}۹\,\mathrm{km\,s^{-۱}}$. بنابراین، رابطه $V_{eff}(r)=E$ به صورت زیر ساده می‌شود. $r^۲-۲Rr+R^۲\sin^۲\alpha=۰\Rightarrow r_۲=R(۱+\cos\alpha)$. برای پرتاب عمودی، بیشینه فاصله $۲R$ و برای هر زاویه‌ی دیگر $\alpha\neq۰$ از این مقدارکمتر است. در حد تقریباً پرتاب افقی $\alpha\approx\pi/۲$ مدار تقریباً دایره‌ای به شعاع R است. این مثال نشان می‌دهد که کدام مسئله‌ها را می‌توان به آسانی با معادله‌ی شعاعی انرژی حل کرد. این معادله به ویژه، هنگامی که می‌خواهیم فقط r را به دست بیاوریم (و نه زاویه‌ی قطبی θ یا زمان t را) بسیار سودمند است.

مثال ۷-۷ (ترازهای انرژی اتم هیدروژن): این مسئله‌ای نیست که بتوان با شیوه‌های فیزیک کلاسیک حل کرد؛ با این حال ترازهای انرژی به دست‌آمده از مکانیک کوانتومی را می‌توان با اعمال شرط «کوانتش» از مکانیک کلاسیک هم به دست آورد. درواقع، از نظر تاریخی، به همین روش هم به دست آمدند: بنا به «نظریه‌ی قدیمی کوانتومی بوهر» الکترون در اتم نمی‌تواند به جز مدارهای معین گسسته؛ مدار دیگری را اشغال کند. بوهر برای حالت مدارهای دایره‌ای این شرط کوانتش را که تکانه‌ی زاویه ای L مضرب درستی از $\hbar$ (عدد پلانک تقسیم بر ۲π) باید باشد اعمال کرد. در این حالت ثابت $k=-e^۲/۴\pi\varepsilon_۰$ است و e بار الکتریکی پروتون یا منهای بار الکتریکی الکترون است. پس برای $L=n\hbar$ شعاع a_n مدار، بنا به رابطه‌ی $\ell\equiv L^۲/m|k|$ عبارت است از

$$a_n=\frac{۴\pi\varepsilon_۰L^۲}{me^۲}=n^۲a_۱ \qquad (۷-۷۹)$$

که در آن $a_۱$، شعاع نخستین مدار بوهر و مقدارش $a_۱=۴\pi\varepsilon_۰\hbar^۲/me^۲=۵{,}۲۹\times۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m}$ است. تراز انرژی مربوط به این مدارها عبارت اند از

$$E_n=-\frac{e^۲}{۸\pi\varepsilon_۰a_n}=-\frac{۱}{n^۲}\frac{e^۲}{۸\pi\varepsilon_۰a_۱} \qquad (۷-۸۰)$$

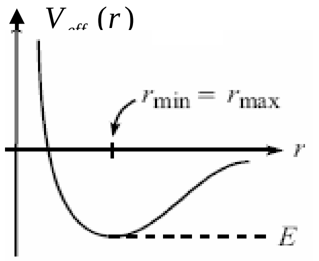
این مقدارها با انرژی گذارهای اتمی که از بیناب‌نگاری اتم هیدروژن به دست می‌آیند، سازگاری خوبی دارند.

۲-۷-۷ مدارها

اینک در موقعیتی هستیم که می‌توانیم شکل مدارهای حرکت یک جسم در میدان نیروی مرکزی را برحسب این که انرژی جسم چه باشد، به دست آوریم. کافی است با جزییات بیشتری حالت‌های با ε مختلف را بررسی کنیم. گریز از مرکز ε در رابطه‌ی (۷-۶۹) تعریف شده است.

- **دایره** ($\varepsilon = ۰$)

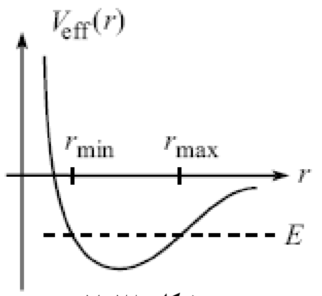
اگر $\varepsilon = ۰$ باشد،آنگاه از رابطه‌ی (۶۹-۷) داریم $E = -m\alpha^۲/۲L^۲$. منفی بودن انرژی ناشی از این است که منفی بودن انرژی پتانسیل بیش از مثبت بودن انرژی جنبشی است. ذره در چاه پتانسیل به دام افتاده است و از رابطه‌های (۷۰-۷) و (۷۱-۷) داریم $r_{\min} = r_{\max} = L^۲/m\alpha$. بنابراین، ذره در مدار دایره‌ای با شعاع $L^۲/m\alpha$ حرکت می کند. بیان هم ارز را از رابطه‌ی (۶۸-۷) می توان نتیجه گرفت که r مستقل از θ است. توجه کنید که اگر بخواهیم فقط حرکت دایره‌ای را بررسی کنیم نیازی به همه‌ی محاسبه‌های بخش۱-۷- ۷ نیست. به ازای L معین، انرژی $-m\alpha^۲/۲L^۲$ کمترین مقدار E است که معادله‌ی شعاعی انرژی مجاز می‌دارد (برای این که انرژی کمینه باشد باید $\dot{r} = ۰$ باشد و می توان نشان داد که کمینه‌ی پتانسیل موثر، $L^2/2mr^2 - \alpha/r$ نیز به این مقدار E می‌انجامد.) اگر $V_{eff}\,(r)$ را رسم کنیم وضعیت همانند شکل (۲۷-۷) است. ذره در ته چاه پتانسیل به دام افتاده است و هیچ حرکتی در راستای r ندارد.



شکل ۲۷-۷

- **بیضی** ($۰ < \varepsilon < ۱$)

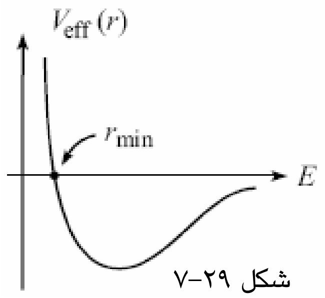
اگر $۱ > \varepsilon > ۰$ باشد، رابطه‌ی (۶۹-۷) می‌گوید $-m\alpha^۲/۲L^۲ < E < ۰$ و از معادله‌های (۷۰-۷) و (۷۱-۷) مقدارهای $r_{\min}$ و $r_{\max}$ به دست می‌آیند. البته هنوز روشن نیست که مدار بیضی است؛ این را باید نشان داد. اگر $V_{eff}\,(r)$ را رسم کنیم همانند شکل (۲۸-۷) خواهد شد. ذره در بین $r_{\min}$ و $r_{\max}$ نوسان می‌کند و انرژی آن منفی است. بنابراین ، ذره در چاه پتانسیل به دام افتاده است.



شکل ۲۸-۷

- **سهمی** ($\varepsilon = ۱$)

اگر $\varepsilon = ۱$ باشد آنگاه رابطه‌ی (۶۹-۷) می گوید $E = ۰$ است. این مقدار E یعنی این که ذره درست به اندازه‌ای انرژی دارد که بتواند خود را به بینهایت برساند (با $r \to \infty$ سرعت ذره به صفر می‌گراید). کمینه فاصله‌ی ذره تا چشمه‌ی نیرو از رابطه‌ی (۷۰-۷) به دست می‌آید و برابر است با $r_{\min} = L^۲/۲m\alpha$ و بیشینه‌ی آن را رابطه‌ی (۷۱-۷) به دست می‌دهد: $r_{\max} = \infty$. بازهم روشن نیست که مدار سهمی است و باید سهمی بودنش را ثابت کرد. اگر $V_{eff}\,(r)$ را رسم کنیم همانند شکل (۲۹-۷) خواهد شد. از شکل دیده می‌شود که ذره در راستای r پس و پیش نمی‌رود و در نتیجه نوسان نمی‌کند. اگر در آغاز ذره به سوی مرکز نیرو در حال حرکت باشد تا فاصله‌ی $r_{\min}$ به آن نزدیک می‌شود و سپس از این نقطه برمی‌گردد و به بینهایت می‌رود. اگر ذره در آغاز از مرکز نیرو در حال دور شدن باشد، به بینهایت می‌رود و دیگر هرگز به چشمه‌ی نیرو نزدیک نمی‌شود، زیرا در بینهایت انرژی آن صفر می‌شود.



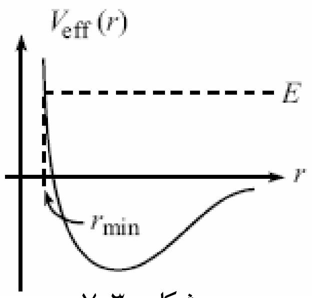
شکل ۲۹-۷

- هذلولی ($\varepsilon > ۱$)

اگر $\varepsilon > ۱$ باشد، از معادله‌ی (۶۹-۷) می‌بینیم که $E > ۰$ است. یعنی انرژی ذره در بینهایت هم هنوز غیر صفر است (با $r \to \infty$ پتانسیل به صفر می‌گراید و سرعت ذره به مقدار غیر صفر $\sqrt{۲E/m}$ می‌رسد.) باز هم کمینه فاصله از مرکز نیرو با رابطه‌ی (۷۰-۷) داده می‌شود و از رابطه‌ی (۷۱-۷) می‌بینیم $r_{\max} = \infty$. در اینجا هم هنوز روشن نیست که مسیر هذلولی است و باید آن

را نشان داد. در شکل (۳۰-۷) پتانسیل موثر رسم شده است و نشان می‌دهد که ذره در راستای r حرکت نوسانی ندارد.

۳-۷-۷ اثبات شکل مدارها



شکل ۳۰-۷

برای این که نشان دهیم به ازای مقدارهای مختلف ε شکل مدار چگونه است، به رابطه‌ی (۶۷-۷) برمی‌گردیم. در واقع، این رابطه نمایش برش‌های مخروطی است. به یاد بیاورید که ما کمیت با بعد طول $\ell \equiv L^۲/m|k| = L^۲/m\alpha$ را پیش‌تر شناساندیم. برای پی‌گیری این بحث ازمختصات کارتزی استفاده میکنیم. اگر رابطه‌ی (۶۸-۷) را در $r\ell$ ضرب کنیم و به یاد داشته باشیم که $\cos\theta = x/r$ و $r=(x^۲+y^۲)^{۱/۲}$ آنگاه رابطه‌ی (۶۸-۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\ell = (r+\varepsilon x) \qquad (۷-۸۱)$$

یا $r=\ell-\varepsilon x$. با جاگذاری $r=(x^۲+y^۲)^{۱/۲}$ و پس از مجذور کردن این رابطه خواهیم داشت

$$x^۲+y^۲ = \ell^۲ - ۲\ell\varepsilon x + \varepsilon^۲ x^۲ \qquad (۷-۸۲)$$

حالا این رابطه را برای مقدارهای مختلف ε بررسی می کنیم.

- دایره ($\varepsilon = ۰$)

به ازای $\varepsilon = ۰$ رابطه ی (۸۲-۷) به صورت $x^۲+y^۲=\ell^۲$ درمی‌آید که معادله‌ی دایره‌ای به شعاع $\ell = L^۲/m\alpha$ است و مرکز آن در مبداء مختصات قرار دارد، جایی که چشمه‌ی نیرو در آنجا ست.

- بیضی ($۰<\varepsilon<۱$)

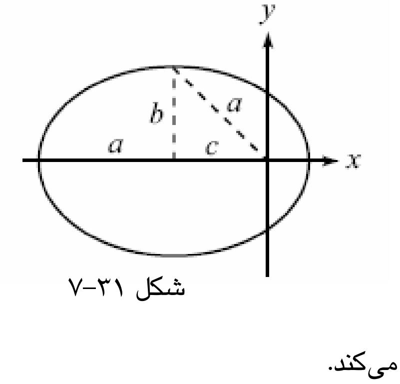
در این حالت اگر در رابطه‌ی (۸۲-۷) نسبت به x مربع کامل بسازیم می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$(۱-\varepsilon^۲)x^۲ + ۲\varepsilon\ell x + \frac{\varepsilon^۲\ell^۲}{۱-\varepsilon^۲} + y^۲ = \frac{\ell^۲}{۱-\varepsilon^۲} \qquad (۷-۸۳)$$

اگر دو طرف رابطه‌ی بالا را به $\ell^۲/(۱-\varepsilon^۲)$ تقسیم کنیم می‌توان آن را با اندک عملیات جبری به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(x+a\varepsilon)^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \quad ; \quad a = \frac{\ell}{۱-\varepsilon^۲} \quad , \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{۱-\varepsilon^۲}} \qquad (۷-۸۴)$$

که معادله‌ی بیضی به مرکز $(-\ell\varepsilon/(۱-\varepsilon^۲), ۰)$ است. a و b به ترتیب نیم‌محورهای بزرگ و کوچک این بیضی‌اند. نیم فاصله‌ی بین کانون‌های آن $c=\sqrt{a^۲-b^۲} = \ell\varepsilon/(۱-\varepsilon^۲)$ است. بنابراین، یک کانون در مبداء مختصات قرار دارد. این بیضی در شکل (۳۱-۷) نشان داده شده است. توجه کنید که $c/a=\varepsilon$ گریز از مرکز آن است. توجه کنید که برای بیضی $E<۰$ است و نیم‌محور ها را می‌توانیم برحسب انرژی به صورت زیر بنویسیم



شکل ۳۱-۷

$$a = \frac{\ell}{۱-\varepsilon^۲} = \frac{|\alpha|}{۲|E|} \quad , \quad b^۲ = a\ell = \frac{L^۲}{۲m|E|} \qquad (۷-۸۵)$$

پس، طول نیم‌محور بزرگ، a، با مقدار E داده می‌شود و ℓ را تکانه‌ی زاویه‌ای L تعیین می‌کند.

جالب است که بپرسیم هر بخش مدار را ذره در چه زمانی می‌پیماید. پاسخ پرسش را با توجه به رابطه‌ی میان تکانه‌ی زاویه‌ای و آهنگ روبش مساحت، رابطه‌ی (۳۳-۷) ، می توان به دست آورد. داریم $dA/dt = L/2m$. بنابراین ، تنها کاری که باید انجام

داد این است که مساحت روبیده شده با بردار شعاعی را حساب و سپس آن را در $۲m/L$ ضرب کرد. به ویژه، چون سطح بیضی $A=\pi ab$ است، برای دوره‌ی مدار داریم $\tau=(۲m\pi ab)/L$. پس می‌توانیم بنویسیم

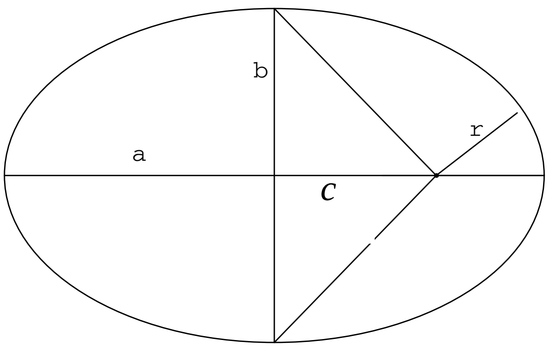
$$\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^{۲}=\frac{m^{۲}a^{۲}b^{۲}}{L^{۲}}=\frac{m^{۲}a^{۳}\ell}{m|\alpha|\ell}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^{۲}=\frac{m}{|\alpha|}a^{۳} \tag{۷-۸۶}$$

از رابطه‌ی (۷-۸۵) به آسانی دیده می‌شود که برای مدار دایره با شعاع a، رابطه‌ی بالا به پاسخ درستی می‌انجامد. برای سیاره یا ماهواره‌ای که پیرامون جرم مرکزی M می‌چرخد داریم

$$\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^{۲}=\frac{a^{۳}}{GM} \tag{۷-۸۷}$$

که بیان *قانون سوم کپلر* برای حرکت سیاره‌هاست: مربع دوره‌ی مدار با توان سوم نیم‌محور بزرگ متناسب است.

مثال۸-۷ (مدار زمین): مدار زمین بیضی با مرکزگریزی $\varepsilon=۰{,}۰۱۶۷$است. مرکز نیروی گرانش (خورشید) در یکی از کانون های آن به فاصله‌ی c از مرکز بیضی قرار دارد. اگر مدار زمین به با محور کوچک به دو نیم تقسیم شود چه مدت زمان اضافی زمین در یک نیمه نسبت به نیمه‌ی دیگر سپری خواهد کرد؟



شکل ۳۲-۷

حل: از شکل (۳۲-۷)روشن است که مساحت جارو شده توسط بردار شعاعی برابر است با

(نصف مساحت بیضی) $\pm$ (مساحت مثلث با قاعده‌ی $۲b$ و ارتفاع c)

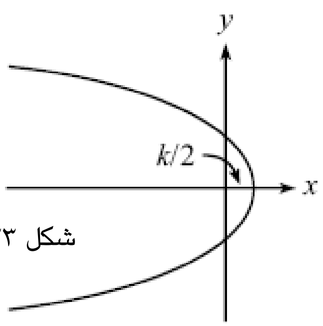
یا به بیان دیگر $(۱/۲)\pi ab\pm cb$. بنابراین، باتوجه به رابطه‌ی (۳۳-۷) داریم $t=A\,۲m/L$ که در آن A سطح روبیده شده است و t زمان روبش آن است. پس نسبت زمان‌های روبیده شدن نیمه‌ی چپ و نیمه‌ی راست بیضی عبارت است از

$$\frac{t_{۱}}{t_{۲}}=\frac{\pi ab/۲+cb}{\pi ab/۲-cb}=\frac{(۱/۲)+(\varepsilon/\pi)}{(۱/۲)-(\varepsilon/\pi)}$$

و اختلاف این دو زمان $t_{۱}-t_{۲}=۲\varepsilon/\pi$ سال یا ۳,۸۸ روز است.

- .سهمی $(\varepsilon=۱)$

برای $\varepsilon=۱$ رابطه‌ی (۶۹-۷) به صورت $y^{۲}=\ell^{۲}-۲\ell x$ درمی‌آید. می‌توان آن را به صورت دیگر، $y^{۲}=-۲\ell(x-\ell/۲)$، هم نوشت که معادله‌ی سهمی با راس $(\ell/۲,۰)$ است. فاصله‌ی کانونی این سهمی $\ell/۲$ است (برای سهمی $y^{۲}=٤ax$ فاصله‌ی کانونی a است). پس، مدار یک سهمی است که کانون آن در مرکز نیرو قرار دارد و در شکل شکل (۳۳-۷) نشان داده شده است.



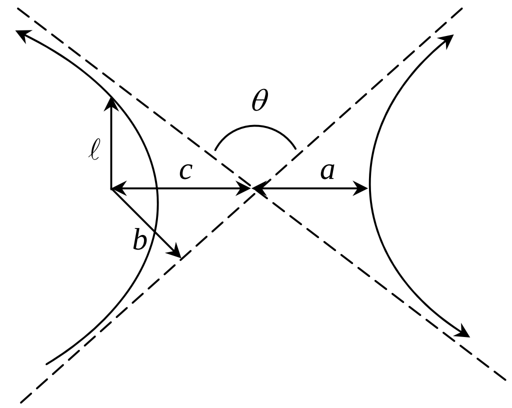
شکل ۳۳-۷

- هذلولی $(\varepsilon>۱)$

در این حالت معادله‌ی (۸۲-۷) را پس از کامل کردن مربع نسبت به x می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{(x-c)^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1 \quad \text{با} \qquad b^{2}=a\ell=\frac{L^{2}}{2mE} \quad , \quad a=\frac{1}{\varepsilon^{2}-1}=\frac{\alpha}{2E} \qquad (۸۸-۷)$$

توجه کنید که $E>0$ است. این معادله‌ی یک هذلولی است که مرکز آن در $(c,0)$ قرار دارد. در شکل (۳۴-۷) نیم‌محورهای a و



شکل ۳۴-۷

b نشان داده شده‌اند. یک شاخه‌ی هذلولی (شاخه‌ی سمت چپ در شکل (۳۴-۷)) به مدار در حالت ربایشی و شاخه‌ی دیگر به حالت رانشی مربوط اند. مانند پیش، a با انرژی E و ℓ با تکانه‌ی زاویه‌ای L مشخص می‌شوند. توجه کنید که نیم‌محور کوچک b، همان پارامتر برخورد است و عبارت است از نزدیک‌ترین فاصله‌ی مسیر تا مبداء که ذره اگر روی خط راست حرکت کند می‌تواند به آن فاصله برسد (در راستای خط های مجانب) نیم‌فاصله‌ی کانونی برابر است با $c=\sqrt{a^{2}+b^{2}}=\varepsilon\ell/(\varepsilon^{2}-1)$.
بنابراین، کانون در مرکز نیرو قرار دارد و $\varepsilon=c/a$ است .

مثال ۹-۷ (مدار یک ستاره ی دنباله دار): کمینه فاصله‌ی ستاره‌ی دنباله‌داری از خورشید نصف شعاع مدار زمین (فرض کنید دایره باشد) است و سرعت ستاره‌ی دنباله‌دار در آن نقطه دو برابر سرعت مداری زمین است. سرعت ستاره‌ی دنباله‌دار را در هنگامی که مدار زمین را قطع می‌کند بیابید. با چه زاویه‌ای مدار زمین را قطع می‌کند؟ آیا ستاره‌ی دنباله‌دار از سامانه‌ی خورشیدی خواهد گریخت؟ چه مداری را می‌پیماید؟

حل : در حضیض خورشیدی (نزدیکترین فاصله تا خورشید) $r=a_E/2$ و $v=2v_{C.E}$. پس انرژی عبارتست از: (با استفاده از رابطه ی (۷۵-۷))

$$E=2mv_{C.E}^{2}-\frac{2GM_{s}m}{a_{E}}=0$$

بنابراین سرعت ستاره‌ی دنباله‌دار در هنگام قطع‌کردن مدار زمین برابر است با

$$\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{GM_{s}m}{a_{E}}=mv_{C.E}^{2}$$

پس $v=\sqrt{2}v_{C.E}$. تکانه‌ی زاویه‌ای برابر است با $L=ma_{E}v_{C.E}$ و بنا به تعریف ℓ داریم: $\ell=a_{E}$. پس زاویه‌ی قطع مدار عبارتست از $ma_{E}v\cos\alpha=L=ma_{E}v_{C.E}$ یا $\alpha=45^{\circ}$. چون $E=0$ است، ستاره‌ی دنباله‌دار تنها به اندازه‌ی لازم انرژی دارد که از سامانه‌ی خورشیدی بگریزد و مدارش سهمی است

۴-۷-۷ قانون های کپلر

اینک با کمترین کار اضافی می‌توان قانون‌های کپلر را بیان کرد. کپلر (۱۶۳۰-۱۵۱۷) پیش از نیوتون (۱۷۲۷-۱۶۴۲) می‌زیست و قانون‌های خود را با استفاده از داده‌های تجربی رصدی به دست آورد. از زمان کوپرنیکوس (۱۵۴۳-۱۴۷۳) می‌دانستند که سیاره‌ها دور خورشید می‌گردند، اما کپلر و نیوتون نخستین کسانی بودند که این دانش را به زبان کمی بیان کردند.

در قانون‌های کپلر این فرض نهفته است که خورشید به اندازه‌ی کافی پرجرم است که مکانش تغییر نکند. این یک تقریب بسیار خوبی است

- **قانون نخست**

سیاره‌ها در مدارهای بیضی حرکت می‌کنند و خورشید در یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد.

ما این قانون را با رابطه‌ی (۸۴-۷) ثابت کردیم. البته اجسامی وجود دارند که در آسمان سرگردانند و در مدار بیضی از کنار خورشید می‌گذرند. اما این اجسام را ما سیاره نمی‌نامیم چون هرگز آنها را برای بار دوم نمی‌بینیم.

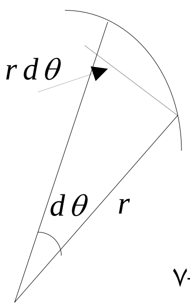
- **قانون دوم**

بردار شعاعی از خورشید به سیاره با آهنگی مساحت را می روبد که مستقل از مکان سیاره در مدارش است.

این قانون چیزی نیست جز بیان پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای. مساحتی را که بردار شعاعی در زمان کوتاهی می‌روبد برابر است با $dA = r(r\,d\theta)$ ؛ چون $r\,d\theta$ قاعده‌ی مثلث باریک در شکل (۳۵-۷) است. بنابراین، با استفاده از $L = mr^2\dot{\theta}$ داریم

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} \qquad (۸۹-۷)$$

که مقدار ثابتی است، چون برای هر نیروی مرکزی، L ثابت است.



شکل ۳۵-۷

- **قانون سوم**

مربع دوره‌ی ، T ، یک مدار با مکعب طول نیم‌محور بزرگ، a ، مدار متناسب است. دقیق تر بگوییم

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{\alpha} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\circ} \qquad (۹۰-۷)$$

اثبات: اگر از رابطه‌ی (۸۹-۷) نسبت به زمان روی یک دور کامل مدار انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$A = \frac{LT}{2m} \qquad (۹۱-۷)$$

اگر مساحت $A = \pi ab$ بیضی را در این رابطه جاگذاری کنیم و از رابطه‌ی (۸۸-۷) استفاده کنیم و بنویسیم $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ آنگاه خواهیم داشت

$$\pi^2 a^4 = \left(\frac{L^2}{m(1-\varepsilon^2)}\right)\frac{T^2}{4m} \qquad (۹۲-۷)$$

سمت راست رابطه‌ی بالا را به این صورت نوشتیم تا بتوانیم از $L^{2} \equiv m\left|\alpha\right|\ell$ استفاده کنیم و جمله‌ی درون پرانتز را به صورت $\alpha\ell/(1-\varepsilon^{2}) \equiv \alpha a$ بنویسیم. a با رابطه‌ی (۷-۸۸) داده شده است. اما چون $\alpha a \equiv (GM_{\odot}m)a$، پس خواهیم داشت

$$\pi^{2}a^{4} = \frac{(GM_{\odot}ma)T^{2}}{4m} \qquad (۷-۹۳)$$

که همان رابطه‌ی (۷-۹۰) است.

نکته: تاکنون فرض کردیم که مرکز ربایش در حال سکون است. یعنی جرم مرکز ربایش را بینهایت پنداشتیم و از حرکت آن چشم پوشیدیم. در واقعیت، جرم مرکز ربایش (مثل خورشید) محدود است و بنابراین، حرکت دو جسم حول مرکزجرم مشترک آنهاست. اگر جرم محدود مرکز ربایش را M بنامیم، مادامی که حرکت نسبی مورد بررسی است باید جرم m در مخرج رابطه‌ی (۷-۹۳) را با **جرم کاهیده** ($\mu \equiv mM/(m+M)$ جایگزین کرد. پس، قانون سوم کپلر، رابطه‌ی (۷-۹۰) را باید به صورت زیردرمی‌آید

$$T^{2} = \frac{4\pi^{2}a^{3}\mu}{GM_{\odot}m} = \frac{4\pi^{2}a^{3}}{G(M_{\odot}+m)} \qquad (۷-۹۴)$$

بنویسیم. پس، دوره‌ی حرکت نه تنها با مکعب نیم‌محور بزرگ متناسب است بلکه به طور وارون با مجموع جرم‌ها نیز متناسب است. در عمل، البته چون جرم خورشید، M بسیار بزرگتر از جرم سیاره‌های آن است؛ رابطه‌ی (۷-۹۰) را به جای (۷-۹۴) به کار می‌بریم. در رابطه با حرکت نسبی دو جسم، کافی است که بگوئیم اگر ناظر در روی خورشید باشد، مدار هر سیاره یک بیضی خواهد بود که خورشید در یکی از کانون‌های آن قرار دارد. به همین ترتیب، اگر ناظر بر روی سیاره باشد، خورشید مداری بیضی شکل خواهد داشت که سیاره در یکی از کانون‌های آن قرار دارد.

فیزیک محاسباتی مدارهای کپلری

نُه سیاره‌ی سامانه‌ی خورشیدی را در نظر بگیرید. از داده‌های تجربی جرم، مرکزگریزی، ε، و غیره استفاده کنید .

(الف): برای هر یک از این نه سیاره درستی قانون سوم کپلر را بررسی کنید.

(ب): مدارهای سیاره‌ها را رسم کنید. یکای فاصله را یکای نجومی برگزینید.

مسئله ها

۷-۱ (**نیروی پوسته ی کروی**): پوسته‌ی کروی به جرم M با شعاع داخلی R_{1} و شعاع بیرونی R_{2} را در نظر بگیرید. ذره‌ای به جرم m در فاصله‌ی r از مرکز پوسته قرار دارد. نیروی وارد به جرم m را برحسب r ($0 \le r \le \infty$) به دست آورید و آن را رسم کنید.

۷-۲ (**سیم بینهایت**): ذره‌ای به جرم m به فاصله‌ی ℓ از سیم راست بسیار دراز (بینهایت) با چگالی ρ kg/m قرار دارد. نشان دهید که نیروی وارد به ذره $F = 2G\rho m/\ell$ است. (*راهنمایی:* اگر از زاویه به عنوان متغیر استفاده کنید انتکرال‌گیری

ساده‌تر می‌شود. اگر فاصله در راستای سیم را متغیر برگزینید، آنگاه جایگزینی $\tan\theta$ کارها را آسان‌تر می‌کند).

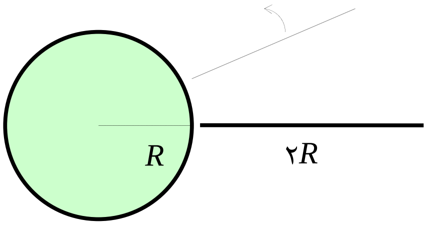
۷-۳ (صفحه‌ی گسترده): **(الف)** از صفحه‌ی بینهایت گسترده‌ای به چگالی σ سوراخی به شعاع R بریده‌ایم. اگر L خط عمود برصفحه باشد و از مرکز سوراخ بگذرد. چه نیرویی به ذره‌ای با جرم m که برروی خط و به فاصله‌ی x از مرکز سوراخ قرار دارد، وارد می‌شود؟ (*راهنمایی:* صفحه را به صورت حلقه‌های هم‌مرکز فرض کنید. .نیروی وارد به m را از سوی یک حلقه به دست آورید و سپس انتگرال بگیرید.)

(ب): اگر ذره‌ای خیلی نزدیک به مرکز سوراخ و در روی L از حالت سکون رها شود، نشان دهید که این ذره حرکت نوسانی خواهد داشت و بسامد نوسان را حساب کنید.

(پ): اگر ذره در روی L و به فاصله‌ی x از صفحه رها شود، سرعت ذره را هنگامی که از مرکز سوراخ می‌گذرد به دست آورید. پاسخ خود را برای حد x های بزرگ (یا به طور هم‌ارز، برای R کوچک) بیازمایید.

۷-۴ (میله، سفینه، زمین): **(الف)**: سیاره‌ای به جرم M وشعاع R را در نظر بگیرید. دوره‌ی یک سفینه در مداری به شعاع $۲R$ حول این سیاره چقدر است؟

(ب): میله‌ی درازی به طول $۲R$ را در نظر بگیرید که درست از سطح زمین تا شعاع $۳R$ قرار دارد (شکل ۳۶-۷) اگر شرایط اولیه چنان فراهم شده باشد که میله در حالی که همواره در راستای شعاع است حول زمین بگردد؛ دوره‌ی مدار میله را حساب کنید.



شکل ۳۶-۷

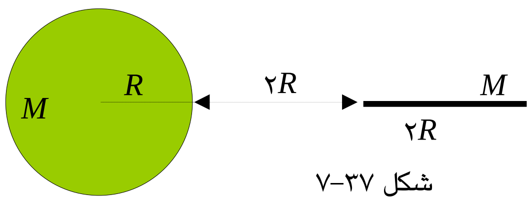
۷-۵ (سیاره‌ای از ماسه): سیاره‌ای به جرم M و شعاع R با چگالی یکنواخت از ماسه تشکیل شده است. برای این که همه‌ی دانه‌های ماسه را به بینهایت منتقل کنیم و هر دانه‌ی ماسه از دانه‌ی دیگر بسیار دور باشد، چه مقدار انرژی لازم است؟

۷-۶ (چاهی تا مرکز زمین): تلاش غیر معمول زیر را در نظر بگیرید: چاه باریکی (سطح A) را از سطح زمین تا مرکز کره‌ی زمین می‌کَنیم. لوله‌ای با همان سطح در آن قرار می‌دهیم و دیواه‌های لوله را با ماده‌ای اندود می‌کنیم تا اصطکاک نداشته باشد. درون لوله را با موادی که از چاه بیرون آورده شده است دوباره پُر می‌کنیم. اگر شعاع زمین R باشد و چگالی آن را یکنواخت و برابر $\rho\ \mathrm{kg/m^۳}$ فرض کنیم:

(الف): نیروی گرانش وارد به جرم کوچک dm در درون لوله و به فاصله‌ی r از مرکز زمین چقدر است؟

(ب): چه نیرویی در ته لوله لازم است تا اندرونه‌ی لوله را نگه دارد؟

۷-۷ (میله و کره): کره‌ی همگن به جرم M و شعاع R در فاصله‌ی $۲R$ از میله‌ی همگن و به طول $۲R$ برابر شکل (۳۷-۷) قرار دارد. اگر این دو جسم از حالت سکون رها شوند سرعت آنها درست پیش از برخوردشان در اثر ربایش گرانشی چقدر است؟



شکل ۳۷-۷

۷-۸ (دو ذره): دو جرم یکسان m به فاصله‌ی ℓ از یکدیگر قرار دارند وبا نیروی گرانش با هم برهمکنش می‌کنند. به هر دوی این ذره‌ها سرعت مماسی مناسب $v_۰$ می‌دهیم تا هر کدام در دایره‌ای به شعاع $\ell/۲$ حول مرکز جرمشان بگردند.

(الف): $v_۰$ را حساب کنید

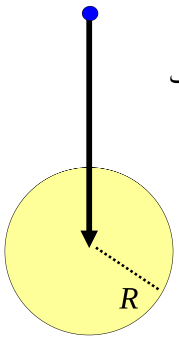
(ب): اگر یکی از این جرم‌ها را بگیریم و ساکن نگه بداریم، کمترین فاصله‌ای که جرم دوم می‌تواند به آن نزدیک شود چیست؟

(راهنمایی: (۱) جهت سرعت در نزدیکترین فاصله چیست؟ (۲) چه کمیت‌هایی پایسته اند؟)

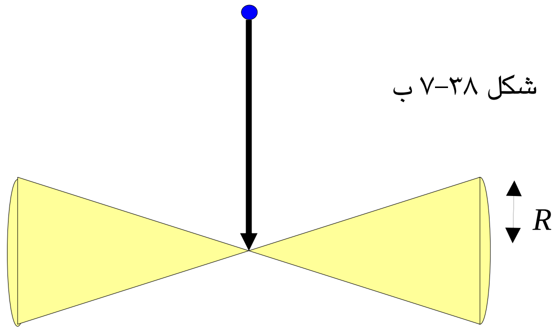
۹-۷ (دو مخروط و پوسته کروی):

(الف): پوسته ی کروی نازکی با شعاع R و چگا لی $\sigma\,\text{kg/m}^۲$ را در نظر بگیرید. ذره ای در بینهایت و از حالت سکون به سوی این پو.سته حرکت می کند (به خاطر نیروی گرانش). سرعت ذره در هنگامی که به مرکز پو.سته می‌رسد چقدر است؟ (فرض کنید در روی پوسته سوراخ کوچکی وجود دارد و ذره از آن سوراخ می گذرد. شکل (۳۸-۷ الف).

(ب): دو پوسته‌ی مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و طول یال L را برابر شکل (۳۸-۷ ب) قرار داده‌ایم. ذره‌ای که از بینهایت و از حالت سکون در راستای خط عمود بر ارتفاع پوسته‌ها سقوط می کند. سرعت ذره را هنگامی که به راس مخروط‌ها می‌رسد به دست آورید. برای هر دو بخش (الف) و (ب) فرض کنید کره و مخروط ها در فضا ثابت اند.

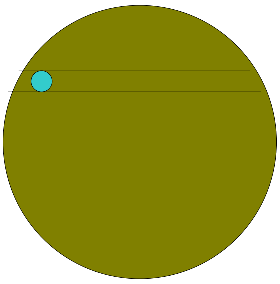


شکل ۳۸-۷ الف



شکل ۳۸-۷ ب

۱۰-۷ (سفر تند): تونل مستقیمی بین دو نقطه‌ی زمین، برابر شکل (۳۹-۷)، کنده‌ایم جسمی را از یک انتها در درون تونل رها می‌کنیم. حرکت این جسم چگونه خواهد بود؟ چه مدت طول می‌کشد تا به انتهای دیگر تونل برسد؟ از اصطکاک چشم پوشی کنید و فرض کنید که چگالی زمین (به نادرستی) یکنواخت است.



شکل ۳۹-۷

۱۱-۷ (نسبت پتانسیل ها): دو سامانه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

(۱) جرم m در گوشه‌ی یک صفحه‌ی تخت مربع به جرم M قرار دارد.

(۲) جرم m در مرکز یک صفحه ی تخت مربع به جرم M قرار دارد.

نسبت انرژی پتانسیل جرم m را در دو وضعیت بالا بیابید. (*راهنمایی*: در شکل پیشنهادی (۴۰-۷) A و B را حساب کنید



شکل ۴۰-۷

۱۲-۷ (سرعت نسبی): دو ذره به جرم‌های m و M نخست در فاصله‌ی بینهایت از هم ودر حال سکون‌اند. این دو ذره در اثر گرانش یکدیگر را جذب می‌کنند. سرعت نسبی آن‌ها هنگامی که فاصله‌شان r باشد، چقدر است؟

۷-۱۳ **(گرانش بیشینه)**: ماده‌ای خمیری‌مانند با چگالی ثابتی داریم که می‌توانیم به هر شکلی در بیاوریم. نقطه‌ی P در فضا داده شده است. خمیر را به چه شکل در آوریم تا در نقطه‌ی P بیشترین گرانش را ایجاد کند؟

۷-۱۴ **(سرعت گریز- پرش از یک سیاره)**:

(الف) : سرعت گریز ذره‌ای از روی سیاره‌ای کروی به شعاع R و جرم M را بیابید. مقدارهای عددی آن را برای زمین، ماه و خورشید حساب کنید.

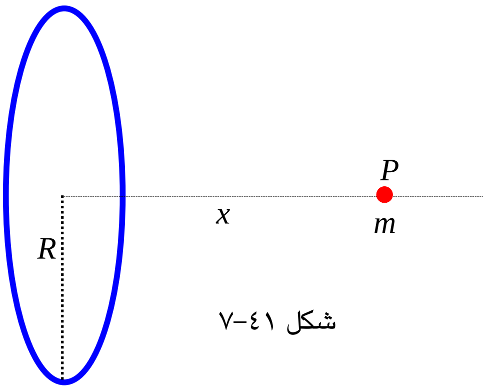
(ب): یک سیاره‌ی کروی باید چه شعاعی داشته باشد تا با یک پرش، انسان بتواند از روی آن به فضا پرتاب شود. فرض کنید چگالی سیاره با چگالی زمین برابر است. (*راهنمایی:* با گمانه‌ای مانند طول پرش در این سیاره با طول پرش در زمین یکی است مسئله را حل کنید.)

۷-۱۵ **(بازهم نسبت پتانسیل ها)**: مکعبی با چگالی یکنواخت را در نظر بگیرید. نسبت پتانسیل گرانشی ذره‌ای که در مرکز مکعب قرار دارد به پتانسیل گرانشی آن در یک گوشه‌ی مکعب چیست؟ (*راهنمایی:* این مسئله را می‌توان بدون انجام انتگرال های پیچیده هم حل کرد.)

۷-۱۶ **(نیروی گرانش)**: **(الف)** فرض کنید چگالی زمین مقدار ثابتی است. رابطه‌ای برای نیروی گرانش وارد به ذره‌ای به جرم m برحسب فاصله‌ی شعاعی r بیابید. رابطه‌ی شما باید نشان دهد که با پایین رفتن در چاهی ژرف نیروی گرانش هم کاهش پیدا می‌کند.

(ب): با این حال، چگالی زمین ثابت نیست و در واقع با پایین رفتن به درون چاه، گرانش هم *افزایش* می‌یابد. شرایطی که لازم است این وضعیت در سیاره‌ای وجود داشته باشد این است که به ازای مقدار معین A داشته باشیم $\rho_c < A\rho_{av}$. در اینجا ρ_{av} چگالی میانگین سیاره است و ρ_c چگالی در پوسته‌ی سطح سیاره است. با این فرض که چگالی تقارن کروی دارد (یعنی تنها به شعاع بستگی دارد) مقدار A را بیابید.

۷-۱۷ **(واپاشی یک سیاره)**: سیاره‌ای با چگالی جرمی یکنواخت ρ را در نظر بگیرید. اگر این سیاره خیلی تند در مدارش حول مرکز نیرو بگردد، از هم پاشیده می‌شود (جرمش از آن جدا و در فضا پراکنده می‌شود.) نشان دهید که کمینه مقدار دوره‌ی گردش برابر است با $T=\sqrt{3\pi/G\rho}$. برای $\rho=5{,}5\,\mathrm{gr/cm^3}$ (میانگین چگالی زمین) این مقدار کمینه‌ی T را حساب کنید.



شکل ۴۱-۷

۷-۱۸ **(نیروی گرانش حلقه)**: حلقه‌ای به جرم M و شعاع R را برابر شکل (۴۱-۷) در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه‌ی P به فاصله‌ی x از صفحه‌ی حلقه و بر روی محور گذرنده از مرکز حلقه است.

(الف): نیروی وارد به جرم m واقع در نقطه‌ی P چیست؟

(ب): انرژی پتانسیل جرم m در نقطه‌ی P چقدر است.

(پ): نشان دهید $F=-dV/dx$

(ت): اگر ذره از بینهایت و از حالت سکون در راستای محور شروع به حرکت بکند؛ هنگام گذار از مرکز حلقه سرعتش چقدر است؟

۱۹-۷ (اگرزمین بایستد؟): اگر زمین به ناگهان از گردش حول خورشید باز ایستد، چه مدت طول می‌کشد تا با خورشید برخورد کند؟ (*راهنمایی*: فرضکنید مسیر زمین نیمی از یک مدار بیضی بسیار باریک است و از قانون کپلر استفاده کنید)

۲۰-۷ (مدار دایره پایدار): در پتانسیل $V(r)=-A/r^n$ با $A>0$ به ازای چه مقدارهای n مدار ذره‌ای دایره‌ی پایدار است؟

۲۱-۷ (مدار دایره‌ی ناپایدار): ذره‌ای تحت اثر نیروی $F(r)=-2A/r^3$ در مدار دایره حرکت می‌کند. نشان دهید که ذره هم چنین می‌تواند حرکت شعاعی (به سوی مرکز نیرو یا بیرون از آن) داشته باشد. (این نمونه‌ای از حرکت ناپایدار است. اندک اختلال در مدار دایره‌ای ذره سبب حرکت شعاعی آن می‌شود.) برای حرکت شعاعی ذره θ را برحسب تابعی از r بیابید.

۲۲-۷ (پتانسیل r^{-3}) : ذره‌ای در پتانسیل $V(r)=-C/(3r^3)$ حرکت می کند.

(الف): برای L معین، بیشینه مقدار V_{eff} را حساب کنید.

(ب): پتانسیل موثر را رسم کنید و با استفاده از آن بگویید که اگر ذره از بینهایت با سرعت اولیه v_0 و پارامتر برخورد b حرکت کند، به ازای چه مقدار بیشینه‌ی b به دام پتانسیل خواهد افتاد.

۲۳-۷ (پتانسیل r^k) : ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V(r)=\beta r^k$ حرکت می‌کند. اگر تکانه‌ی زاویه‌ای آن L باشد

(الف): شعاع r_0 مدار دایره‌ای را بیابید.

(ب): به ذره تلنگر کوچکی می‌زنیم به طوری‌که شعاع آن حول r_0 نوسان کند. بسامد، ω_r این نوسان‌ها را به دست آورید.

(پ): نسبت بسامد ω_r به بسامد حرکت (نزدیک به) دایره، $\omega_\theta=\dot{\theta}$ را حساب کنید. به ازای چند مقدار k این نسبت یک عدد گویا می‌شود. در حرکت ذره بحث کنید.

۲۴-۷ (حرکت دایره‌ای با فنر): ذره‌ای به جرم $2\,\mathrm{kg}$ به انتهای فنربدون جرم بسته شده است و در روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. انتهای دیگر فنر به نقطه‌ی بدون اصطکاک ثابت شده است. فنر نیروی $3r$ به جرم وارد می‌کند که در آن r فاصله‌ی ذره تا انتهای ثابت فنر است. ذره روی دایره‌ای حرکت می‌کند و انرژی کل آن $E=12\,\mathrm{J}$ است

(الف): شعاع مدار و سرعت جسم را بیابید.

(ب): به ذره تلنگری می‌زنیم و با این کار به آن سرعت لحظه‌ای در راستای شعاع و برابر $1\,\mathrm{m/s}$ می‌دهیم. حالت‌های سامانه را پیش و پس از ضربه در نمودار انرژی نشان بدهید.

(پ): برای مدار جدید کمینه و بیشینه‌ی r را حساب کنید.

۲۵-۷ (ماهواره): ماهواره‌ای به جرم m در مدار دایره دور زمین می‌گردد. شعاع مدار r_0 و جرم زمین M است.

(الف): انرژی مکانیکی ماهواره را حساب کنید.

(ب): فرض کنید ماهواره در لایه‌ی بالایی جو می‌گردد و هنوز به آن نیروی ضعیف پس‌کشی وارد می‌شود. در اثر این نیرو ماهواره به طور مارپیچی به زمین نزدیک می‌شود. چون نیروی پس‌کشی ضعیف است، تغییر شعاع مدار بسیار کُند خواهد بود و می‌توان فرض کرد که در هر لحظه، ماهواره در مداری دایره‌ای با شعاع r است. تغییر تقریبی شعاع مدار، Δr ، در هر دور گردش ماهواره چقدر است؟

(پ): تغییر تقریبی در انرژی جنبشی ماهواره را از یک مدار به مدار دیگر، به دست آورید.

۷-۲۶ (**مسیر مارپیچ نمایی**): به ازای L داده شده‌ای، پتانسیل $V(r)$ را چنان بیابید که مسیر ذره $r = Ae^{a\theta}$ (مسیر مارپیچ) باشد. A و a مقدارهای ثابتند. (راهنمایی: رابطه‌ای برای $\dot{r}$ بیابید که در آن θ نباشد و از معادله‌ی شعاعی انرژی استفاده کنید.)

۷-۲۷ (**مسیر مارپیچ توانی**): به ازای L داده شده‌ای، پتانسیل $V(r)$ را چنان بیابید که مسیر ذره به صورت $r = C\theta^k$ باشد. C و k مقدارهای ثابت اند.

فصل ۸

سامانه دو جسمی؛ برخورد

در این فصل سامانه‌ی منزوی دو جسمی را بررسی می کنیم. منزوی به این معنی است که در سامانه فقط نیروی متقابل بین دو جسم وجود دارد. با این حال، اگر گرانش را نیز در نظر بگیریم، حل مسئله چندان دشوار نخواهد بود، اما نتیجه‌ی آن کاربرد-های گسترده دارد. بنابراین، میدان گرانش **یکنواخت** را هم در نظر می‌گیریم.

۸ـ۱ مختصات مرکز جرم و مختصات نسبی

نخست چارچوبی را در نظر بگیرید که مکان‌های دو ذره نسبت به آن $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ اند. جرم ذره‌ها را m_1 و m_2 بنامید. اگر $\mathbf{F}$ نیرویی باشد که m_1 به m_2 وارد می‌کند، آنگاه بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که m_2 به m_1 وارد می‌کند $-\mathbf{F}$ است. پس، معادله‌های حرکت در میدان گرانش یکنواخت $\mathbf{g}$ عبارت‌اند از:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{F}$$
$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = m_2\mathbf{g} - \mathbf{F} \qquad (۸-۱)$$

مکان ذره‌ها را باید نسبت به یک چارچوب اندازه بگیریم. هر چارچوب لخت (چارچوبی که شتاب ندارد) با چارچوب لخت دیگری هم‌ارز است و می‌تواند به کار برود. اما چارچوب خاصی وجود دارد که برای ما برتری‌هایی را به همراه دارد. این چارچوب خاص، چارچوب مرکز جرم است. در بخش۲-۸ آن را تعریف خواهیم کرد. پیش از آن لازم است که مرکزجرم دو جرم را تعریف کنیم. این تعریف، پیش درآمدی برای تعیین مرکز جرم هر جسم عمومی است و موضوع فصل ۹ است.

به جای متغیرهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ بهتر است متغیرهای تازه‌ای را به کار ببریم. مکان **مرکز جرم** دو جرم m_1 و m_2 را با رابطه‌ی

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (۸-۲)$$

و مکان نسبی آن‌ها را با

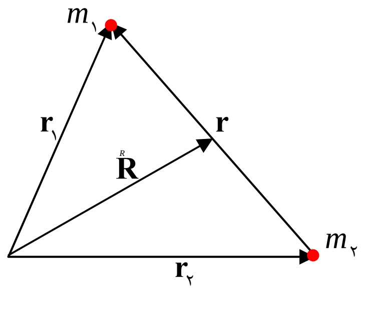
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad (۸-۳)$$

تعریف می‌کنیم. در شکل (۱-۸) این بردارها نشان داده شده‌اند. اگر دو معادله‌ی رابطه‌ی (۱-۸) را با هم جمع کنیم معادله‌ی حرکت مکان $\mathbf{R}$ به دست می‌آید.

$$M\ddot{\mathbf{R}} = M\mathbf{g} \qquad , \qquad M = m_1 + m_2 \qquad (۸-٤)$$

یکی از خوبی‌های نماد $\mathbf{R}$ برای مرکزجرم این است که تأکید می‌کند بردار $\mathbf{R}$ با جرم کل $\mathbf{M}$ همراه است.

معادله‌ی حرکت $\mathbf{r}$ را نیز می‌توان از رابطه‌ی (۱- ۸) به دست آورد. نخست این معادله‌ها را به جرم‌ها تقسیم کنید و سپس از یکدیگر کم کنید؛ به دست می‌آید.



شکل ۱-۸

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_۱ &= g + \frac{۱}{m_۱}\mathbf{F}\\ \ddot{\mathbf{r}}_۲ &= g - \frac{۱}{m_۲}\mathbf{F}\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \ddot{\mathbf{r}}_۱ - \ddot{\mathbf{r}}_۲ = \left(\frac{۱}{m_۱} + \frac{۱}{m_۲}\right)\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad ; \qquad \mu = \frac{m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲} \tag{۸–۵}$$

μ جرم **کاهیده** نامیده می شود، چون همیشه از تک تک $m_۱$ و $m_۲$ کمتر است. رابطه‌ی (۵–۸) می‌گوید، حرکت جرم $m_۲$ نسبت به $m_۱$ دقیقاً همان است که اگر ذره‌ی $m_۱$ ثابت می‌بود و $m_۲$ با جرم موثر μ حرکت می‌کرد. اینک دو معادله‌ی (٤– ۸) و (۵– ۸) کاملاً از یکدیگر جدا شده‌اند. رابطه‌ی (٤– ۸) نشان می‌دهد که مرکز جرم با شتاب ثابت $\mathbf{g}$ حرکت می‌کند. برای حالتی که $\mathbf{g} = ۰$ است (یعنی گرانش وجود ندارد و به راستی سامانه منزوی است) رابطه‌ی (٤– ۸) با قانون پایستگی تکانه هم‌ارز است.

$$M\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{P} = \text{ثابت} \tag{۸ ـ ٦}$$

معادله‌ی حرکت (۵– ۸) برای مکان نسبی، همانند معادله‌ی حرکت تک ذره‌ای با جرم μ است که تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ است. اگر بتوان مسئله‌ی این تک‌ذره را حل کرد، آنگاه می‌توان مسئله‌ی دو ذره رانیز حل کرد. اگر بتوان $\mathbf{R}$ و $\mathbf{r}$ را به صورت تابعی از زمان یافت، می‌توان با حل هم‌زمان معادله‌های (۲– ۸) و (۳ـ ۸) مکان ذره‌ها را به دست آورد. چون داریم

$$\mathbf{r}_۱ = \mathbf{R} + \frac{m_۲}{M}\mathbf{r} \qquad , \qquad \mathbf{r}_۲ = \mathbf{R} - \frac{m_۱}{M}\mathbf{r} \tag{۸ ـ ۷}$$

معادله‌های (٤–۸) و (۵–۸) دو معادله‌ی جدا از هم‌اند. یکی معادله‌ی حرکت مرکزجرم و دیگری معادله‌ی حرکت جرم کاهیده است. جدایی میان حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی را می‌توان به تکانه‌ی زاویه‌ای کل و انرژی جنبشی هم تعمیم داد. باتوجه به رابطه‌ی (۷– ۸) داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m_۱\mathbf{r}_۱ \times \dot{\mathbf{r}}_۱ + m_۲\mathbf{r}_۲ \times \dot{\mathbf{r}}_۲\\ &= m_۱\left(\mathbf{R} + \frac{m_۲}{M}\mathbf{r}\right)\times\left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_۲}{M}\dot{\mathbf{r}}\right) + m_۲\left(\mathbf{R} - \frac{m_۱}{M}\mathbf{r}\right)\times\left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_۱}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)\end{aligned} \tag{۸–۸}$$

اگر پرانتزها را با دقت‌کردن در ضرب برداری آنها، در هم ضرب کنیم جمله‌های $\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{R}}$ یکدیگر را حذف می‌کنند و خواهیم داشت

$$\mathbf{L} = M\,(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}) + \mu\,\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \tag{۸–۹}$$

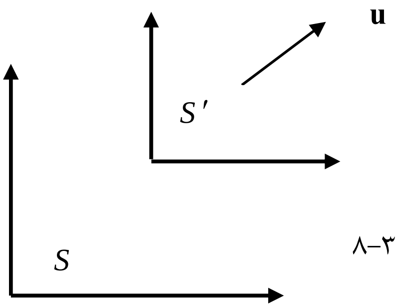
به همین ترتیب، اگر از رابطه‌های (۷– ۸) نسبت به زمان مشتق بگیریم و در $T = (۱/۲)m_۱\dot{\mathbf{r}}_۱^۲ + (۱/۲)m_۲\dot{\mathbf{r}}_۲^۲$ جایگزین کنیم، پس از اندک عملیات جبری خواهیم داشت

$$T = (۱/۲)M\dot{\mathbf{R}}^۲ + (۱/۲)\mu\dot{\mathbf{r}}^۲ \tag{۸–۱۰}$$

این رابطه‌ی چشمگیری است. از این رابطه آشکار است که انرژی جنبشی کل سامانه جمع انرژی‌های جنبشی دو جرم "پنداری" است. یکی انرژی جنبشی جسمی به جرم $(M = m_۱ + m_۲)$ است که با سرعتی برابر سرعت مرکزجرم حرکت می‌کند. دیگری، انرژی جنبشی جسمی به جرم μ است که با سرعت مکان نسبی $\mathbf{r}$ حرکت می‌کند. توجه کنید که جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (۱۰–۸) انرژی جنبشی در چارچوب مرکزجرم است، اما $\mathbf{r}$ فاصله از مرکزجرم نیست. جمله‌ی نخست را می‌توان انرژی جنبشی جسمی به جرم M پنداشت که بردار مکان آن $\mathbf{R}$ است. یعنی انرژی جرم M جایگزیده در مرکزجرم.

۱-۲-۸ چارچوب مرکزجرم

هنگامی که از تکانه حرف می‌زنیم، به طور ضمنی چارچوب خاصی را در نظر داریم. به هر حال، سرعت ذره ها را باید نسبت به چارچوبی اندازه گرفت. وقتی سخن از سرعت است، باید بگوییم نسبت به کدام چارچوب آن را اندازه می‌گیریم. چارچوب S را در شکل(۳-۸) در نظر بگیرید. چارچوب دیگر S' را هم که نسبت به S با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند در نظر بگیرید. سرعت ذره‌ای در S با رابطه‌ی (۸-۱) در فصل ۱، به سرعت ذره در S' مربوط است:



شکل ۳-۸

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \qquad (۸-۱۱)$$

سامانه‌ای منزوی شامل دو ذره را در S تصور کنید. این دو ذره باهم برخورد می‌کنند. اینک می‌پرسیم: اگر تکانه‌ی کل دو ذره در چارچوب S پایسته باشد، آیا در طول برخورد ذره‌ها در چارچوب S' نیز تکانه کل پایسته است؟ پاسخ روشن است. در S' نیز تکانه پایسته است؛ چون تکانه‌های اولیه و نهایی سامانه، در چارچوب S' ، در مقایسه با چارچوب S، هر دو به اندازه‌ی $(\sum m_i)\mathbf{u}$ افزایش می‌یابند (به بیان دیگر، هنگامی که در فصل ۵ پایستگی تکانه را بررسی کردیم در هیچ جا نگفتیم که از چه چارچوبی استفاده می‌کنیم. فقط فرض کردیم چارچوب شتاب‌دار نیست. اگر چارچوب شتاب‌دار می‌بود $\mathbf{F}$ دیگر با $m\mathbf{a}$ برابر نمی شد.) بنابراین، بگذارید به چارچوب یگانه‌ای بیندیشیم که در آن، تکانه‌ی کل سامانه‌ی ذرات صفر است. یک چنین چارجوبی را **چارچوب مرکزجرم**(چارچوب CM) می‌گویند. اگر در چارچوب S تکانه‌ی کل $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ باشد آنگاه چارچوب مرکزجرم، S' ، چارچوبی است که باید نسبت به S با سرعت

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M} \qquad (۸-۱۲)$$

حرکت کند ($M = \sum m_i$ جرم کل سامانه‌ی ذرات است). اثبات این که چارچوب S' با این سرعت $\mathbf{u}$ نسبت به S همان چارچوب مرکزجرم است (یعنی در آن تکانه‌ی کل صفر است) دشوار نیست. با استفاده از رابطه‌ی (۱۱-۸) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= \sum m_i \mathbf{v}'_i = \sum m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) \\ &= \sum m_i (\mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{P}}{M}) = (\mathbf{P} - \mathbf{P}) = ۰\end{aligned} \qquad (۸-۱۳)$$

پس، در این چارچوب تکانه‌ی کل صفر است.

چارچوب مرکزجرم بسیار سودمند است. فرایندهای فیزیکی در این چارچوب تقارن بیشتری دارند و این سبب شفاف بودن نتایج می‌شود. فیزیک پیشه‌های نظری بیشتر کارهای پژوهشی خود را در این چارچوب انجام می‌دهند. گاهی به چارچوب مرکزجرم چارچوب **تکانه‌صفر** نیز می‌گویند. چون در این چارچوب، مرکز جرم ساکن است و حرکت نمی‌کند. اما چارچوب مرکزجرم معمول‌تراست. (در میدان گرانش این چارچوب شتاب‌دار و در نتیجه نا لخت است؛ با این وجود، هنوز هم سودمند است.)

تعریف مرکزجرم برای دو ذره، رابطه‌ی (۲-۸)، را می‌توان به صورت زیر به بیش از دو ذره هم تعمیم داد

$$\mathbf{R}=\frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$ (۸-۱۴)

واقعیت این که در چارچوب مرکزجرم، خودِ مرکزجرم حرکت نمی‌کند از این نکته نتیجه می‌شود که مشتق $\mathbf{R}$ همان سرعت مرکزجرم است که با رابطه‌ی (۸-۱۲) تعریف شده است. پس، می‌توان مرکزجرم را مبداء مختصات برگزید. البته مکان نسبی $\mathbf{r}_i$ مستقل از این است که مبداء مختصات را کجا برگزینیم. با گزینه‌ی $\mathbf{R}_{CM}=0$ در رابطه‌ی (۸-۷) داریم

$$\mathbf{r}_{1CM}=\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\qquad,\qquad \mathbf{r}_{2CM}=-\frac{m_1}{M}\mathbf{r}$$ (۸-۱۵)

در این چارچوب تکانه های دو ذره باهم برابر و مخالف یکدیگرند

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_{1CM}=-m_2\dot{\mathbf{r}}_{2CM}=\mu\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{P}_{CM}$$ (۸-۱۶)

افزون بر چارچوب مرکزجرم، فیزیک پیشه‌ها از چارچوب دیگری به نام **چارچوب آزمایشگاه** هم استفاده می‌کنند. هیچ چیز خاصی در باره‌ی چارچوب آزمایشگاه وجود ندارد. چارچوب آزمایشگاه چارچوب لختی است که *شرایط مسئله* در آن چارچوب داده می‌شود. پس، هر چارچوب لخت را می توان "چارچوب آزمایشگاه" نامید. بیشتر وقت‌ها برای حل مسئله باید بین چارچوب‌های مرکزجرم و آزمایشگاه رفت و آمد کرد. برای نمونه، ممکن است که از ما خواسته شود پاسخ مسئله را در چارچوب آزمایشگاه بیابیم. برای این کار گاهی مجبوریم داده‌های مسئله در چارچوب آزمایشگاه را به چارچوب مرکزجرم ببریم (چون حل مسئله در چارچوب مرکزجرم آسان‌تر است) و آن را حل کنیم و سپس نتیجه را به چارچوب آزمایشگاه برگردانیم. مثال ۱-۸ این تبدیل ها را روشن‌تر نشان می‌دهد.

مثال ۱-۸ (دو جرم در یک بعد): در شکل (۳-۸) جرم m با سرعت v به سوی جرم در حال سکون M حرکت می‌کند و با آن برخورد می‌کند. جرم‌ها بدون اتلافی در انرژی کل آن‌ها، از هم وامی‌جهند. فرض کنید برخورد در یک بعد روی می‌دهد .سرعت نهایی جرم‌ها را پیدا کنید.



شکل ۳-۸

حل: برای حل این مسئله در چارچوب آزمایشگاه باید از پایستگی انرژی استفاده کنیم.

در این چارچوب رابطه‌ها زشت و پیچیده می‌شود (چون باید تکانه‌ها را به توان دو رساند). حل آن در چارچوب مرکزجرم ساده‌تر است و از این گونه پیچیدگی ها خبری نیست. (در مثال ۳-۸ همین مسئله را در چارچوب آزمایشگاه حل خواهیم کرد).

در چارچوب آزمایشگاه تکانه‌ی کل سامانه mv است. بنابراین، چارچوب مرکزجرم چارچوبی است که با سرعت $u\equiv mv/(m+M)$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه به راست حرکت می‌کند. پس، در چارچوب مرکزجرم سرعت ذره‌ها عبارتند از

$$v_{m,CM}=v-u=\frac{Mv}{m+M},\qquad v_{M,CM}=-u=-\frac{mv}{m+M}$$ (۸-۱۷)

برای آزمون درستی این نتیجه توجه کنید که تفاوت سرعت‌ها v و نسبت آنها M/m است.

نکته‌ی مهمی را که اینک باید به آن توجه کنیم این است که در چارچوب مرکزجرم اگر واقعا برخورد روی دهد، ذره‌ها باید پس از برخورد جهت سرعتشان را وارون کنند. چون پس از برخورد هم باید نسبت سرعت‌ها M/m باشد تا تکانه‌ی کل صفر باقی

بماند. پس، سرعت‌ها یا هر دو باید افزایش یابند ویا هر دو باید کاهش پیدا کنند. اما اگر هر کدام از این حالت‌ها روی دهد دیگر انرژی پایسته نمی‌ماند. (توجه کنید که در چارچوب مرکزجرم نیز از پایستگی انرژی استفاده کردیم. اما سنگینی آن در مقایسه با چارچوب آزمایشگاه اندک است).

اگر بخواهیم، می‌توانیم سرعت‌های نهایی را در چارچوب آزمایشگاه به دست آوریم. با توجه به رابطه‌ی (۱۱-۸) کافی است که سرعت مرکزجرم، $mv/(m+M)$ را به این دو سرعت جدید $-Mv/(m+M)$ و $mv/(m+M)$ بیفزاییم تا سرعت ها در چارچوب آزمایشگاه به صورت زیر به دست آیند.

$$v_{M,lab}=\frac{۲mv}{m+M} \quad \text{و} \quad v_{m,lab}=\frac{(m-M)v}{m+M} \tag{۸-۱۸}$$

نکته: اگر $m=M$ باشد، جرم سمت چپ پس از برخورد می‌ایستد و جرم سمت راست با سرعت v در چارچوب آزمایشگاه حرکت می‌کند. اگر $m \ll M$ باشد، جرم سمت چپ با سرعت $\approx v$ به عقب برمی‌گردد و جرم سمت راست اساسا حرکت نمی-کند. اگر $M \ll m$ باشد، آنگاه جرم سمت چپ با سرعت $\approx v$ به حرکتش ادامه می‌دهد و جرم سمت راست با سرعت $\approx ۲v$ حرکت می‌کند. این سرعت $۲v$ نتیجه‌ی چشم‌گیری است وبه برخی نتایج جالب می‌انجامد (مسئله توپ تنیس و توپ بسکتبال را ببینید.) اگر از چارچوب جرم سنگین‌تر m که در واقع چارچوب مرکزجرم است، به مسئله نگاه کنید این موضوع روشنی بیشتر دارد. ♣

بد نیست که همین مسئله را یک بار دیگر و در چارچوب آزمایشگاه هم حل کنیم. این حل در مثال ۳-۸ در بخش ۳-۸ آمده است.

۸-۲-۲ انرژی جنبشی

در سامانه‌ای با مجموعه‌ای از ذره‌ها، رابطه‌ی بین انرژی جنبشی در دو چارچوب متفاوت معمولا پیچیده و از روشنگری اندکی برخوردار است. اما اگر یکی از این چارچوب‌ها، چارچوب مرکزجرم باشد این ارتباط ساده و زیبا می‌شود.

فرض کنید S' چارچوب مرکزجرم است و نسبت به چارچوب دیگر S با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند. سرعت ذره‌ها در دو چارچوب با رابطه‌ی (۱۱-۸) داده شده است و برای هر ذره‌ی سامانه داریم

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}'_i+\mathbf{u} \tag{۸-۱۹}$$

انرژی جنبشی در چارچوب مرکزجرم عبارت است از

$$T_{CM}=\frac{۱}{۲}\sum m_i\,|\mathbf{v}'_i|^۲ \tag{۸-۲۰}$$

و در چارچوب S برابراست با

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{۱}{۲}\sum m_i\,|\mathbf{v}'_i+\mathbf{u}|^۲=\frac{۱}{۲}\sum m_i\,(\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{v}'_i+۲\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) \\ &= \frac{۱}{۲}\sum m_i\,|\mathbf{v}'_i|^۲+\mathbf{u}\cdot(\sum m_i\mathbf{v}'_i)+\frac{۱}{۲}|\mathbf{u}|^۲\sum m_i=T_{CM}+\frac{۱}{۲}Mu^۲ \end{aligned} \tag{۸-۲۱}$$

که در آن M جرم کل است و بنابه تعریف مرکزجرم داریم $\sum_i m_i\mathbf{v}'_i=۰$. پس، انرژی جنبشی در هر چارچوبی برابر است

با انرژی جنبشی در چارچوب مرکزجرم بعلاوه‌ی انرژی جنبشی ذره‌ای نقطه‌ای با جرمی برابر با جرم کل سامانه M که در مرکزجرم جایگزیده است (و با سرعت **u** حرکت می‌کند.) یک نتیجه‌ی آنی از این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: *درهر فرایند برخورد که انرژی جنبشی در یک چارچوب پایسته باشد در هر چارچوب دیگری هم پایسته است.*

مثال ۲-۸ (حرکت یک سیاره) : ارتباط بین دوره‌ی مدار ماه با فاصله‌ی ماه و زمین چیست؟ مکان ظاهری خورشید به خاطر تأثیر ماه در مکان زمین تا چه حد نوسان می‌کند؟

حل: معادله‌ی (۵- ۸) اینک به صورت زیر درمی‌آید.

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\, m_۱ m_۲}{r^۲}\hat{r} = -\frac{G\, M\, \mu}{r^۲}\hat{r} \qquad (۸-۲۲)$$

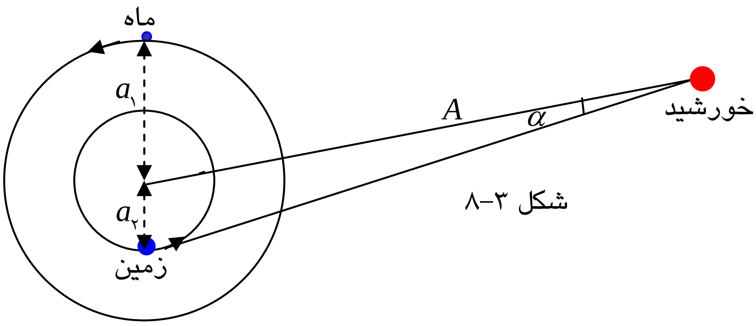
این رابطه، معادله‌ی حرکت ذره‌ای است که حول نقطه‌ی ثابتی با جرم M حرکت می‌کند. به ویژه برای مدار بیضی، دوره با رابطه (۹۰-۷) داده می‌شود:

$$\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^۲ = \frac{a^۳}{GM} \qquad (۸-۲۳)$$

توجه کنید که در اینجا a نیم‌محور بزرگ مدار ***نسبی*** (میانگین فاصله بین دو جسم) است و M جمع دو جرم است و نه جرم جسم سنگین‌تر. بنابراین، قانون سوم کپلر تنها به طور تقریب درست است: دوره‌ی مدار نه تنها به نیم‌محور بزرگ بستگی دارد بلکه به جرم هم وابسته است.

در منظومه‌ی خورشیدی تنها حالت‌هایی که جرم جسم سبک‌تر کسر چشمگیری از کل جرم است، سامانه‌ی زمین- ماه (با نسبت $m_۱/m_۲ = ۱/۸۱,۳$) و پلوتو ـ شارون (با نسبت $m_۱/m_۲ = ۱/۸,۵$) اند. اگر می‌خواستیم دوره‌ی مدار ماه را از قانون سوم کپلر حساب کنیم و آن رابا دوره‌ی مدار ماهواره‌ی کوچکی به دور زمین مقایسه کنیم، می‌بایست مقدار بالا را به دست می‌آوردیم، با این تفاوت که به جای M باید $m_۲$ را جایگزین می‌کردیم. این به دوره‌ای خواهد انجامید که حدود ٤ ساعت طولانی‌تر است. در چارچوب CM زمین- ماه، از رابطه‌ی (۱۵- ۸) دیده می‌شود که هر دو جسم در مدارهای بیضی حول مرکز جرم حرکت می‌کنند. نیم‌محورهای بزرگ آنها عبارتند از

$$a_۱ = \frac{m_۲}{M}a \qquad a_۲ = \frac{m_۱}{M}a \qquad (۸-۲٤)$$



شکل ۳-۸

برای سامانه‌ی زمین- ماه، $a = ۳,۸٤\times ۱۰^۵\,\mathrm{Km}$ است. بنابراین، زمین در مدار بیضی کوچکی با نیم‌محور بزرگ $a_۲ = a/۸۱,۳ = ٤٦۷۰\,\mathrm{Km}$ حول مرکزجرم می‌چرخد(توجه کنید که مرکزجرم سامانه در درون زمین قرار دارد.) این به نوسان‌های کوچکی (شکل ۳- ۸ را ببینید) با دامنه‌ی زاویه‌ای $\alpha \approx a_۲/A$ در جهت خورشید می‌انجامد که در آن A فاصله زمین تا خورشید است. چون $A = ۱,۵\times ۱۰^۸\,\mathrm{Km}$ است بنابراین $\alpha = ٦,٤$ ثانیه است

۳–۸ برخورد

بین ذرات دو گونه برخورد وجود دارد: برخورد *کشسان* (الاستیک) و برخورد *ناکشسان* (غیر الاستیک). برخوردهایی را کشسان می‌گویند که در فرایند برخورد انرژی جنبشی پایسته بماند. در واقع واژه‌ی "کشسان" نام رمز برای پایسته بودن انرژی جنبشی است. برخورد ناکشسان برخوردی است که انرژی جنبشی در فرایند برخورد پایسته نمی‌ماند و بخشی از آن هدر می‌رود. البته، در هر برخوردی انرژی **کل** پایسته است. اما در برخورد ناکشسان بخشی از آن به جای این که به صورت انرژی انتقالی ظاهر شود به گرما تبدیل می شود (یا به بیان دیگر به حرکت نسبی اتم‌های درون ذره‌ها تبدیل می‌شود.) حل مسئله‌هایی که به برخورد کشسان می‌پردازد به نسبت آسان است. کافی است معادله‌های پایستگی انرژی و تکانه را نوشت و آنها را برحسب متغیرهای خواسته شده حل کرد. در مسئله‌های مربوط به برخورد ناکشسان تغییری اندک در این محاسبه کارساز خواهد بود.

۱–۳–۸ برخورد کشسان در یک بعد

نخست به حرکت در یک بعد می‌پردازیم و برای این که روش عمومی حل این گونه مسئله ها را ببینیم مثال ۱–۸ را دوباره حل می کنیم.

مثال ۳–۸ (دوجرم در یک بعد- دوباره):



شکل ٤–۸

برابر شکل (٤–۸) جرم m با سرعت v به سوی جرم در حال سکون M حرکت و با آن برخورد می کند. جرم ها بدون اتلاف در انرژی کل، از هم وامی‌جهند. فرض کنید همه‌ی حرکت ها در یک بعد روی می‌دهند. سرعت نهایی جرم‌ها را پیدا کنید.

حل: سرعت‌های نهایی ذره ها را v' و V' بنامید (در مثال ۱–۸ ما از پرایم برای مشخص کردن چارچوب استفاده کردیم. در اینجا پرایم را برای نشان دادن سرعت‌های"نهایی" به کار می‌بریم). از پایستگی تکانه و انرژی به ترتیب داریم

$$mv + 0 = mv' + MV'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \qquad (8-25)$$

برای این که v' و V' را به دست بیاوریم باید این دو معادله را حل کنیم. از معادله‌ی اول برای V' خواهیم داشت $V' = m(v - v')/M$. اگر آن را در معادله‌ی دوم جاگذاری کنیم، به دست می‌آید

$$mv^2 = mv'^2 + M\frac{m^2(v-v')^2}{M^2} \Rightarrow \quad 0 = (m+M)v'^2 - 2mvv' + (m-M)v^2$$
$$\Rightarrow \quad 0 = [(m+M)v' - (m-M)v](v'-v) \qquad (8-26)$$

$v = v'$ یکی از پاسخ‌های معادله‌ی بالاست؛ اما پاسخی نیست که در پی آنیم. البته این پاسخ است، چون به یقین، شرایط اولیه در پایستگی انرژی و تکانه صدق می‌کنند. پاسخ $v = v'$ را می‌توان این گونه تفسیر کرد که ذره ها با هم برخورد نکرده‌اند. با

این وجود، دانستن این که $v=v'$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی بالاست ما را از دردسرهای اضافی حل معادله‌های درجه دو می‌رهاند. ریشه‌ی دیگر معادله‌ی (۲۶-۸) عبارت است از $v'=v(m-M)/(m+M)$. اگر این ریشه را در معادله‌ی نخست رابطه‌ی (۲۵-۸) قرار دهیم آنگاه V' هم به دست می‌آید و خواهیم داشت

$$v'=\frac{(m-M)v}{m+M} \qquad \text{و} \qquad V'=\frac{۲mv}{m+M} \tag{۸-۲۷}$$

این ها همان پاسخ‌هایی اند که در مثال ۱-۸ به دست آمدند.

حل مثال بالا اندکی دردناک بود؛ چون می‌بایست معادله‌ی درجه دو را حل می‌کردیم. قضیه‌ی زیر ما را از درگیر شدن با معادله‌های درجه دو در مسئله‌های برخورد در یک بعد بی نیاز می‌کند و در نتیجه بسیار سودمند است.

قضیه‌ی۱-۸ : *در برخورد کشسان در یک بعد، سرعت نسبی دو ذره پس ا ز برخور با منهای سرعت نسبی آنها پیش از برخورد د برابراست.*

اثبات: جرم ذره‌ها را m و M و سرعت اولیه‌ی آنها را به ترتیب v_i و V_i بنامید. سرعت نهایی (پس از برخورد) آنها را با v_f و V_f نشان دهید. از پایستگی تکانه و انرژی داریم

$$mv_i+MV_i=mv_f+MV_f$$
$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲+\frac{۱}{۲}MV_i^۲=\frac{۱}{۲}mv_f^۲+\frac{۱}{۲}MV_f^۲ \tag{۸-۲۸}$$

پس از جابه‌جایی جمله‌ها ، این رابطه‌ها به صورت زیر درمی‌آیند

$$m(v_i-v_f)=M(V_f-V_i) \tag{۸-۲۹}$$
$$m(v_i^۲-v_f^۲)=M(V_f^۲-V_i^۲)$$

اگر معادله‌ی دوم را به اولی تقسیم کنیم خواهیم داشت $v_i+v_f=V_i+V_f$. بنابراین داریم

$$v_i-V_i=-(v_f-V_f) \tag{۸-۳۰}$$

این نتیجه‌ای است که می‌خواستیم اثبات کنیم. توجه کنید که با تقسیم کردن دو معادله در بالا، پاسخ های $v_f=v_i$ و $V_f=V_i$ را از دست دادیم. اما همان گونه که در مثال۳-۸ گفتیم، این ها پاسخ های بدیهی اند. ■

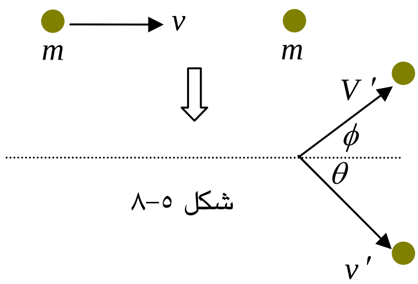
این قضیه‌ای بی‌مانند است. چون رابطه‌ای خطی است و گزاره‌ی پایستگی انرژی که یک معادله‌ی درجه دو است در آن نهفته است. بنابراین، استفاده از این قضیه به همراه پایستگی تکانه، که هر دو خطی‌اند، همان آگاهی‌ها را دربردارد که جفت معادله‌های (۲۵-۸) دارند. توجه کنید که این قضیه در چارچوب مرکزجرم کاملا واضح است. بنابراین در هر چارچوب دیگری هم برقرار است؛ چون فقط با تفاوت سرعت ها سروکار دارد.

۲-۳-۸ برخورد کشسان در دو بعد

اینک به حالت عمومی‌تر برخورد در دو بعد می پردازیم. برخورد در سه بعد هم شبیه حالت دو بعدی است. بنابراین، خود را به دو بعد محدود می‌کنیم. برخورد در دو بعد با حالت برخورد در یک بعد فرق چندانی ندارد. برخورد دو بعدی، در مقایسه با

برخورد در یک بعد، یک معادله‌ی اضافه برای پایستگی تکانه ونیز یک متغیر اضافی دارد. بگذارید این را با مثالی نشان دهیم.

مثال ۴-۸ (دو تیله): در شکل (۵-۸) تیله‌ای با سرعت v به تیله‌ی یکسانی که در حال سکون است نزدیک می‌شود. تیله‌ها با هم برخورد و از روی هم وامی‌جهند. تیله‌ی فرودی پس از برخورد با زاویه‌ی θ از مسیر اولیه‌اش منحرف می‌شود. سرعت نهایی تیله‌ها را بیابید. زاویه‌ی حرکت، ϕ، تیله‌ی دوم چقدر است؟



شکل ۵-۸

حل: سرعت‌های نهایی تیله‌ها را v' و V' بنامید. از پایستگی p_x، p_y و E به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} mv &= mv'\cos\theta + mV'\cos\phi \\ mv'\sin\theta &= mV'\sin\phi \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mV'^2 \end{aligned} \qquad (۸-۳۱)$$

باید این سه معادله را حل کنیم و سه مجهول v'، V' و ϕ را به دست آوریم. روش‌های گوناگونی برای حل همزمان آنها وجود دارد. یکی از آن ها به قرار زیر است:

دو معادله‌ی اول را به توان دو برسانید و با هم جمع کنید. پس از بردن $mv'\cos\theta$ به سمت چپ تساوی، خواهیم داشت

$$v^2 - 2vv'\cos\theta + v'^2 = V'^2 \qquad (۸-۳۲)$$

اگر این رابطه را با معادله‌ی سوم در رابطه‌ی (۳۱-۸) ترکیب کنیم V' حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$v' = v\cos\theta \qquad (۸-۳۳)$$

حال اگر در معادله‌ی سوم رابطه‌ی (۳۱-۸) به جای v' از رابطه‌ی (۳۳-۸) قرار دهیم ، به دست می‌آید

$$V' = v\sin\theta \qquad (۸-۳۴)$$

بنابراین، از معادله‌ی دوم رابطه‌ی (۳۱-۸) خواهیم داشت $m(v\cos\theta)\sin\theta = m(v\sin\theta)\sin\phi$ یا $\cos\theta = \sin\phi$ و سرانجام این که

$$\phi = 90^\circ - \theta \qquad (۸-۳۵)$$

به بیان دیگر، تیله‌ها با زاویه‌ی 90° نسبت به هم از روی هم وامی‌جهند. در مثال زیر این واقعیت روشن تر نشان داده شده است

مثال ۵-۸ (زاویه‌ی راست در بازی تیله): دو تیله‌ی یکسان با هم برخورد کشسان می‌کنند. با نوشتن $mv^2/2$ به صورت $m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/2$ نشان دهید که پس از برخورد، زاویه‌ی بین مسیر آنها 90° است.

حل: سرعت اولیه را $\mathbf{v}$ و سرعت‌های نهایی دو ذره را $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بنامید. از پایستگی تکانه و انرژی داریم

$$\begin{aligned} m\mathbf{v} &= m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 \\ \frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2) \end{aligned} \qquad (۸-۳۶)$$

معادله‌ی نخست می‌گوید $\mathbf{v}=\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲$. آن را در معادله‌ی دوم قرار دهید و توجه کنید که $(\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲)\cdot(\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲)=\mathbf{v}_۱\cdot\mathbf{v}_۱+۲\mathbf{v}_۱\cdot\mathbf{v}_۲+\mathbf{v}_۲\cdot\mathbf{v}_۲$. بنابراین، به دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_۱\cdot\mathbf{v}_۲=\circ \qquad (۸-۳۷)$$

به بیان دیگر، زاویه‌ی بین $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ برابر ۹۰° است. (**یا:** $\mathbf{v}_۱=\circ$ است یعنی تیله‌ی فرودی می‌ایستد؛ چون برخورد شاخ به شاخ است. یا: $\mathbf{v}_۲=\circ$ است ، یعنی تیله‌ها به هم برخورد نمی کنند.)

همان گونه که در مثال برخورد یک بعدی دیدیم، تصور برخورد درچارچوب مرکزجرم آسان‌تر است. در برخورد دو بعدی (یا سه بعدی) هم به همان دلیل‌ها (یعنی پایستگی تکانه و انرژی) نتیجه می‌گیریم که در چارچوب مرکزجرم سرعت‌های نهایی دو ذره‌ای که برخورد کشسان می‌کنند باید با سرعت پیش از برخورد شان برابر باشد. این سادگی در چارچوب مرکزجرم، نسبت به چارچوب آزمایشگاه، بی شک از روشنگری بیشتری برخوردار است.

۸-۴ فرایندهای ناکشسان ذاتی

در گروهی از مسئله‌ها، سامانه ویژگی‌های ذاتی ناکشسان دارد. در نگاه نخست این سرشت ناکشسانی سامانه چندان آشکار نیست. مهم نیست که چگونه به این مسئله‌ها نگاه کنید؛ در آنها به ناگزیر اتلاف انرژی جنبشی به صورت گرما نمایان خواهد شد. البته انرژی کل سامانه پایسته است و گرما فقط صورت دیگری از انرژی است. اما نکته در این است که اگر بخواهید مشتی $mv^۲/۲$ بنویسید و جمع آنها را پایسته نگه دارید به پاسخ نادرست خواهید رسید. این گونه مسئله‌ها از زیبایی خاصی برخوردارند. مثال زیر نمایش کلاسیک این گونه مسئله هاست.

مثال ۶-۸ (ماسه و تسمه): تسمه‌ای با سرعت ثابت v حرکت می‌کند و ماسه با آهنگ σ kg/s به طور عمود بر روی تسمه می‌ریزد.

(الف): چه نیرویی باید به تسمه وارد کنیم تا به حرکت با سرعت ثابتش v ادامه دهد؟

(ب): ماسه در واحد زمان چقدر انرژی به دست می‌آورد؟ **(پ)**: چه مقدار کار در واحد زمان انجام می‌دهیم؟

(ت): چه مقدار انرژی در واحد زمان به گرما تبدیل می‌شود:

حل: **(الف)** نیرویی را که باید به تسمه وارد کنیم با آهنگ تغییر تکانه برابر است. اگر جرم تسمه و ماسه‌ی روی آن را m فرض کنید آنگاه برای سرعت ثابت v داریم

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d\,(mv)}{dt}=m\,\frac{dv}{dt}+v\,\frac{dm}{dt}=\cdot+\sigma v \qquad (۸-۳۸)$$

(ب): مقدار انرژی جنبشی که ماسه در واحد زمان به دست می‌آورد برابر است با

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^۲}{۲}\right)=\frac{dm}{dt}\left(\frac{v^۲}{۲}\right)=\frac{\sigma v^۲}{۲} \qquad (۸-۳۹)$$

(پ): مقدار کاری را که ما در واحد زمان انجام می‌دهیم برابر است با

$$\frac{dW}{dt}=\frac{Fdx}{dt}=Fv\ =\sigma v^{۲} \qquad (۸-۴۰)$$

(ت): کار با آهنگ $\sigma v^{۲}$ انجام می‌گیرد و انرژی جنبشی با آهنگ $\sigma v^{۲}/۲$ افزوده می‌شود. پس" انرژی گم" شده باید با آهنگ $\sigma v^{۲}-\sigma v^{۲}/۲=\sigma v^{۲}/۲$ به گرما تبدیل شود.

در این مثال مقدار انرژی هدر رفته با انرژی جنبشی که ماسه به دست می‌آورد برابر است. این نتیجه را به صورت زیر می‌توان توضیح داد. برای سادگی این توضیح، تنها یک دانه ماسه با جرم M را در نظر بگیرید که روی تسمه می افتد.

در چارچوب آزمایشگاه: مدت زمانی طول می‌کشد تا ماسه نسبت به تسمه به حال سکون در بیاید، در این مدت، ماسه به اندازه‌ی $Mv^{۲}/۲$ انرژی جنبشی به دست می‌آورد؛ چون تسمه با سرعت v حرکت می‌کند. حالا از چارچوب تسمه به این مسئله نگاه کنید. در این چارچوب، ماسه با انرژی جنبشی اولیه $Mv^{۲}/۲$ روی تسمه می‌نشیند و کُند می‌شود تا در روی تسمه به حالت سکون در بیاید. بنابراین، همه‌ی انرژی $Mv^{۲}/۲$ آن به گرما تبدیل می‌شود. چون گرما در هر چارچوبی یکسان است، پس در چارچوب آزمایشگاه هم مقدار گرما همین است. بنابراین، می‌بینیم که برابری اتلاف انرژی به گرما و مقدار انرژی جنبشی به دست آمده در چارچوب آزمایشگاه، از این واقعیت برمی‌خیزد که تسمه با همان آهنگی نسبت به چارچوب آزمایشگاه (یعنی v) حرکت می‌کند که چارچوب آزمایشگاه نسبت به تسمه (باز هم v) حرکت می‌کند.

در حل مسئله‌ی بالا ما چیزی در باره‌ی سرشت اصطکاک بین تسمه و ماسه فرض نکردیم. اتلاف انرژی و تبدیل آن به گرما گزیر ناپذیر است. شاید گمان کنید که اگر ماسه به آرامی و در زمانی طولانی نسبت به تسمه به حال سکون در بیاید، می‌توان از اتلاف انرژی جلوگیری کرد. این گمان نادرستی است؛ زیرا اگر چه با کند حرکت کردن ماسه در روی تسمه، نیروی اصطکاک کم می‌شود اما طول مسیری که نیروی اصطکاک به ماسه اعمال می‌شود درازتر می‌شود و این دو یکدیگر را جبران می‌کند. هم‌چنین، اگر ماسه به طور سریع و ناگهانی در روی تسمه به حال سکون در بیاید آنگاه نیروی اصطکاک بزرگ و طول مسیری که این نیرو به ماسه اعمال می‌شود کوتاه است و این دو یکدیگر را جبران می‌کنند. هر طور که به مسئله نگاه کنید، کار نیروی اصطکاک همان مقدار غیر صفر است.

در مسئله‌های دیگر، ناکشسانی از اول آشکار است و چالش حل آنها به کار بردن درست $F=dp/dt$ به جای $F=ma$ است . چون جرم تغییر می‌کند $F=ma$ می‌تواند شما را گمراه کند. به مثالی برای این وضعیت ها توجه کنید.

مثال ۷-۸ (زنجیر وترازو): زنجیری به طول L و چگالی جرمی $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ را بربالای کفه‌ی ترازویی قائم نگه می‌داریم به طوری که انتهای پایین زنجیر با کفه‌ی ترازو تماس داشته باشد. زنجیر را رها می‌کنیم تا بیفتد. ترازو چه مقداری را برحسب تابعی از طول سقوط نکرده‌ی زنجیر نشان می‌دهد؟ (توجه کنید که ترازو نیرویی را نشان می‌دهد که به جسم روی خود وارد می‌کند).

حل ۱: فرض کنید y طول آن بخش از زنجیر باشد که هنوز در هواست و F نیرویی باشد که ترازو به زنجیر وارد می‌کند.

نیروی برآیند که به زنجیر وارد می‌شود $F-(\sigma L)g$ است (رو به بالا را مثبت فرض کردیم). تکانه‌ی زنجیر برابر است با $(\sigma y)\dot{y}$. توجه کنید که این مقدار منفی است چون $\dot{y}$ رو به پایین و در نتیجه منفی است. از برابری نیروی برآیند و تغییر تکانه داریم

$$F-\sigma Lg=\frac{d(\sigma y\dot{y})}{dt}=\sigma y\ddot{y}+\sigma\dot{y}^{۲} \qquad (۸-٤۱)$$

بخشی از زنجیر که هنوز در هواست، سقوط آزاد می‌کند و بنابراین، $\ddot{y}=-g$ است. هم‌چنین برای سقوط آزاد داریم $\dot{y}=-\sqrt{۲g(L-y)}$. اگر این دو را در رابطه‌ی (۸-٤۱) قرار دهیم خواهیم داشت

$$F=\sigma Lg-\sigma yg+۲\sigma(L-y)g=۳\sigma(L-y)g \qquad (۸-٤۲)$$

این پاسخ به ازای $y=L$ مقدار درستی به دست می‌دهد. این هم از ویژگی‌های گیرایی است که درست پیش ازآنکه آخرین جزء زنجیر بر روی کفه‌ی ترازو بنشیند، مقدار نیرویی که ترازو نشان می‌دهد $۳(\sigma L)g$ است. هنگامی که همه‌ی زنجیر بر روی ترازو قرار گرفت، عقربه‌ی ترازو ناگهان مقدار σLg را نشان خواهد داد.

حل ۲: نیروی عمودی که ترازو به زنجیر وارد می‌کند، دو کار انجام می‌دهد و بنابراین، دو بخش دارد. یک بخش این نیرو آن قسمت از زنجیر را که بر روی کفه‌ی ترازو نشسته است در آن جا نگه می‌دارد. این همان نیروی وزن قسمتی از زنجیر است که روی کفه‌ی ترازوست و برابر با $F_w=\sigma(L-y)g$ است. برای‌یافتن بخش دوم نیرو، باید تغییر تکانه‌ی، dp ، آن قسمت از زنجیر را حساب کرد که در زمان dt به کفه‌ی ترازو می‌رسد. مقدار جرمی که در زمان dt بر روی کفه‌ی ترازو می‌نشیند $dm=\sigma|dy|=\sigma|\dot{y}|dt=-\sigma\dot{y}dt$ است. سرعت این جرم در آغاز $\dot{y}$ است و با برخورد به کفه‌ی ترازو به طور ناگهانی به صفر کاهش می‌یابد. پس، تغییر تکانه آن $dp=۰-(dm)\dot{y}=\sigma\dot{y}^{۲}dt$ است. نیروی لازم برای ایجاد این تغییر تکانه

$$F_{dp/dt}=\frac{dp}{dt}=\sigma\dot{y}^{۲} \qquad (۸-٤۳)$$

است. چون $\dot{y}=\sqrt{۲g(L-y)}$ است ؛ پس نیروی کل که از سوی ترازو به زنجیر وارد می‌شود

$$F=F_w+F_{dp/dt}=\sigma(L-y)g+۲\sigma(L-y)g=۳\sigma(L-y)g \qquad (۸-٤٤)$$

است. توجه کنید که تا وقتی که همه‌ی طول زنجیر کاملا در کفه‌ی ترازو ننشسته است، داریم $F_{dp/dt}=۲F_w$ که مستقل از y است.

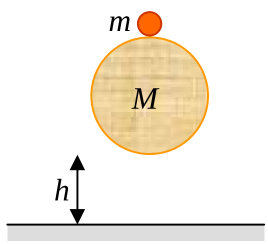
مثال های تکمیلی

ت-۱ جرم $٤m$ به سوی راست و جرم m به سوی چپ حرکت می‌کنند. سرعت هر دو جرم v است. جرم‌ها با هم برخورد کشسان می‌کنند. سرعت آزمایشگاهی جرم‌ها را پس از برخورد به دست آورید.

(**الف**): محاسبه را در چارچوب آزمایشگاه انجام دهید.

(**ب**): محاسبه را در چارچوب مرکزجرم انجام دهید.

ت-۲ ذره‌ای به جرم m در راستای محور x با سرعت v حرکت می‌کند و با ذره‌ی ساکنی به جرم Nm (N عدد ثابتی است) برخورد کشسان می‌کند. مشاهده می‌شود که پس از برخورد مولفه‌ی x سرعت آنها باهم برابراند. بردار سرعت ذره‌ی Nm با محور x چه زاویه‌ای می‌سازد؟



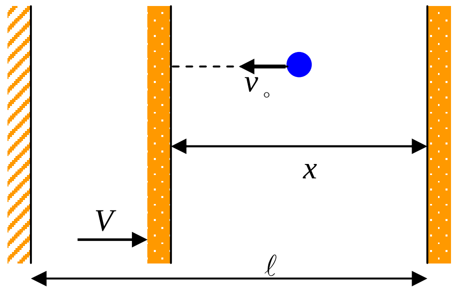
شکل ۶-۸

ت-۳ توپ کوچکی به جرم m برابر شکل (۶-۸) بر روی توپ بزرگتری به جرم M وقطر d قرار دارد. ارتفاع پایین‌ترین نقطه‌ی توپ بزرگ‌تر از زمین h است. توپ‌ها رها می‌شوند. فرض کنید $m \ll M$ است. توپ کوچک پس از برخورد کشسان با توپ بزرگ‌تر تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا می‌رود؟ برخورد توپ بزرگ‌تر با زمین کشسان است.

ت-۴ توپی بین دو دیوار حرکت می‌کند و هر بار که به یکی از دیوارها برخورد می‌کند از آن وامی‌جهد و با سرعت $v_{\circ}$ به سوی سطح دیگر حرکت می‌کند (شکل ۷-۸). اگر برخورد توپ با این دیوارها کشسان و فاصله‌ی بین دو دیوار ℓ باشد:

(الف): نیروی میانگین F وارد به هر دیوار را حساب کنید.

(الف): نیروی میانگین F وارد به هر دیوار را حساب کنید.



شکل ۷-۸

(ب): اگر دیوار سمت چپ به آهستگی با سرعت $V \ll v_{\circ}$ به سوی دیوار دیگر حرکت کند، تعداد برخوردها در واحد زمان افزایش می‌یابد (چون مسافت بین دیوارها کوتاه‌تر می‌شود و سرعت توپ در اثر برخورد با دیوار متحرک افزایش پیدا می‌کند.) نیروی F را برحسب فاصله‌ی x دیوارها بیابید.

(پ): نشان دهید که کار انجام شده برای جابه‌جایی دیوار از ℓ به x با افزایش انرژی جنبشی توپ برابر است.

ت-۵ ذره‌ای به جرم m و با سرعت $v_{\circ}$ با ذره‌ی در حالت سکون و با جرم M برخورد کشسان می‌کند. زاویه‌ی پراکندگی در چارچوب **مرکزجرم** θ است.

(الف): سرعت نهایی جرم m را در چارچوب آزمایشگاه به دست آورید.

(ب): چه کسری از انرژی جنبشی جرم m تلف شده است؟

ت-۶ *ضریب بازگردانی* ε در برخورد شاخ‌به‌شاخ دو ذره با نسبت سرعت نسبی دو ذره پش از برخورد به سرعت نسبی پیش از برخورد آنها تعریف می‌شود.

(الف): در برخورد کاملا ناکشسان ضریب بازگردانی ε چقدر است؟

(ب): ضریب بازگردانی در برخورد کشسان دو ذره چقدر است؟

(پ): توپی از ارتفاع h رها می‌شود و تا ارتفاع $H_{۱}$ از سطح زمین وامی‌جهد. نشان دهید که $\varepsilon = \sqrt{H_{۱}/h}$.

(ت): باد مناسب برای توپ بسکتبال باید چنان باشد که ضریب بازگردانی توپ ۰٫۸۵ باشد. توپی با این ضریب بازگردانی از ارتفاع ۱٫۲ m بالای یک سطح چوبی رها می‌شود. توپ تا چه ارتفاعی به بالا وامی‌جهد.

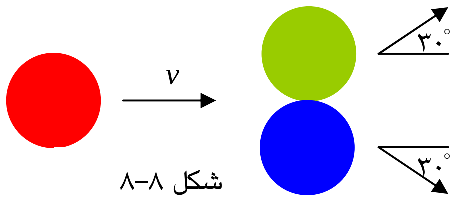
(ج): اگر ε ثابت باشد و ارتفاع اولین جهش توپ $H_{۱}$ باشد، نشان دهید که ارتفاع n-امین جهش توپ $H_n = \varepsilon^{۲n} h$ است.

ارتفاع هشتمین جهش توپ را حساب کنید.

مسئله ها

۸-۱ **(زاویه ی پراکندگی برابر)**: جرم $2m$ با سرعت v حرکت می‌کند و با جرم ساکن m برخورد کشسان انجام می‌دهد. اگر زاویه‌ی پراکندگی جرم ها نسبت به مسیر اولیه با هم برابر باشند این زاویه را بیابید.

۸-۲ **(سه توپ بیلیارد)**: یک توپ بیلیارد با سرعت v به سوی دو توپ کنارهم چنان نشانه گیری شده است که برابر شکل (۸-۸) به وسط آنها برخورد کند. در این آرایش، در اثر برخورد، توپ های سمت راست با سرعت‌های مساوی و با زاویه‌های برابر 30° نسبت به مسیر توپ سمت چپ پراکنده می شوند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد بیابید.



شکل ۸-۸

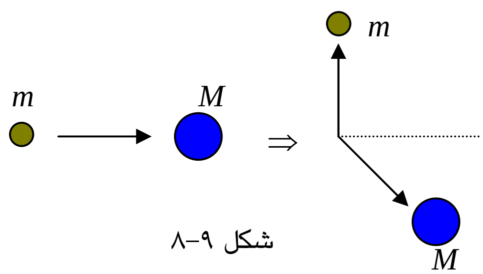
۸-۳ **(سرعت های نهایی)**: جرم $3m$ با سرعت v به راست و جرم m با سرعت v به چپ حرکت می‌کنند و با هم برخورد کشسان می‌کنند. سرعت‌های نهایی را در چارچوب آزمایشگاه به دو روش زیر حساب کنید:

(الف): محاسبه را در چارچوب آزمایشگاه انجام بدهید.

(ب): محاسبه را در چارچوب مرکزجرم انجام بدهید و سپس به چارچوب آزمایشگاه ببرید.

۸-۴ **(پراکندگی 90°)**: جرم m با سرعت v حرکت و با جرم ساکن M برخورد کشسان می‌کند. اگر پس از برخورد، m با زاویه‌ی 90° پراکنده شود (شکل ۸-۹) سرعت نهایی آن چقدر است؟ کمترین مقدار نسبت M/m چقدر باید باشد تا این انحراف 90° ممکن شود. (توجه: این مسئله در هر دو چارچوب آزمایشگاه و مرکزجرم قابل حل است. مسئله را در هر دو چارچوب حل کنید.)

۸-۵ در چارچوب آزمایشگاه توپی به جرم m با سرعت v به سمت راست می‌رود و با توپ دیگری به جرم $2m$ که در حال سکون است برخورد می‌کند. درچارچوب مرکزجرم دیده می‌شود که ۳/۴ انرژی در اثر برخورد به گرما تبدیل شده است. فرض کنید این برخورد در یک بعد انجام می‌گیرد.



شکل ۸-۹

(الف): سرعت‌های اولیه‌ی توپ‌ها را در چارچوب مرکزجرم حساب کنید.

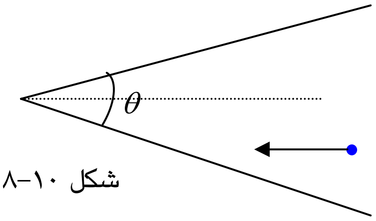
(ب): سرعت‌های نهایی توپ‌ها را در چارچوب مرکزجرم حساب کنید.

(پ): سرعت‌های نهایی توپ‌ها را در چارچوب آزمایشگاه بیابید.

۸-۶ **(سرعت بیشینه)**: جرم M در راستای محور x حرکت می‌کند و با جرم ساکن m برخورد کشسان می‌کند. برخورد لازم نیست که شاخ به شاخ باشد و بنابراین، زاویه‌های انحراف جرم‌ها از مسیر اولیه یکسان نیستند. اگر جرم m با زاویه‌ی θ منحرف شود، برای این که سرعتش در راستای y بیشینه مقدار ممکن را داشته باشد، θ چقدر باید باشد؟ (*راهنمایی*: برخورد را در چارچوب مرکزجرم تجسم کنید.)

۸-۷ **(زاویه‌های پراکندگی برابر)**: **(الف)** همانند مسئله‌ی ۱-۸، جرم $۲m$ با سرعت $V_۰$ حرکت می‌کند و با جرم ساکن m برخورد کشسان می‌کند. اگر جرم‌ها با زاویه‌ی یکسان نسبت به جهت جرم فرودی پراکنده شوند این زاویه را بیابید.

(ب): اگر بخواهیم جرم‌ها با زاویه‌های یکسان پراکنده شوند، بیشینه مقداری که به جای ضریب"۲" در $۲m$ می‌تواند باشد چیست ؟

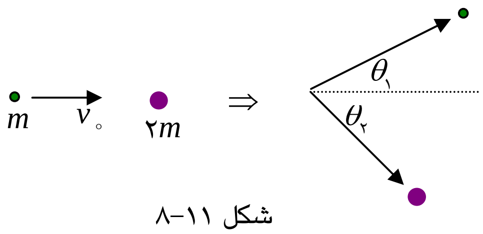


شکل ۱۰-۸

۸-۸ **(سالن مثلث)**: در سالن مثلث شکل بسیار درازی با زاویه‌ی راس θ، توپی را برابر (شکل ۱۰-۸) موازی نیمساز راس به سوی دیوار پرتاب می‌کنیم . توپ چند بار از دیوار وامی جهد؟ فرض کنید دیوار اصطکاک ندارد.

۸-۹ **(رابطه‌ی برداری سرعت ها)**: جرم m با سرعت v حرکت می‌کند و با جرم ساکن $۲m$ به طور کشسان برخورد می‌کند. اگر سرعت نهایی ذره‌ها به ترتیب $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ باشند نشان دهید که $\mathbf{v}_۲$ باید به $\mathbf{v}_۲+۲\mathbf{v}_۱$ عمود باشد.

۸-۱۰ **(برخورد در هوا)**: توپی را به طور قایم به بالا پرتاب می‌کنیم. در لحظه‌ای که به نقطه‌ی اوج می‌رسد با توپ یکسانی که با سرعت v و افقی حرکت می‌کند برخورد کشسان انجام می‌دهد (برخورد لزوما شاخ به شاخ نیست). بیشینه فاصله‌ی افقی که توپ دوم پیش از رسیدن دوباره به نقطه‌ی برخورد می‌پیماید چقدر است؟

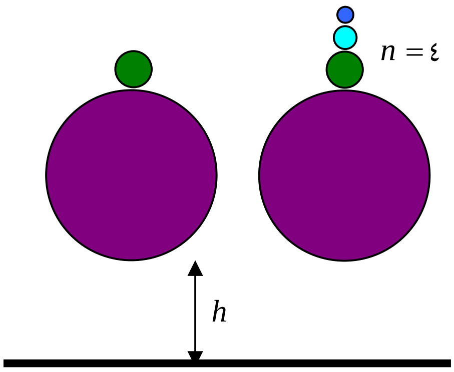


شکل ۱۱-۸

۸-۱۱ **(سرعت‌ها و زاویه‌های نهایی)**: جرم m با سرعت $v_۰$ حرکت می‌کند و همانند شکل (۱۱-۸) با جرم $۲m$ برخورد کشسان می‌کند. فرض کنید سرعت‌های نهایی برابرند. این سرعت را حساب کنید و یکی از زاویه‌های پراکندگی، $\theta_۱$ یا $\theta_۲$ را بیابید. (*راهنمایی*: بهترین روش حل مسئله برای یافتن زاویه‌ها این است که رابطه‌های مناسب را به توان دو برسانید و از $\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$ استفاده کنید.)

۸-۱۲ **(انرژی‌های یکسان)**: جرم m با سرعت $v_۰$ حرکت می‌کند و با جرم $۲m$ برخورد کشسان می‌کند (شکل ۱۱-۸) . فرض کنید انرژی‌های نهایی جرم‌ها برابرند. سرعت‌های نهایی $v_۱$ ، $v_۲$ و یکی از زاویه‌های پراکندگی، $\theta_۱$ یا $\theta_۲$ را بیابید.

۸-۱۳ **(توپ بسکتبال، توپ تنیس، تیله**.....): یک توپ تنیس با جرم کوچک $m_۲$ بر روی یک توپ بسکتبال با جرم بزرگتر $m_۱$ برابر شکل (۱۲-۸) قرار دارد. پایین توپ بسکتبال در ارتفاع h از سطح زمین است. توپ ها را رها می‌کنیم.



شکل ۱۲-

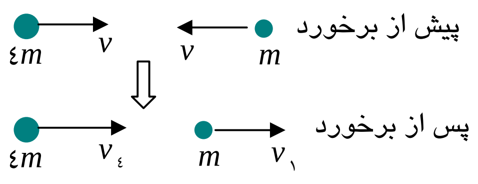
(الف): توپ تنیس تا چه ارتفاعی از زمین به بالا وامی‌جهد؟ توجه: محاسبه را در تقریب $m_۱\gg m_۲$ انجام دهید و فرض کنید که واجهش توپ‌ها کشسان است. برای این که تصویر روشنی از مسئله داشته باشید فرض کنید هنگام رها شدن توپ‌ها، آنها به اندازه‌ی بسیار اندکی از هم فاصله دارند و به هم نچسبیده اند.

(ب): در حالتی که n توپ بر روی هم چیده شده باشند (هر کدام بسیار

سبکتر از توپزیری) ارتفاع آخرین توپ را که وامی جهد بیابید. پاسخ برای $n=5$ چیست؟

حل مثال های تکمیلی

ت-۱ (الف) در چارچوب آزمایشگاه : در این چارچوب وضعیت پیش از برخورد و پس از برخورد در شکل (۸-۱۳) نشان داده شده اند. سرعت های نهایی را v_4 و v_1 بنامید و سوی راست را جهت مثبت فرض کنید. از پایستگی تکانه داریم



شکل ۸-۱۳

$$4mv + m(-v) = 4mv_4 + mv_1 \quad (۸-۴۵)$$
$$\Rightarrow 3v = 4v_4 + v_1$$

از پایستگی انرژی به دست می‌آید

$$\frac{1}{2}(4m)v^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(4m)v_4^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (۸-۴۶)$$
$$\Rightarrow \quad 5v^2 = 4v_4^2 + v_1^2$$

می‌توان این دو معادله را همزمان حل کرد و دو مجهول v_4 و v_1 را به دست آورد. لازمه‌ی این کار حل معادله‌ی درجه ۲ است. بهتر است به جای آن از قضیه‌ی ۸-۱ استفاده کنیم که می‌گوید در برخورد کشسان یک بعدی سرعت نسبی پس از برخورد با منهای سرعت نسبی پیش از برخورد برابر است. پس، داریم

$$v_1 - v_4 = -\big((-v) - v\big) \ \Rightarrow \ v_1 - v_4 = 2v \quad (۸-۴۷)$$

با جاگذاری $v_1 = 2v + v_4$ در رابطه‌ی (۸-۴۵) خواهیم داشت

$$3v = 4v_4 + (2v + v_4) \ \Rightarrow \ v_4 = \frac{1}{5}v \quad , \quad v_1 = \frac{11}{5}v \quad (۸-۴۸)$$

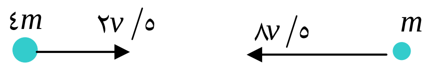
آزمودن این که این نتیجه در پایستگی انرژی و تکانه صدق می‌کند، آسان است.

(ب) چارچوب مرکزجرم: سرعت مرکز جرم عبارت است از

$$v_{CM} = \frac{(4m)v + m(-v)}{5m} = \frac{3}{5}v \quad (۸-۴۹)$$

برای حل مسئله سه گام زیر باید برداشته شود.

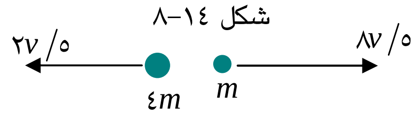
۱- **رفتن به چارچوب مرکزجرم:** سرعت‌های اولیه در چارچوب مرکزجرم عبارتند از $v - v_{CM} = 2v/5$ و $(-v) - v_{CM} = -8v/5$. وضعیت پیش از برخورد در چارچوب مرکزجرم در شکل(۸-۱۴) نشان داده شده است



پیش از برخورد در چارچوب مرکزجرم

شکل ۸-۱۴

۲-**محاسبه‌ی برخورد در چارچوب مرکز جرم**: این گام ساده است. پس از برخورد جهت سرعت ذره‌ها وارون می‌شوند. وضعیت در شکل (۸-۱۵) دیده می‌شود.



پس از برخورد در چارچوب مرکزجرم

شکل ۸-۱۵

۳- **بازگشت به چارچوب آزمایشگاه**: برای این که سرعت‌های آزمایشگاهی را به دست آوریم باید به سرعت ذره‌ها در چارچوب مرکزجرم، سرعت مرکز جرم را اضافه کنیم:

$$v_{٤}=-\frac{٢v}{٥}+v_{CM}=-\frac{٢v}{٥}+\frac{٣v}{٥}=\frac{v}{٥}$$
$$v_{١}=\frac{٨v}{٥}+v_{CM}=\frac{٨v}{٥}+\frac{٣v}{٥}=\frac{١١}{٥}v \qquad (٥-٥٠)$$

ت-٢ (الف) چارچوب آزمایشگاه: اگر v_x ها برابر باشند، آنگاه از پایستگی p_x داریم

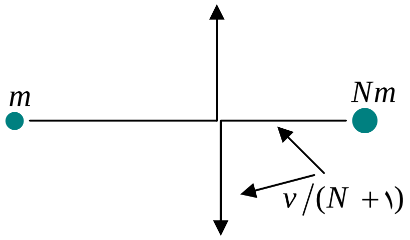
$$mv=mv_x+(Nm)v_x \quad\Rightarrow\quad v_x=\frac{v}{N+١} \qquad (٨-٥١)$$

پایستگی p_y می‌گوید که اگر سرعت Nm برابر با v_y باشد، سرعت m باید Nv_y و در خلاف جهت آن باش چون p_y اولیه صفر است. از پایستگی انرژی به دست می‌آید

$$\frac{١}{٢}mv^{٢}=\frac{١}{٢}m\left(\left(\frac{v}{N+١}\right)^{٢}+\left(Nv_y\right)^{٢}\right)+\frac{١}{٢}(Nm)\left(\left(\frac{v}{N+١}\right)^{٢}+v_y^{٢}\right)$$
$$\Rightarrow v^{٢}=(١+N)\left(\frac{v}{N+١}\right)^{٢}+(N^{٢}+N)v_y^{٢}$$
$$\Rightarrow \frac{N}{N+١}v^{٢}=N(N+١)v_y^{٢} \quad\Rightarrow\quad v_y=\frac{v}{N+١} \qquad (٨-٥٢)$$

پس، می‌بینیم که سرعت جرم Nm عبارت است از $v_x=v_y=v/(N+١)$. چون این دو مولفه‌ی سرعت با هم برابراند، جرم Nm با زاویه‌ی ٤٥° نسبت به محور x حرکت می‌کند و این زاویه مستقل از N است.

(ب) چارچوب مرکز جرم: در چارچوب مرکزجرم v_x های نهایی باید برابر باشند. چون تفاوتشان با v_x ها در چارچوب آزمایشگاه (که باهم برابراند) به اندازه‌ی v_{CM} است. اما در چارچوب مرکزجرم جهت سرعت‌ها پس از برخورد وارون می‌شوند. بنابراین، در چارچوب مرکزجرم $v_x=٠$ است. در نتیجه، پس از برخورد در چارچوب مرکزجرم هر دو جرم در راستای محور y (در جهت مثبت یا منفی) حرکت خواهند کرد. پس، وضعیت همانند شکل (٨-١٦) خواهد شد. سرعت مرکزجرم در چارچوب آزمایشگاه $v_{CM}=v/(N+١)$ است. پس این سرعت، سرعت اولیه‌ی v_x جرم Nm در چارچوب مرکزجرم است (و در نتیجه سرعت نهایی v_y است، چون در چارچوب مرکز جرم سرعت‌ها تغییر نمی‌کنند.) حال اگر با افزودن v_{CM} به این سرعت ها به چارچوب آزمایشگاه برگردیم،



شکل ٨-١٦

می بینیم که سرعت جرم Nm در چارچوب آزمایشگاه عبارت است از $v_x=v_y=v/(N+١)$ و بنابراین، با زاویه‌ی ٤٥° نسبت به محور x حرکت می‌کند و این زاویه مستقل از N است.

ت-٣ درست پیش از آن که توپ بزرگ‌تر با زمین برخورد کند، هر دو توپ به اندازه‌ی h سقوط می‌کنند. با استفاده از $mv^{٢}/٢=mg$ دیده می‌شود که سرعت هر دو توپ $v=\sqrt{٢gh}$ است. این سرعت توپ‌ها درست پیش از برخورد آنها نیز است. توپ بزرگ با زمین برخورد می‌کند و با همان سرعت v به سوی بالا برمی‌گردد. در مسیر رو به بالا با توپ کوچک‌تر

برخورد کشسان می‌کند. توجه خود را به این برخورد متمرکز کنید. از پایستگی تکانه داریم

$$Mv - mv = Mu + mw \quad \Rightarrow \quad u = \left(1 - \frac{m}{M}\right)v - \frac{m}{M}w \tag{۸–۵۳}$$

u و w به ترتیب سرعت رو به بالای توپ‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر پس از برخوردشان است. از سوی دیگر، پایستگی انرژی می‌گوید

$$Mv^2 + mv^2 = Mu^2 + mw^2 \tag{۸–۵۴}$$

با قرار دادن مقدار u از رابطه‌ی (۵۳–۸) در رابطه‌ی (۵۴–۸) به دست می‌آید

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right)v^2 = \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 v^2 - 2\frac{m}{M}vw\left(1 - \frac{m}{M}\right) + \frac{m^2}{M^2}w^2 + \frac{m}{M}w^2 \tag{۸–۵۵}$$

چون $m \ll M$ است از جمله‌های مانند m^2/M^2 می‌توان چشم‌پوشی کرد. به دست می‌آید

$$\frac{m}{M}w^2 - 2\frac{m}{M}v\,w - 3\frac{m}{M}v^2 = 0 \tag{۸–۵۶}$$

که معادله‌ای درجه ۲ نسبت به v است. ریشه‌های آن عبارت‌اند از $-v$ و $3v$. ریشه‌ی اول مربوط به وضعیتی مانند تونل‌زنی کوانتومی است؛ یا این که توپ کوچک از درون توپ بزرگ عبور کرده باشد. بنابراین، این پاسخ برای ما پذیرفتنی نیست. انرژی توپ کوچک پس از برخورد پایسته می‌ماند. بنابراین

$$\frac{1}{2}m\left(3v^2\right) + mgd = mgH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{9v^2}{2g} + d$$

$$\Rightarrow H = \frac{9\left(2gh\right)}{2g} + d = d + 9h \tag{۸–۵۷}$$

ت–۴ **(الف)**: نیروی میانگین وارد به دیوار نسبت تکانه‌ی انتقالی به مدت زمان آن است: $F = \Delta p/\Delta t$. تغییر تکانه‌ی توپ در هر برخورد برابر است با

$$\Delta p = p_f - p_i = mv_0 - \left(-mv_0\right) = 2mv_0 \tag{۸–۵۸}$$

زمان بین دو برخورد پی‌درپی برابر است با $\Delta t = 2\ell/v_0$. بنابراین،

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{2\ell/v_0} = \frac{mv_0^2}{\ell} \tag{۸–۵۹}$$

(ب): از چارچوب لختی که در آن دیوار ساکن است به مسئله نگاه کنید. در این چارچوب توپ با سرعت v'_0 حرکت می‌کند و تکانه‌ی انتقالی به دیوار برابر است با

$$\Delta p' = p'_f - p'_i = mv'_0 - \left(-mv'_0\right) = 2mv'_0 \tag{۸–۶۰}$$

سرعت‌های v'_0 و v_0 با رابطه‌ی $v'_0 = v_0 + V$ به هم مربوط اند. در فاصله‌ی بین دو برخورد پی‌درپی سرعت توپ به اندازه‌ی

$$v\left(t_{n+1}\right) - v\left(t_n\right) = 2V \quad \Rightarrow \quad v\left(t_{n+1}\right) = v\left(t_n\right) + 2V \tag{۸–۶۱}$$

تغییر می‌کند. چون فرض کردیم $V \ll v_0$ است، زمان بین دو برخورد را می‌توان در تقریب ایستایی تخمین زد، اما به جای ℓ اینک باید x جایگزین شود: $\Delta t = 2x\left(t\right)/v\left(t\right)$ و از اینجا آهنگ تغییر سرعت به دست می‌آید

$$\Delta v = v\left(t_{n+1}\right) - v\left(t_n\right) = 2V \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta T} = \frac{2V}{2x/v} = \frac{Vv\left(t_n\right)}{x\left(t_n\right)} \tag{۸–۶۲}$$

حالا می‌توان رابطه‌ی بین x و v را به دست آورد:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=-V\,\frac{dv}{dx}\quad\Rightarrow\quad\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{V}\frac{dv}{dt}=-\frac{v}{x}\qquad(8\text{-}63)$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه خواهیم داشت

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\ell n\,v=-\ell n\,x+c\quad\Rightarrow\quad v\left(x\right)=\frac{C}{x}=\frac{v_0\ell}{x}\qquad(8\text{-}64)$$

تساوی آخر از شرایط اولیه به دست آمد: در $x=\ell$ سرعت $v\left(x=\ell\right)=v_0$ است. پس، نیروی وارد به دیوار در زمان t عبارت است از

$$F=\frac{\Delta p\left(t\right)}{\Delta T\left(t\right)}=\frac{2mv\left(t\right)}{2x\left(t_n\right)/v\left(t_n\right)}=\frac{mv^2}{x}=\frac{mv_0^2\ell^2}{x^3}\qquad(8\text{-}65)$$

(پ): کاری را که دیوار انجام می‌دهد عبارت است از

$$dW=Fd\ell\quad\Rightarrow\quad W=-\int_\ell^x F\left(x'\right)dx'=\int_\ell^x\frac{mv_0^2\ell^2}{x'^3}dx'=\frac{mv_0^2\ell^2}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\ell^2}\right)\qquad(8\text{-}66)$$

از سوی دیگر، تغییر در انرژی جنبشی توپ برابر است با

$$\Delta K=\frac{m}{2}v_0^2\left(t\right)-\frac{m}{2}v_0^2=\frac{m}{2}\left(\frac{v_0\ell}{x}\right)^2-\frac{m}{2}v_0^2=\frac{mv_0^2\ell^2}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\ell^2}\right)\qquad(8\text{-}67)$$

و این دو باهم برابرند.

ت-۵ شرایط مسئله در چارچوب آزمایشگاه داده شده است. در این چارچوب تکانه‌ی کل سامانه $mv_0+M\left(0\right)=mv_0$ است. چارچوب مرکزجرم چارچوبی است که نسبت به چارچوب آزمایشگاه با سرعت $u=mv_0/\left(M+m\right)$ حرکت می‌کند. این را در بخش ۱-۲-۸ نشان دادیم. پس، سرعت ذره‌ها در چارچوب مرکزجرم پیش از برخورد عبارتند از

$$v_1=v_0-u=\frac{M}{m+M}v_0\quad,\quad V_1=V_0-u=-\frac{m}{m+M}v_0\qquad(8\text{-}68)$$

اگر فرض کنیم که سرعت‌ها پیش از برخورد در راستای محور x اند، آنگاه سرعت‌ها پس از برخورد (در چارچوب مرکزجرم) عبارتند از

$$\mathbf{v}_1'=v_1'\left(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta+\hat{\mathbf{j}}\sin\theta\right)\quad,\quad\mathbf{V}_1'=-V_1'\left(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta+\hat{\mathbf{j}}\sin\theta\right)\qquad(8\text{-}69)$$

V_1' و v_1' با در نظر گرفتن پایستگی انرژی و تکانه به دست می‌آیند.

$$\frac{m}{2}v_1^2+\frac{M}{2}V_1^2=\frac{m}{2}v_1'^2+\frac{M}{2}V_1'^2\qquad(8\text{-}70)$$

$$mv_1+MV_1=0=mv_1'+MV_1'\qquad(8\text{-}71)$$

از حل این دو معادله خواهیم داشت

$$v_1'=v_0\frac{M}{m+M}\quad,\quad V_1'=v_0\frac{m}{m+M}\qquad(8\text{-}72)$$

اگر در چارچوب مرکزجرم سرعت را به صورت $\mathbf{v}_1'=\hat{\mathbf{i}}v_x'+\hat{\mathbf{j}}v_y'$ بنویسیم و به چارچوب آزمایشگاه ببریم، مولفه‌های سرعت به صورت زیر در می‌آیند

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y \tag{۸-۷۳}$$

بنابراین، سرعت نهایی ذره‌ی m در چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$v_f = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{\left(v'_x + u\right)^۲ + \left(v'_y\right)^۲} = \sqrt{\left(v'_۱\right)^۲ + ۲v'_۱ u \cos\theta + u^۲}$$
$$= \frac{v_\circ}{m+M}\sqrt{M^۲ + ۲Mm\cos\theta + m^۲} \tag{۸-۷۴}$$

(**ب**): انرژی جنبشی از $K_i = mv_\circ^۲/۲$ به

$$K_f = \frac{mv_f^۲}{۲} = mv_\circ^۲ \frac{\left(M^۲ + ۲Mm\cos\theta + m^۲\right)}{۲\left(m+M\right)^۲} \tag{۸-۷۵}$$

تغییر پیدا می‌کند و در نتیجه کسر انرژی جنبشی گم شده برابر است با

$$\frac{K_i - K_f}{k_i} = ۱ - \frac{M^۲ + ۲Mm\cos\theta + m^۲}{\left(m+M\right)^۲} = \frac{۲mM\left(۱-\cos\theta\right)}{\left(m+M\right)^۲} \tag{۸-۷۶}$$

ت-۶ (**الف**): پس از برخورد سرعت نسبی وجود ندارد (ذره‌ها باهم حرکت می‌کنند). پس، $\varepsilon = ۰$ است.

(**ب**) : چارچوب مرکزجرم سرعت‌ها پس از برخورد وارون می‌شوند (و این با پایستگی انرژی و تکانه سازگار است). پس، سرعت‌های نسبی پیش از برخورد و پس از برخورد برابرند. اما ، سرعت نسبی در هر چارچوبی یکسان است و به چارچوب بستگی ندارد. پس، در هر چارچوبی $\varepsilon = ۱$ است.

(**پ**): برای سقوط توپ، از پایستگی انرژی داریم $mgh = \left(۱/۲\right)mv_b^۲ \Rightarrow v_b = \sqrt{۲gh}$ (v_b سرعت توپ پیش از برخورد با زمین است.) به همین ترتیب، سرعت توپ پس از واجهش از سطح زمین عبارت است از $\left(۱/۲\right)mv_a^۲ = mgH_۱ \Rightarrow v_a = \sqrt{۲gH_۱}$. چون زمین جابه‌جا نمی‌شود (خب نه چندان) خواهیم داشت

$$\varepsilon = v_b/v_a = \sqrt{H_۱/h} \quad \Rightarrow \quad H_۱ = \varepsilon^۲ h \tag{۸-۷۷}$$

(**ت**): از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید: $H_۱ = \left(۰,۸۵\right)^۲\left(۱,۲\,\text{m}\right) = ۰,۸۷\,\text{m}$

(**ج**): از بررسی بالا نتیجه می‌شود که برای هر n دلخواهی داریم $H_{n+۱} = \varepsilon^۲ H_n$. پس، برای $n = ۲$ داریم $H_۲ = \varepsilon^۲ H_۱ \Rightarrow H_۲ = \varepsilon^۲\left(\varepsilon^۲ h\right)$ و در نتیجه $H_۳ = \varepsilon^۶ h$ و.... و بنابراین، $H_n = \varepsilon^{۲n} h$ (که در رابطه‌ی بازگشتی و شرایط اولیه صدق می‌کند). از استقراء ریاضی هم می‌توان این رابطه را اثبات کرد: برای $n = ۱$ رابطه برقرار است. درستی آن را برای n فرض می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای $n+۱$ هم برقرار است:

$$H_{n+۱} = \varepsilon^۲ H_n = \varepsilon^۲\left(\varepsilon^{۲n} h\right) = \varepsilon^{۲(n+۱)} h \tag{۸-۷۸}$$

پس، برای $n+۱$ هم برقرار است. $H_۸ = \varepsilon^{۱۶} h = \left(۰,۸۵\right)^{۱۶}\left(۱,۲\,\text{m}\right) = ۰,۰۸۹\,\text{m}$

فصل ۹

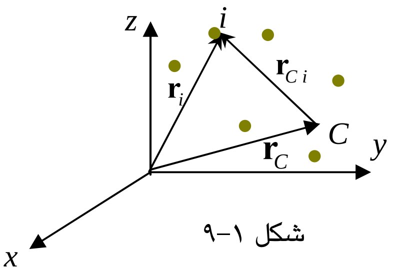
ایستایی‌شناسی جسم سخت

در فصل ۳ ترازمندی ایستایی تک‌ذره را بررسی کردیم. در برخی مثال‌ها هم که سامانه جسم دارای بعد بود، آن را نیز به تک ذره کاهش دادیم. در آنجا اساس کار این بود که راستای اثر نیروهای وارد به جسم باید در یک نقطه‌ی روی جسم یکدیگر را قطع کنند. درست است که برخی مسئله‌ها و مثال‌ها شامل یک جفت جسم بودند که با ریسمان به هم پیوسته بودند و راستای نیروهای وارد به سامانه، همگی در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کردند. اما، هرگاه یکی از اجزاء سامانه را جداگانه در نظر گرفتیم، در حقیقت راستای نیروهای وارد به آن همگی در یک نقطه به هم رسیدند و معادله‌های ترازمندی ایستایی را توانستیم برای هر جسم به طور جداگانه بنویسیم و هر جسم را به صورت یک تک ذره در نظر بگیریم.

در این فصل، ایستایی‌شناسی جسم سخت دارای بعد را بررسی می‌کنیم که راستای اثر نیروهای وارد به آن یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. چنین مجموعه‌ای از نیرو ها، یک ویژگی دیگر هم به وجود می‌آورد. افزون بر انتقال، این نیروها تمایل دارند که جسم را بچرخانند. در نتیجه، اگر بخواهیم شرایط ترازمندی ایستایی جسمی را بررسی کنیم که تحت تأثیر مجموعه‌ی دلخواهی از نیروها قرار دارد، نه تنها باید ترازمندی در برابر جابه‌جایی انتقالی، بلکه ترازمندی چرخشی آن را هم به حساب بیاوریم.

۹-۱ مرکزجرم سامانه‌ی ذرات

مفهوم مرکز جرم در حل مسئله‌های دینامیک و استاتیک بسیار سودمند است. از این رو، نخست به تعریف مرکز جرم سامانه‌ی با Nذره می‌پردازیم و سپس مختصات آن را نسبت به هر چارچوب کارتزیOXYZ به دست می‌آوریم. سامانه‌ای N ذره در (۹ -۱) نشان داده شده است. بردار شعاعی این ذره ها را $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N$ بنامید. فرض کنید جرم ذره‌ها $m_1, m_2, \cdots m_N$ اند. بردار $\mathbf{r}_i$ ، بردار شعاعی ذره‌ی i–ام است. نقطه‌ای مانند C را انتخاب کنید و بردار شعاعی $\mathbf{r}_C$ را از O به C بکشید و سپس از C بردار شعاعی $\mathbf{r}_{Ci}$را به ذره‌ی i–ام بکشید. سه بردار $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}_C$ و $\mathbf{r}_{Ci}$ مثلث بسته‌ای می‌سازند که معادله‌ی آن عبارت است از:



شکل ۱-۹

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{Ci} \qquad (۹\text{-}۱)$$

اگر رابطه‌ی (۹-۱) را در m_i ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$m_i\mathbf{r}_i = m_i\mathbf{r}_C + m_i\,\mathbf{r}_{Ci} \qquad (۹\text{-}۲)$$

برای هر یک از N ذره‌ی می‌توان یک چنین معادله‌ای نوشت. اگر همه‌ی این معادله ها را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots m_N\mathbf{r}_N = \left(m_1 + m_2 + \ldots m_N\right)\mathbf{r}_C + m_1\mathbf{r}_{C1} + m_2\mathbf{r}_{C2} + \ldots + m_N\mathbf{r}_{CN} \qquad (۹\text{-}۳)$$

می‌توان این معادله را با نمادگذاری ساده‌تری به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_{Ci} \qquad (۹\text{-}۴)$$

توجه بکنید که روی بردار $\mathbf{r}_C$ جمع بسته نشده است، چون $\mathbf{r}_C$ برای همه‌ی ذره‌ها یکسان است. یکبار که نقطه‌ی C را برگزیده

باشیم، آنگاه بردار $\mathbf{r}_C$ همواره ثابت می‌ماند. به بیان دیگر، $\mathbf{r}_C$ هیچ زیرنویسی برای جمع بستن روی آن ندارد. این گونه جمع بستن روی بردارها، جمع برداری اند. اگر در رابطه‌ی (۴-۹) جمع دوم سمت راست صفر باشد، یعنی اگرداشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_{C\,i} = 0 \qquad (۵-۹)$$

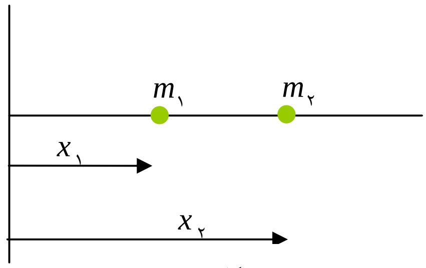
گوییم نقطه‌ی C مرکز جرم سامانه است. چنانچه این شرط برقرار باشد، معمولاً $\mathbf{r}_C$ را با $\mathbf{R}$ نشان می‌دهند. پس، اگر رابطه‌ی (۵-۹) برقرار باشد، از رابطه‌ی (۴-۹) داریم:

$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \qquad (۶-۹)$$

که در آن M جرم کل همه‌ی ذره‌هاست $\left(M = \sum_{i=1}^{N} m_i\right)$. کمیت $\mathbf{R}$ بردار شعاعی از هر مبداء O به مرکز جرم سامانه است. مؤلفه‌های کارتزی بردار مرکزجرم $\mathbf{R}$ عبارتند از:

$$X_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \quad , \quad Y_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \quad , \quad Z_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \qquad (۷-۹)$$

ساده‌ترین مثال، یافتن مرکز جرم دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 است. اگر خطی که دو ذره را به هم وصل می‌کند روی محور x باشد، چون مختصات y و z هر دو صفرند، روشن است که مرکز جرم روی محور x قرار خواهد داشت. .شکل (۲-۹) این وضعیت را نشان می‌دهد. مؤلفه‌ی x مرکزجرم عبارت است از



شکل ۲-۹

$$\mathbf{R}_X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (۸-۹)$$

برای حالت خاصی که جرم دو ذره با هم برابر باشد، مرکزجرم در نیم راه خطی قرار می‌گیرد که دو جسم را به هم وصل می‌کند. مختصات مرکز جرم یک سامانه‌ی مرکب را می‌توان با تقسیم‌کردن آن به اجزاء کوچک‌تر هم حساب کرد. کافی است که نخست مرکزجرم هر جزء را حساب کنیم و سپس مرکز این مرکز جرم‌ها را پیدا کنیم. برای مثال؛ پتک شکل (۳-۹) را در نظر بگیرید که از یک سر مکعبی به ضلع $2a$ و دسته‌ای به طول b تشکیل شده است. می‌خواهیم مرکزجرم آن را بیابیم. برای این کار بهتر است سامانه را ترکیبی از دو جسم، سر و دسته، در نظر بگیریم. نشان دادن این که، این کار پذیرفتنی است دشوار نیست. فرض کنید سامانه‌ی N ذره‌ای بالا را به دو بخش تقسیم کنیم یک بخش با k ذره و بخش دیگر با $N-k$ ذره. جرم های دو بخش عبارتند از:



شکل ۳-۹

$$M_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i \qquad , \qquad M_2 = \sum_{i=k+1}^{N} m_i \qquad (۹-۹)$$

و داریم $M = M_1 + M_2$. بردار شعاعی مرکزجرم هر کدام عبارت است از

$$M_1 R_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i \mathbf{r}_i \qquad , \qquad M_2 R_2 = \sum_{i=k+1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \tag{۹-۱۰}$$

روشن است که

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \tag{۹-۱۱}$$

و معادله‌ی (۹-۶) به صورت زیر درمی‌آید

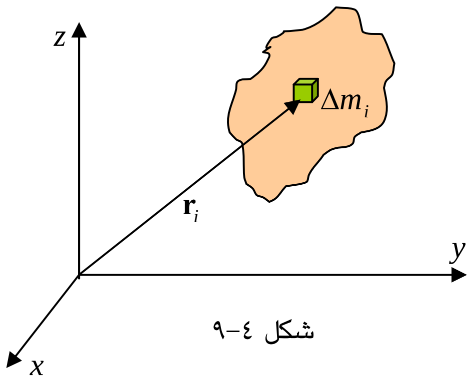
$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{k} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2 \tag{۹-۱۲}$$

مؤلفه‌ی x معادله‌ی (۹-۱۲) عبارت است از:

$$MR_x = M_1 R_{x1} + M_2 R_{x2} \tag{۹-۱۳}$$

و این درست همانند حالت دو ذره [رابطه (۹-۷)] است.

۹ـ۲ مرکزجرم جسم سخت



شکل ۹-٤

اگرچه مکان مرکزجرم جسم سخت اندکی پیچیده‌تر است، اما هنوز هم گفتار بخش ۹-۱ چاره ساز است. جسم سخت دارای بعد را می‌توان سامانه‌ای با تعداد بسیار زیاد ذرات پنداشت که جدایی میان ذره‌ها بسیار کوچک است. در این صورت جسم را می‌توان مانند شکل (۹-٤) به صورت توزیع پیوسته‌ی جرم فرض کرد. اگر جسم را به اجزاء جرم Δm_i با مختصات x_i, y_i, z_i تقسیم کنیم، آنگاه می‌بینیم که، برای مثال، مولفه‌ی x مرکزجرم به تقریب $R_x = (1/M)\sum_i^N x_i \Delta m_i$ است. رابطه‌های مشابهی هم برای R_y و R_z می‌توان نوشت. اگر اجازه دهیم که تعداد عناصر جرم، N ، به بینهایت میل کند آنگاه R_x دقیق‌تر هم می‌شود. در این حد، علامت جمع به انتگرال و Δm_i به عنصر دیفرانسیل dm تبدیل می‌شوند و خواهیم داشت

$$R_x = \ell im_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{\int x dm}{\int dm} \tag{۹-۱٤}$$

همین طور برای مؤلفه‌های R_y و R_z داریم

$$R_y = \frac{1}{M}\int y dm \qquad , \qquad R_z = \frac{1}{M}\int z dm \tag{۹-۱۵}$$

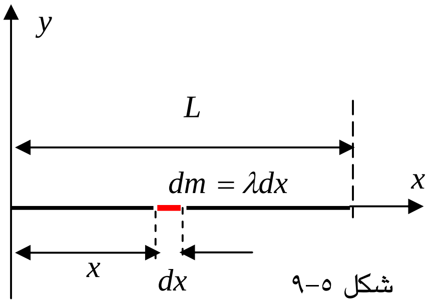
یا اگر به صورت برداری نشان دهیم ، بردار مکان مرکزجرم، $\mathbf{R}$ ، عبارت است از

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \tag{۹-۱٦}$$

یک نتیجه‌گیری آنی گفتار بالا این است که مرکزجرم اجسام همگن و متقارن باید روی محـور تقارن آنها باشد. برای نمونه، مرکز جرم میله‌ی همگن باید روی میله و در نیمراه بین دو انتها (وسط) باشد. مرکز جرم کره‌ی یا مکعب همگن باید در مرکز

هندسی آنها باشد. در مثال‌های زیر برخی از حالت ها را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱-۹ **(الف)**: نشان دهید که مرکز جرم میله‌ای همگن به جرم M و به طول L در وسط میله است.



شکل ۵-۹

(ب): فرض کنید میله ناهمگن است و مانند شکل (۵-۹) جرم واحد طول با فاصله از یک انتهای میله تغییر کند، $\lambda = \alpha x$، که در آن α مقدار ثابتی است. مؤلفه‌ی x مرکزجرم را برحسب طول L بیابید.

حل: **(الف)** بنا به تقارن $R_y = R_z = 0$ است (اگر میله در راستای محور x ها باشد). اگر جرم در واحد طول را λ بنامیم (چگالی خطی جرم) برای میله‌ی همگن داریم $\lambda = M/L$. میله را به جزء‌های با طول dx تقسیم کنید، جرم هر جزء $dm = \lambda dx$ است. چون یکی از این جزء‌های دلخواه در فاصله‌ی x از مبداء قرار دارد (شکل۵- ۹) از رابطه‌ی (۱۴-۹) داریم

$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} \qquad (9\text{-}17)$$

چون $\lambda = M/L$ است، بنابراین:

$$R_x = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2} \qquad (9\text{-}18)$$

(ب): در این حالت هم $dm = \lambda\, dx$ است، اما مانند قسمت (الف) λ دیگر مقدار ثابت نیست. پس

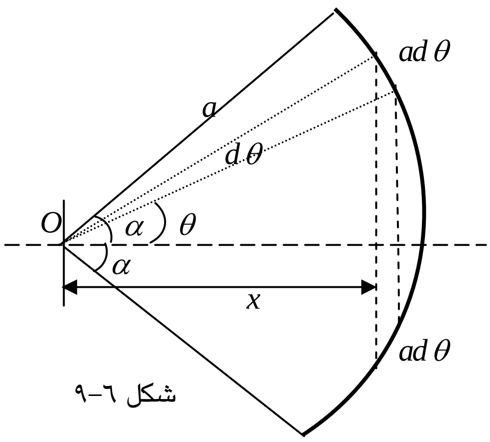
$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M} \qquad (9\text{-}19)$$

می‌توان α را حذف کرد. کافی است توجه داشته باشیم که جرم کل M را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2M}{L^2} \qquad (9\text{-}20)$$

و در نتیجه: $R_x = \alpha L^3 \big/ (3\frac{\alpha L^2}{2}) = 2L/3$

مثال۲-۹: سیم یکنواختی را برابر شکل (۶-۹) به صورت خمی از یک دایره به شعاع a و با زاویه‌ی مرکزی 2α درآورده‌ایم. مرکزجرم این سیم خمیده را بیابید.



شکل ۶-۹

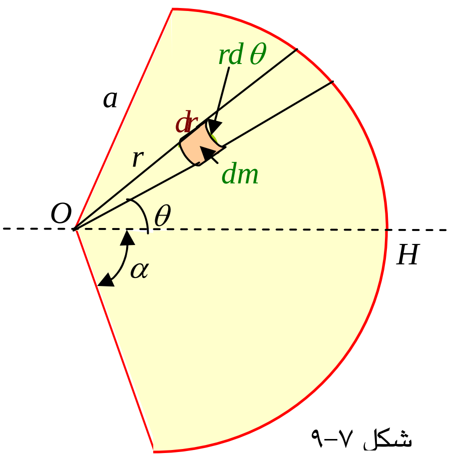
حل: فرض کنید جرم واحد طول سیم λاست. روشن است که به خاطر تقارن، مرکزجرم سیم روی محور تقارن OAخواهد بود، ما این محور را محور x ها انتخاب می‌کنیم (شکل۶-۹). عنصرهای متقارن $a\,d\theta$ را همانند شکل در نظر بگیرید. مرکز جرم این دو عنصر متقارن در نیم‌راه بین آنها روی خط OA قرار دارد که در فاصله‌ی x از مرکز O است و جرم موثر

آن $2a\lambda d\theta$ است. برای هر جفت جزء جرم متقارن دیگرهم این چین است. بنابراین، مرکز جرم R_x تمامی سیم روی محور x خواهد بود. چون $x=a\cos\theta$ پس داریم

$$R_x=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_0^{\alpha}2\lambda a^2\cos\theta d\theta}{\int_0^{\alpha}2\lambda a d\theta}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha} \qquad (۹-۲۱)$$

مثال۳-۹ مرکز جرم قطاعی از یک رویه‌ی دایره‌ای به شعاع a و زاویه‌ی مرکزی 2α را به دست آورید. نخست به طور مستقیم و با گزینش جرء جرم دلخواه محاسبه را انجام دهید و سپس با استفاده از نتیجه‌ی مثال (۲ـ ۹) آن را حساب کنید.

حل: (الف) **روش ۱= محاسبه ی مستقیم:**



شکل ۷-۹

جزء جرم dm را همانند شکل (۷-۹) در فاصله‌ی r از نقطه‌ی O در نظر بگیرید. مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده $r\,dr\,d\theta$ است. پس، جرم آن $dm=\sigma\, rdrd\theta$ است که در آن σ چگالی سطی جرم؛ یعنی جرم در واحد سطح است. روشن است که چون پوسته همگن است؛ مرکز جرم روی خط OH یا محور تقارن قرار دارد. این محور تقارن را محور x بنامید. پس داریم:

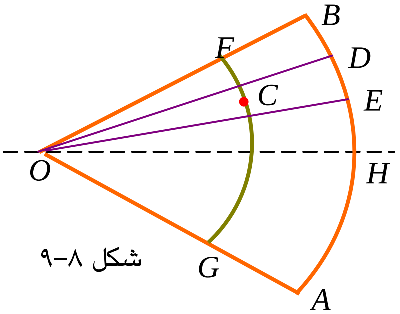
$$R_x=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int x\,\sigma rdrd\theta}{\int \sigma rdrd\theta}\Rightarrow R_x=\frac{\int (r\cos\theta)\sigma rdrd\theta}{\int \sigma rdrd\theta} \qquad (۹-۲۲)$$

توجه کنید که به جای x قرار دادیم $x=r\cos\theta$. انتگرال بالا یک انتگرال دوگانه است. در این انتگرال متغیر r از صفر تا a و متغیر θ از $-\alpha$ تا α تغییر می‌کنند.

$$R_x=\frac{\sigma\int r^2\cos\theta drd\theta}{\sigma\int rdrd\theta}=\frac{\sigma\int_0^a r^2dr\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta}{\sigma\int_0^a rdr\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta}=\frac{\frac{1}{3}\sigma a^3(\sin\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\frac{1}{2}\sigma a^2(\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow\ R_x=\frac{\frac{1}{3}a^3\sigma(2\sin\alpha)}{\frac{1}{2}a^2(2\alpha)}=\frac{2a}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (۹-۲۳)$$

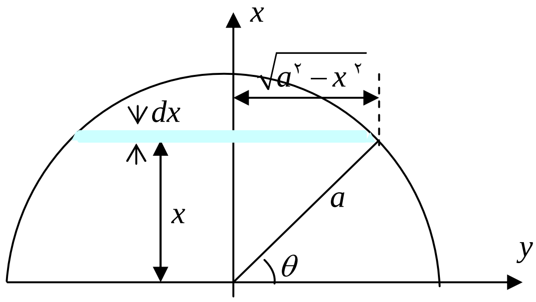
روش ۲- استفاده از مثال ۲-۹ : در شکل (۸-۹) صفحه‌ی OAB با زاویه‌ی مرکزی 2α و شعاع a نشان داده شده است. می‌توان مثلث کوچک ODE را عنصر انتگرال‌گیری انتخاب کرد. در هر مثلث، مرکز جرم محل برخورد میانه‌هاست. اگر نقطه‌ی C محل برخورد میانه‌های این مثلث کوچک باشد، این نقطه در فاصله‌ی ۲/۳ از رأس قرار دارد. می‌توانیم رویه را به مثلث‌های کوچک هم‌اندازه تقسیم کنیم. مرکز جرم همه‌ی این مثلث‌ها روی خم FG قرار خواهند گرفت که شعاع آن $2a/3$ است. اگر مثلث‌ها را درواقع بسیار کوچک



شکل ۸-۹

فرض کنیم، در عمل، خم FG را می‌توان به صورت سیمی در نظر گرفت که بخشی از پیرامون دایره‌ای به شعاع $2a/3$ است. در نتیجه؛ از رابطه‌ی (۲۱-۹)، مثال ۲-۹ می‌توان استفاده کرد. پس، مرکزجرم FG و در نتیجه، مرکزجرم قطاع OAB، روی خط OH به فاصله‌ی $R_x = (2a/3)(\sin\alpha/3\alpha) = 2a\sin\alpha/3\alpha$ از O قرار خواهد گرفت

مثال ۴ ـ ۹: مرکزجرم نیمکره‌ی توپر به شعاع a با توزیع جرم یکنواخت رابیابید.



شکل ۹-۹

حل: چون نیمکره تقارن هندسی دارد، می‌دانیم کـه مرکز جرم روی محور تقارن آن خواهد بود. اگر این محور را محور x ها در بنامیم، آنگاه کافی ست R_x را حساب کنیم. جزء جرم را بُرشی به ضخامت dx و در فاصله‌ی xاز مرکز نیمکره انتخاب می‌کنید. شعاع این برش $(a^2-x^2)^{1/2}$ است و در شکل (۹-۹) نشان داده شده است. جرم این برش $dm = \rho\pi(a^2-x^2)dx$ است که در آن ρ چگالی حجمی جرم است. بنابراین، داریم

$$R_x = \frac{\int_0^a \rho\pi x\,(a^2-x^2)dx}{\int_0^a \rho\pi(a^2-x^2)dx} = \frac{3}{8}a \qquad (9\text{-}24)$$

مثال ۵-۹ : مرکزجرم یک رویه‌ی نیمکره به شعاع a را به دست آورید. توزیع جرم روی سطح رویه است.

حل: دستگاه مختصات را همانند مثال٤-۹ در نظر بگیرید. در اینجا نیز به خاطر تقارن، مرکزجرم روی محور x ها خواهد بود. جزء جرم را روبانی به پهنای $a\,d\theta$ برگزینید (توجه کنید که تفاوت این مثال با مثال پیشین در این است که این بار جرم روی سطح توزیع شده است و جزء جرم dm در روی سطح کره است.) بنابراین: $dm = \sigma dA = 2\pi(a^2-x^2)^{1/2} a\,d\theta$. که در آن dA جزء سطح و σ چگالی سطحی جرم است. همان‌گونه که از شکل (۹-۹) می‌توان دید داریم:

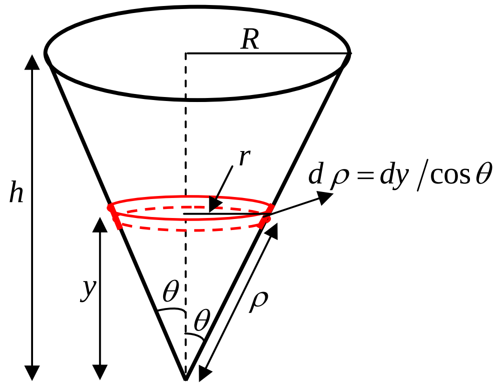
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \;\Rightarrow\; d\theta = \left(a^2-x^2\right)^{-1/2} dx \quad\Rightarrow\quad dm = 2\pi a\sigma dx$$

$$\Rightarrow\Rightarrow\quad R_x = \frac{\int_0^a \sigma 2\pi a\, x\, dx}{\int_0^a \sigma 2\pi\, a\, dx} = \frac{1}{2}a \qquad (9\text{-}25)$$

مثال ۶-۹ **(الف)**: مرکز جرم سطح مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h را به دست آورید.

(ب): اگر مخروط توپر باشد، مرکزجرمش را حساب کنید.

حل: **(الف)**: قیف را مانند شکل (۱۰-۹) به باریکه‌های افقی بُرش دهید. داریم:



شکل ۱۰-۹

$$\cos\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{y}{\cos\theta} \Rightarrow d\rho = \frac{dy}{\cos\theta} \qquad (۹-۲۶)$$

مساحت باریکه‌ی روبان‌مانند عبارت است از

$$dA = (۲\pi r)(d\rho) = (۲\pi r)\frac{dy}{\cos\theta}$$
$$= ۲\pi(y\tan\theta)\left(\frac{dy}{\cos\theta}\right) = ۲\pi y dy \frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta} \qquad (۹-۲۷)$$

طول یال مخروط $h/\cos\theta$ و مساحت آن $A = \frac{۱}{۲}\left(۲\pi R \frac{h}{\cos\theta}\right)$ است. پس،

جرم کل مخروط عبارت است از $M = \sigma A = \sigma\frac{۱}{۲}\left(۲\pi R\frac{h}{\cos\theta}\right)$. پس، می‌توان نوشت

$$y_{CM} = \frac{۱}{M}\int y dm = \frac{۱}{\sigma\pi R\, h/\cos\theta}\int y(\sigma dA) = \frac{۱}{\cancel{\sigma}\cancel{\pi} R\, h/\cos\theta}\int y\,\cancel{\sigma}\,۲\cancel{\pi} y dy \frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta}$$
$$= \frac{۲\tan\theta}{Rh}\int_۰^h y^۲ dy = \frac{۲\tan\theta}{Rh}\left(\frac{h^۳}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{h^۲}{R}\right)\tan\theta \qquad (۹-۲۸)$$

چون $h\tan\theta = R$ است، پس

$$y_{CM} = \frac{۲}{۳}h \qquad , \qquad x_{CM} = ۰ \qquad (۹-۲۹)$$

ب): این بار مخروط را به قرص‌های افقی به شعاع r بُرش دهید. توجه کنید که جرم در حجم مخروط توزیع شده است و $\sigma \sim \mathrm{kg/m^۳}$ است. با توجه به شکل (۱۰-۹) روشن است که حجم هر قرص $dV = \pi r^۲ dy$ و جرم آن $dm = \sigma\pi(y\tan\theta)^۲ dy$ است. جرم کل مخروط برابر است با $M = \sigma V = \sigma(\pi R^۲ h/۳)$. بنابراین، داریم

$$y_{CM} = \frac{۱}{M}\int y dm = \frac{۱}{(۱/۳)\sigma\pi R^۲ h}\int y\,\sigma\pi y^۲\tan^۲\theta dy = \frac{۳\tan^۲\theta}{R^۲ h}\int_۰^h y^۳ dy$$
$$= \frac{۳\tan^۲\theta}{R^۲ h}\left(\frac{h^۴}{۴}\right) = \frac{۳}{۴}\frac{h^۳}{R^۲}\tan^۲\theta \qquad (۹-۳۰)$$

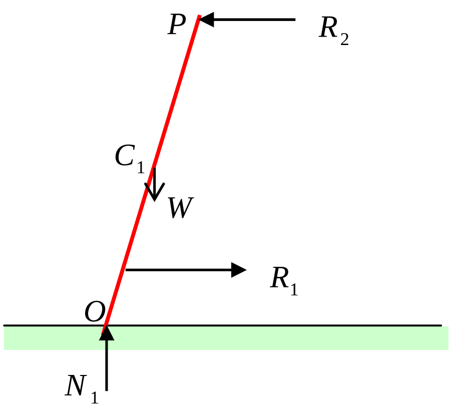
اگر قرار دهیم $h\tan\theta = R$ خواهیم داشت

$$y_{CM} = \frac{۳}{۴}\frac{\left(h\,\cancel{(h\tan\theta)^۲}\right)}{\cancel{R^۲}} = \frac{۳}{۴}h \qquad (۹-۳۱)$$

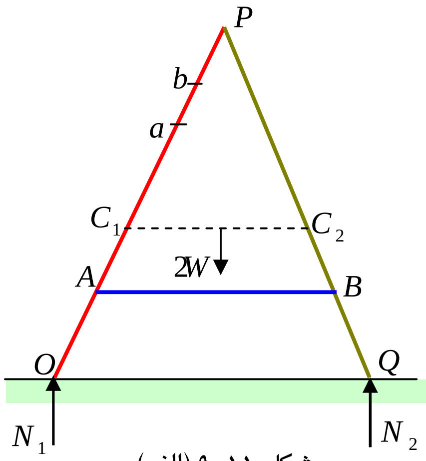
۳-۹ ترازمندی جسم سخت؛ نیروهای خارجی و درونی

پیش از آنکه به شرایط لازم برای ترازمندی جسم دارای بعد بپردازیم، لازم است کران‌های هندسی جسم را در نظر بگیریم. برای مثال، ترازمندی دو نردبان همگن و یکسان OP و OQ شکل (۱۱-۹ الف) را در نظر بگیرید که در نقطه‌ی بدون اصطکاک

P به هم چسبیده‌اند و میله‌ی بدون جرم AB، دو نردبان را به هم وصل کرده است. مجموعه روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد. فرض کنید که وزن هر نردبان W است.



شکل ۱۱-۹ (ب)



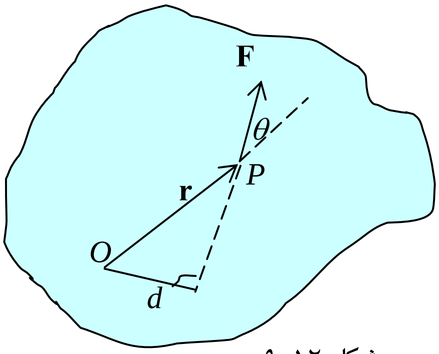
شکل ۱۱-۹ (الف)

نخست به بررسی سامانه‌ی دو نردبان و میله می‌پردازیم: نیروهای وارد بر این سامانه از سوی عامل‌های بیرونی عبارتند از وزن کل $۲W$ که به مرکزجرم هر یک از نردبان‌ها در C_1 و C_2وارد می‌شوند. همچنین نیروهای $N_۱$ و $N_۲$ (در اینجا به خاطر تقارن $N_۱ = N_۲$) که از طرف سطح به نردبان‌ها وارد می‌شوند نیروهای $۲W$ ، $N_۱$ و $N_۲$ *نیروهای خارجی* اند. افزون بر این نیروهای خارجی، *نیروهای درونی* نیز وجود دارند. نیروهای درونی آنهایی اند که مثلاً قسمت‌های مجاور به یکدیگر وارد می‌کنند؛ مانند نیرویی که aبه b یا برعکس وارد می‌کند؛ یا نیرویی که دو نردبان در نقطه‌ی تماس P به یکدیگر وارد می‌کنند. اگر سامانه‌ای از n ذره تشکیل شده باشد، نیروهای گرانش، الکتروستاتیک و یا نوع دیگر نیرو که بین جفت ذره ها وجود دارد، همگی نیروهای درون سامانه اند و نیروی درونی نامیده می‌شوند. در شکل (۱۱-۹ ب) یکی از نردبان‌ها نشان داده شده است. نیروهای خارجی در این سامانه عبارتند از: $N_۱$ (از طرف سطح)، W که نیروی گرانش است و به مرکز جرم آن در نقطه‌ی C_1 وارد می‌شود و نیروهای افقی $R_۱$ و $R_۲$ که به ترتیب نیروهای واکنش میله و نردبان PQ اند. توجه کنید که پیش‌تر برای سامانه‌ی دو نردبان ومیله $R_۱$ و $R_۲$ را به حساب نیاوردیم. زیرا برای آن سامانه $R_۱$ و $R_۲$ نیروهای درونی بودند. بزرگی یا گستردگی سامانه کاملاً دلخواه است و بنا به شرایط مسئله انتخاب می‌شوند؛ از این رو کدام نیرو درونی و کدام بیرونی است بستگی به این دارد که چه چیزی را "سامانه‌ی مورد بررسی" برگزینیم. آشکار است که اگر سامانه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد ***همه‌ی*** نیروها ***درونی*** خواهند شد.

۹-۴ گشتاور نیرو و شرایط عمومی ترازمندی جسم سخت .

در فصل ٤-۷ درباره‌ی گشتاور نیرو سخن گفتیم. گشتاور نیرو در ترازمندی جسم سخت نقش مهمی بازی می‌کند. برای فهمیدن آن فرض کنید به جسمی که در شکل (۱۲-۹) از نقطه‌ی O آویخته شده است، نیروی $\mathbf{F}$ اثر کند. اثر این نیرو روی جسم به مکان نقطه‌ی اثر آن، P، بستگی دارد. اگر $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه‌ی P نسبت به O باشد، می‌دانیم که گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ نسبت به نقطه‌ی O عبارت ست از

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۹-۳۲)$$



شکل ۱۲-۹

که همان رابطه‌ی (۲۳-۷) است. بردار $\mathbf{G}$ بر صفحه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ عمود است و جهت آن را سوی چرخشی که نیرو به آن می‌دهد، تعیین می‌کند. تمایل و توانایی $\mathbf{F}$ برای چرخاندن جسم حول محوری که از نقطه‌ی O می‌گذرد به بازوی گشتاور، d (فاصله‌ی عمودی از نقطه‌ی O تا راستای اثر نیرو) و به اندازه‌ی $\mathbf{F}$ بستگی دارد. اگر چندین نیرو، $\mathbf{F}_۱,\mathbf{F}_۲\cdots\mathbf{F}_n$ همگی در نقطه‌ی P به جسم اثر کنند، جمع برداری گشتاور این نیروها، نسبت به O برابر است با گشتاور بردار برآیند آنها. فرض کنید برآیند این نیروها $\mathbf{F}$ باشد آنگاه داریم

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{r}\times(\mathbf{F}_۱+\mathbf{F}_۲+\cdots+\mathbf{F}_n) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_۱+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_۲+\cdots+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_n = \mathbf{G}_۱+\mathbf{G}_۲+\cdots+\mathbf{G}_n \qquad (۹-۳۳)$$

اگر چند نیرو به سامانه‌ای از ذرات اثر کنند، مرکزجرم سامانه شتاب خطی پیدا خواهد کرد، انگار که همه‌ی نیروها به مرکزجرم اعمال شده است. بنابراین، برای اینکه سامانه ترازمندی انتقالی داشته باشد (شتابیده نشود) جمع برداری همه‌ی نیروها باید صفر باشد. در فصل ۱۰ هم‌چنین نشان خواهیم داد که اگر گشتاور نیروها حول محور دلخواهی که شتاب ندارد، غیر صفر باشد، سامانه‌ی ذرات شتاب زاویه‌ای پیدا خواهد کرد. بنابراین، برای این که سامانه شتاب زاویه‌ای نداشته باشد، جمع برداری گشتاورها نیروها نسبت به نقطه‌ای که محور چرخش از آن می‌گذرد باید صفر باشد. سامانه‌ی ذرات در اینجا جسم سخت تشکیل می‌دهند. بنابراین، اگر نیروهای $\mathbf{F}_۱,\mathbf{F}_۲\cdots\mathbf{F}_n$ به جسم سخت اثر کنند و اگر جمع برداری آنها صفر باشد

$$\mathbf{F}_۱+\mathbf{F}_۲+\mathbf{F}_۲+\cdots = ۰ \qquad (۹-۳٤)$$

آنگاه مرکزجرم؛ اگر از ابتدا ساکن بوده باشد، در حالت سکون باقی خواهد ماند و اگر در ابتدا حرکت یکنواخت داشت، به حرکت یکنواخت خود ادامه خواهد داد. این **شرط ترازمندی انتقالی** جسم است. هم‌چنین اگر جمع برداری گشتاور نیروهای وارد به جسم نسبت به یک محور صفر باشد

$$\mathbf{r}_۱\times\mathbf{F}_۱+\mathbf{r}_۲\times\mathbf{F}_۲+\cdots+\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n = ۰ \qquad (۹-۳۵)$$

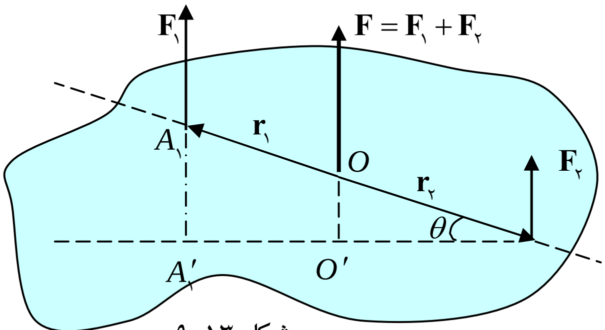
این بدان معنی است که تکانه‌ی زاویه‌ای جسم (یا حالت حرکت چرخشی جسم) تغییر نمی‌کند (به رابطه‌ی (۳۳-۷) نگاه کنید) و این شرط **ترازمندی چرخشی** جسم است؛ یعنی اگر جسم در ابتدا ساکن (بدون چرخش) باشد، چرخش آغاز نخواهد کرد. رابطه‌های (۳٤-۹) و (۳۵-۹) با هم شرطهای لازم برای ترازمندی ایستایی کامل جسم سخت‌اند.

توجه کنید که در این بحث فرقی بین نیروهای خارجی و درونی نگذاشتیم؛ زیرا بنا به قانون سوم نیوتون نیروهای درونی به صورت جفت اند و جهت آنها مخالف هم است. پس، اثر هر عضو جفت‌نیرو در ایجاد شتاب انتقالی با اثر عضو دیگر خنثی می‌شود. اگر این نیروها مرکزی باشند، برآیند گشتاور نیروهای داخلی حول هر نقطه‌ای نیز صفر است. اگر یک جزء جسم به جزء همسایه چنان چسبیده باشد که فاصله‌ی آنها تغییر نکند این نیروها باید مرکزی باشند و این درواقع تعریف جسم سخت است. پس، در رابطه‌های (۳٤-۹) و (۳۵-۹) می‌توانیم به جای واژه‌ی نیرو از نیروهای خارجی نام ببریم.

پیامد سودمند و جالب دو شرط ترازمندی بالا برای جسم سخت این است که *اگر جسم سخت تحت تأثیر سه نیروی در حالت ترازمند باقی باشند، آن سه نیرو همگی در یک صفحه خواهند بود و هر سه در یک نقطه تلاقی خواهند کرد.* اگر چه اثبات این

گزاره دشوار نیست، ما در اینجا از آن خواهیم گذشت.

اگر چند نیروی موازی به یک جسم اثر کنند، می‌توان آنها را ترکیب و با یک نیرو جایگزین کرد. در شکل (۱۳-۹) دو نیروی موازی $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ در نقاط $A_۱$ و $A_۲$ به جسم اثر می‌کنند. اثر این نیروها را می‌توان با تک نیروی $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲$ جایگزین کرد که در نقطه‌ی O به جسم اثر می‌کند. تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ روی جسم باید همان باشد که دو نیروی $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ با هم به وجود می‌آورند.



شکل ۱۳-۹

اگر این حرف درست باشد، افزون بر اینکه $\mathbf{F}$ باید با $\mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲$ برابر باشد، گشتاور آن نیز نسبت به هر نقطه‌ای باید با جمع برداری گشتاورهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ حول همان نقطه برابر باشد. این گزاره درست است، چون اگر $\mathbf{F}$ جایگزین $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ شود، آنگاه $\mathbf{F}$ باید همان تمایل و توانایی برای ایجاد چرخش (و نیز انتقال) را داشته باشد که نیروهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ دارند. به ویژه، چون $\mathbf{F}$ از نقطه O می‌گذرد، بنابراین گشتاور آن نسبت به O صفر است. پس، جمع برداری گشتاورهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ نیز باید نسبت به نقطه‌ی O صفر باشد. این لازم می‌دارد که اندازه‌ی گشتاورهای این دو نیرو با هم برابر باشند؛ زیرا آنها در جهت‌های خلاف هم حول محور گذرنده از O چرخش ایجاد می‌کنند. بنابراین، داریم

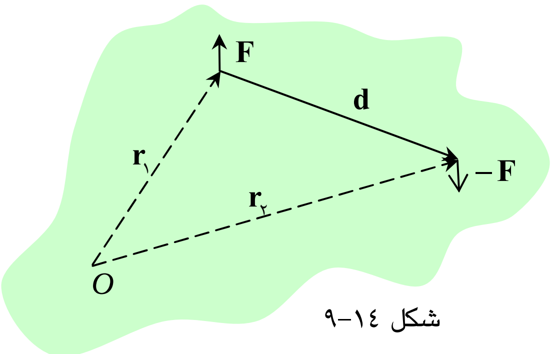
$$F_۱\left(O'A'_۱\right) = F_۲(O'A_۲) \qquad (۹-۳۶)$$

یا

$$F_۱ r_۱ \cos\theta = F_۲ r_۲ \cos\theta \qquad (۹-۳۷)$$

در نمادگذاری برداری این نتیجه عبارت است از:

$$\mathbf{r}_۱ \times \mathbf{F}_۱ + \mathbf{r}_۲ \times \mathbf{F}_۲ = ۰ \qquad (۹-۳۸)$$



شکل ۱٤-۹

به همین روش نیروهای پادموازی را، به شرطی که اندازه‌ی آنها یکسان نباشد، می‌توان با یک نیرو جایگزین کرد. اما نمی‌توان دو نیروی پادموازی یک اندازه را که خط اثر آنها بر هم منطبق نیست با یک نیرو جایگزین کرد. یک چنین جفت نیرو را، **جفت‌شده** می‌گویند و نمی‌توان آن را به تک نیرو کاهش داد. نیروهای جفت‌شده، چرخش ایجاد می‌کنند اما باعث انتقال جسمی که به آن اثر می‌کنند، نمی‌شوند. یافتن گشتاور

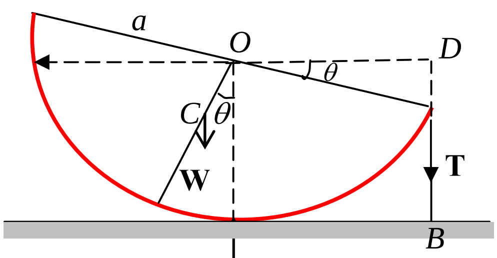
نیروهای جفت‌شده آموزنده است. فرض کنید درشکل (۱٤-۹) $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ نیروهای موازی باشند. $\mathbf{d}$ بردار شعاعی از نقطه‌ی اثر $\mathbf{F}$ به نقطه‌ی اثر $-\mathbf{F}$ است. نقطه‌ی دلخواه O را انتخاب کنید و بردارهای $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ را از این نقطه به نقطه‌ی اثر $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ بکشید. گشتاور هر یک از نیروها را نسبت به نقطه‌ی O حساب کنید و با هم جمع برداری کنید. گشتاور برآیند عبارت است از

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}_۱ \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_۲ \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲) \times \mathbf{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{d} \qquad (۹-۳۹)$$

زیرا $\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲ = -\mathbf{d}$. می‌بینیم که وابستگی به $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ ناپدید می‌شود و در می‌یابیم که $\mathbf{G}$ مستقل از مکان نقطه‌ای است که گشتاورها نسبت به آن نقطه حساب شده‌اند. همچنین توجه به این نکته مهم است که لازم نیست O در صفحه‌ی نیروها باشد.

بنابراین، اثر نیروی جفت‌شده روی جسم سخت مثالی از بردار **آزاد** یا **ناجایگزیده** است؛ چون گشتاور آن نسبت به هر نقطه‌ی جسم سخت یکسان است. در حالی که، تک نیروی وارد به جسم، یک بردار **جایگزیده** است چون اثرش روی جسم، از جمله چرخش، به محل اثر (یا جایگزیدگی راستای اثر) بستگی دارد.

مثال ۷- ۹: نیم‌کره‌ی همگن توپری به وزن W روی سطح کاملاً هموار افقی قرار دارد. شعاع نیمکره a است. یک لبه‌ی آن (نقطه‌ی D) با ریسمان ناکشسان بدون وزن در روی سطح به نقطه‌ی B بسته شده است (شکل ۱۵-۹). طول ریسمان $b(b<a)$ است. کشش ریسمان را حساب کنید.



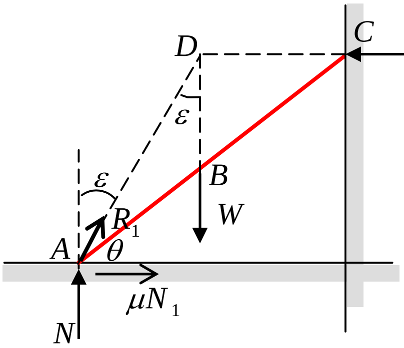
شکل ۱٤-۹

حل: نیمکره را منزوی کنید. نیروهای وارد بر آن عبارتند از: **W** که به مرکز جرم، C، در فاصله‌ی $3a/8$ از O (مثال ٤-۹ را ببینید) وارد می‌شود، نیروی واکنش سطح، **N**، و نیروی کشش ریسمان **T**. چون نقطه‌ی تماس بین سطح و نیمکره هموار است، **N** باید به سطح عمود باشد و از نقطه‌ی O بگذرد. چون **W** و **N** هر دو قائم‌اند، **T** هم باید قائم باشد و مؤلفه‌ی افقی نداشته باشد. نیمکره ترازمند است. بنابراین، برآیند نیروها باید صفر باشد: $W+T=N$. همچنین برآیند گشتاور نیروها نیز نسبت به هر نقطه‌ای باید صفر باشد. ما نقطه‌ی O را انتخاب می‌کنیم؛ چون راستای اثر **N** از O می‌گذرد و گشتاور **N** نسبت به O صفر است. بدین ترتیب نیروی ناشناخته‌ی **N** از محاسبات خارج می‌شود. برای این‌که تعادل برقرار باشد باید داشته باشیم $W\cdot\overline{OC}\sin\theta-Ta\cos\theta=0$. چون $\sin\theta=(a-b)/a$ و $\cos\theta=(2ab-b^2)^{1/2}/a$ و $\overline{CO}=3a/8$ اند، پس

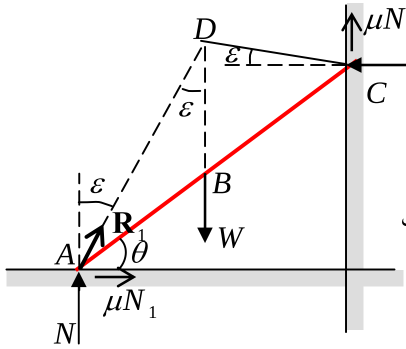
$$T=\frac{3}{8}\frac{W(a-b)}{\sqrt{2ab-b^2}} \qquad (۹-٤۰)$$

مثال ۸- ۹ نردبان یکنواخت سنگینی به دیوار ناهموار تکیه دارد و انتهای دیگر آن روی سطح افقی به همان اندازه ناهموار قرار دارد. زاویه‌ی اصطکاک ε است و نردبان در آستانه‌ی لغزش است. نردبان با سطح افقی چه زاویه‌ای می‌سازد؟

حل: در شکل (۱٦-۹ الف) نیروهای وارد به نردبان نشان داده شده‌اند. این نیروها عبارتند از وزن W که به مرکزجرم نردبان، B، وارد می‌شود و در راستای عمودی و به سمت پائین است. چون نقطه‌ی A درآستانه‌ی لغزش است. بنابراین، نقطه‌ی C نیز در آستانه‌ی لغزیدن است. نیروهای وارد به نقطه عبارتند از N_1 و μN_1 و نیروهای وارد به نقطه‌ی C عبارتند از N_2 و μN_2. یا برآیند آنها $\mathbf{R}_1$ در نقطه‌ی A و $\mathbf{R}_2$ در نقطه‌ی C. $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$، هرکدام با خط عمود زاویه‌ی ε می‌سازد؛ چون سامانه در ترازمندی حدی است (در آستانه‌ی لغزیدن است). پس، مسئله شامل سه نیروی $\mathbf{W}$، $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ است که باید یکدیگر را در یک نقطه، مانند D، قطع کنند. در مثلث ABD داریم $\frac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon}=\frac{\overline{AD}}{\cos\theta}$. از آنجائی که زاویه‌ی $ADC <$ برابر $\pi/2$ است ، پس $\overline{AD}=\overline{AC}\cos(\pi/2-\varepsilon-\theta)$. از این دو رابطه و این که $\overline{AC}=2\overline{AB}$ خواهیم داشت:



شکل ۱۶-۹



شکل ۱۶-۹ الف

$$\cos\theta = 2\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\theta) = 2\sin^2\varepsilon\cos\theta + 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1-2\sin^2\varepsilon}{2\sin\varepsilon\cos\varepsilon} = \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \cot 2\varepsilon \qquad (۹-۴۱)$$

و یا در حالت تعادل حدی (آستانه‌ی لغزش) : $\theta = (\pi/2) - 2\varepsilon$.

اگر دیوار هموار می‌بود، $\mathbf{R}_2$ بر دیوار عمود می‌شد، شکل (۱۶-۹ ب). در این حالت سه نیرو باز هم در D یکدیگر را قطع می‌کنند. این بار نقاط D و C خط افقی می‌سازند و داریم

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon} = \frac{\overline{AD}}{\cos\theta'} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC}\sin\theta' = \overline{AD}\cos\varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AC}\sin\varepsilon\sin\theta'}{\cos\theta'\cos\varepsilon} = 2\overline{AB}\tan\varepsilon\tan\theta' \quad \Rightarrow \quad \tan\theta' = \frac{1}{2}\cot\varepsilon \qquad (۹-۴۲)$$

دشوار نیست که ببینیم θ' باید از θ بیشتر باشد. این از شکل‌های (۱۶-۹ الف و ۱۶-۹ ب) آشکار است و می‌توان به صورت زیر آن را آزمود.

$$\tan\theta = \cot 2\varepsilon = \frac{\cot^2\varepsilon - 1}{2\cot\varepsilon} = \tan\theta' - \frac{1}{2\cot\varepsilon} \qquad (۹-۴۳)$$

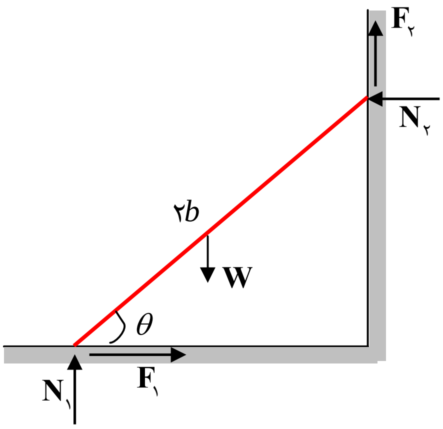
می‌توانستیم جواب‌های $\tan\theta$ و $\tan\theta'$ را با به کار بردن شرط‌های ترازمندی، $\sum\mathbf{F}=0$ و $\sum\mathbf{G}=0$ را هم به دست آوریم.

مثال ۹ ـ ۹ میله‌ای به طول $2b$ از یک انتها به دیوار ناهموار تکیه دارد و انتهای دیگر آن روی سطح افقی ناهموار است. میلـه با افق زاویه‌ی θ می‌سازد و وزن آن W است. سامانه در حالت ترازمند است، اما ترازمندی حدی نیست (یعنی در آستانه‌ی لغزش نیست).نیروهای واکنش دیوار و سطح را در دو انتهای میله به دست آوریم.

حل: نیروهای وارد به میله در شکل (۱۷-۹) نشان داده شده‌اند. چون سامانه در آستانه لغزیدن نیست نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را به طور مستقیم برحسب $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ و $\mathbf{W}$ نمی‌شناسیم. بنابراین چهار مجهول $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ داریم اما تنها سه معادله برای یافتن آنها در دسترس است که عبارتند از قانون نیروها:

$$N_1 + F_2 - W = 0 \quad و \quad F_1 - N_2 = 0 \qquad (۹-۴۴)$$

و قانون گشتاورها. اگر گشتاور نیروها را نسبت به انتهای میله که در روی سطح



شکل ۱۷-۹

افقی است حساب کنیم داریم $W\ b\cos\theta-۲N_۲ b\sin\theta-۲F_۲ b\cos\theta=\circ$. در نتیجه، با شیوه‌هائی که آموخته‌ایم، مسئله را نمی‌توان حل کرد. یک تکه دانش اضافی دیگر نیز نیاز است.

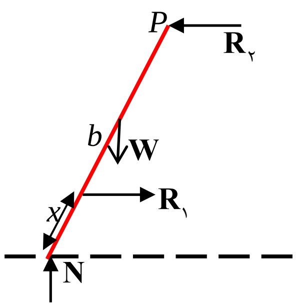
۵- ۹ نیروهای واکنش در پیوندگاه‌های هموار و ناهموار

مسئله‌های ایستایی‌شناسی پر از وضعیت‌هایی است که دو میله به هم وصل شده‌اندو یا میله‌ای از نقطه‌ای آویخته شده است. نقطه‌ی آویز یا محل پیوند می‌تواند هموار

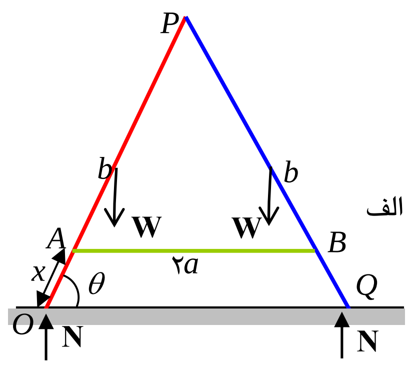
(بدون اصطکاک) و یا ناهموار باشد. اگر پیوندگاه **هموار** باشد، کنش یکی از میله‌ها را بر روی دیگری می‌توان با نیرویی نشان داد که در پیوندگاه اثر می‌کند. معمولاً جهت و اندازه‌ی این نیرو ناشناخته است و هر دو را باید از معادله‌های ترازمندی به دست آورد. با وجود این، در دو حالت، جهت نیرو شناخته شده است. نخستین این حالت ها هنگامی است که هندسه جسم و نیروهای خارجی وارد بر آن، هر دو نسبت به خط راستی که از پیوندگاه می‌گذرد متقارن باشند؛ در این حالت کنش و واکنش بین دو عضو نیز باید نسبت به این خط متقارن باشند و چون نیروهای کنش و واکنش با هم برابر و درخلاف جهت هم اند، لازم است که هر کدام به خط تقارن عمود باشد (R_2 را در مثال ۱۰-۹ ببینید). حالت دوم، هنگامی است که میله یا عضو در دو نقطه پیوند هموار داشته باشد. در این حالت جهت نیرو شناخته شده است. اگر به غیر از نیروی واکنش، هیچ نیرویی در پیوندگاه به جسم وارد نشود، آنگاه برای این که ترازمندی جسم برقرار باشد، هر دو واکنش‌ها، در دو نقطه، باید در راستای خط راستی باشند که دو پیوندگاه را به هم وصل می‌کند و باید مساوی و خلاف جهت هم باشند (مثال ۱۰-۹).

مثال ۱۰- ۹ دو میله‌ی یکسان همگن هر کدام به طول b و وزن W برابر شکل (۱۸-۹ الف) در صفحه‌ای عمودی بر روی سطح همواری قرار دارند و در انتهای بالایی به هم پیوند داده شده‌اند. پیوندگاه هموار و بدون اصطکاک است. در فاصله‌ی x از سطح افقی (ودر امتداد میله) میله‌ی افقی سبکی به طول $۲a$ در نقطه‌های A و B به طور هموار به میله‌ها وصل است. نیروی واکنش وارد به میله‌ی AB را پیدا کنید.

حل: نیروهای خارجی که به سامانه‌ی دو میله‌ای وارد می‌شوند، عبارتند از: واکنش سطح هموار افقی، $\mathbf{N}$، و نیروهای وزن $\mathbf{W}$ که به وسط میله‌ها وارد می‌شود. این نیروها در راستای عمودی‌اند. باتوجه به تقارن مسئله، واکنش $\mathbf{N}$ برای هر دو میله یکسان است. چون مجموعه را به صورت یک سامانه می‌پنداریم، تنش‌ها درمیله‌ی AB و واکنش درنقطه‌ی P نیروهای داخلی‌اند و به طور جفت حذف می‌شوند. بنابراین، در راستای عمودی داریم $۲N=۲W$.



شکل ۱۸-۹ ب



شکل ۱۸-۹ الف

حال نیروهایی را در نظر بگیرید که به یک میله، مثلاً به میله‌ی OP ، وارد می‌شوند. در شکل (۱۸-۹ ب) این نیروها نشان داده شده‌اند و عبارتند از: $\mathbf{W}$ ، $\mathbf{N}$، واکنش میله‌ی AB را $\mathbf{R}_1$ و واکنش پیوندگاه P را $\mathbf{R}_2$ بنامید. چون میله‌ها یکسان اند $\mathbf{R}_2$ باید افقی باشد. اگر $\mathbf{R}_2$ مؤلفه‌ی عمودی، مثلاً رو به بالا می‌داشت این بدان معنی می‌بود که واکنش OP روی میله‌ی QP هم می‌بایست مؤلفه‌ای عمودی، اما رو به پائین داشته باشد و این با تقارن مسئله سازگار نیست؛ چون OP و QP با هم برابرند. پس راستای اثر $\mathbf{R}_2$ تنها می‌تواند افقی باشد. باتوجه به این و رابطه‌ی بالا $2N=2W$ ،$\mathbf{R}_1$ نیز باید افقی و با $\mathbf{R}_2$ مساوی و در جهت خلاف آن باشد. حال اگر گشتاورها را نسبت به نقطه‌ی P حساب کنیم، داریم

$$Nb\cos\theta - R_1(b-x)\sin\theta - W\frac{b}{2}\cos\theta = 0 \qquad (۹-۴۵)$$

چون $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{(b-x)^2-a^2}}{a}$ است و با استفاده از $2N=2W$ اینک می توانیم بنویسیم

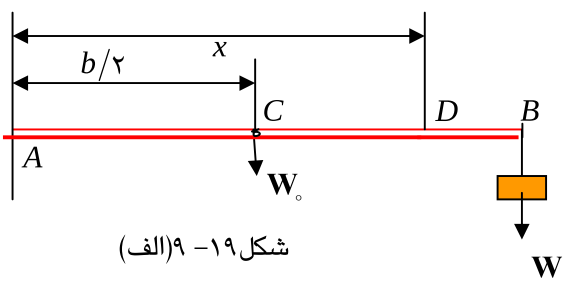
$$R_1 = \frac{abW}{2(b-x)\left[(b-x)^2-a^2\right]^{1/2}} \qquad (۹-۴۶)$$

اگر پیوندگاه هموار نباشد وضعیت فرق می‌کند. در پیوندگاه هموار، نیرو می‌تواند از عضوی به عضو دیگر منتقل شود اما گشتاور نمی‌تواند؛ حال آنکه برای پیوندگاه ناهموار هر دو ممکن است منتقل شوند . برای پیشبرد بحث شکل (۱۹-۹ الف) را در نظر بگیرید که از میله‌ی یکنواخت AB به طول b و وزن W_0 تشکیل شده است و وزنه‌ی W از انتهای B به آن آویخته است. میله در نقطه‌ی A به طور **ثابت** به دیوار وصل است. در اینجا می‌خواهیم تنشی را که در نقطه‌ی D به میله وارد می‌شود، بررسی کنیم. نقطه‌ی D به فاصله‌ی x از A قرار دارد. نیروهای وارد به دیوار در نقطه‌ی A را نیز حساب خواهیم کرد. در شکل (۱۹-۹ب) بخش BD میله و وزنه‌ی آویزان W را باتوجه به بخش ۳ -۹ می‌توان با نیروی عمودی و رو به پایین

$$F_D = W + \frac{W_0}{b}(b-x) \qquad (۹-۴۷)$$

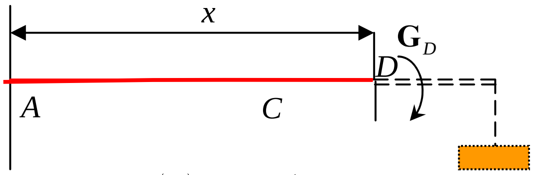
و با گشتاور

$$G_D = W(b-x) + \frac{W_0}{b}(b-x)\frac{(b-x)}{2} \qquad (۹-۴۸)$$

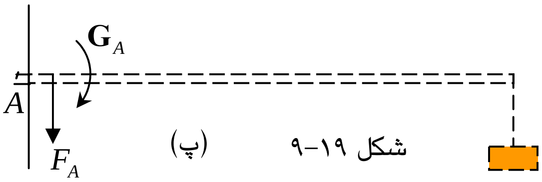


شکل۱۹- ۹(الف)

جایگزین کرد. این گشتاور می‌خواهد میله را ساعتگرد بچرخاند (این گشتاور در تعیین این که میله خواهد شکست یا نه عامل مهمی است). بنابراین، تنش‌های وارد در نقطه‌ی D عبارتند از نیروی برشی رابطه‌های (۴۷- ۹) و گشتاور (۴۸- ۹). در شکل (۱۹-۹ پ) تنش وارد به نقطه‌ی A نشان داده شده است. روشن است که می‌توان میله را با یک نیروی برشی $F_A = W + W_0$ و یک گشتاور خم‌کننده $G_A = Wb + W_0 b/2$ جایگزین کرد که هر دو در نقطه‌ی A به دیوار وارد می‌شوند. گشتاور G_A می‌خواهد دیوار را ساعتگرد بچرخاند. باتوجه به قانون سوم نیوتون، دیوار نیرویی برابر F_A و رو به بالا به میله وارد می‌کند. افزون بر این، گشتاوری به اندازه‌ی G_A از دیوار به میله وارد می‌شود که می‌خواهد میله را پادساعتگرد بچرخاند.



شکل ۱۹-۹ (ب)



شکل ۱۹-۹ (پ)

۶ – ۹ ایستایی‌شناسی ریسمان معلق

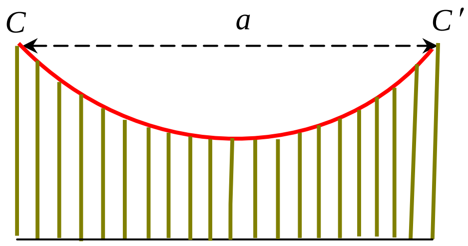
در اینجا بهتر است یکبار دیگر هم جسم سخت را تعریف کنیم: جسم سخت سامانه‌ای از ذره‌هاست که فاصله‌ی میان هر جفت آنها، مستقل از این که چه نیروهایی به جسم وارد می‌شود، ثابت بماند. در طبیعت جسم سخت آرمانی وجود ندارد. کم و بیش همه‌ی اجسام تغییر شکل می-دهند. در خیلی حالت‌ها، مانند آنهایی که در بخش های پیشین در نظر گرفتیم، با تقریب خوبی می‌توان جسم سخت را آرمانی پنداشت چون تغییر شکل بسیاری از اجسام تحت اثر نیروهایی که به آنها وارد می‌شود بسیار جزئی است.وضعیت‌هایی هم وجود دارد که این فرض پذیرفتنی نیست. برای نمونه، اگر به انتهای میله‌ای نیروی بسیار بزرگی وارد کنیم میله تغییر شکل خواهد داد. مقدار تغییر شکل به اندازه‌ی نیرو بستگی دارد. اگر تغییر شکل خیلی بزرگ نباشد با حذف‌کردن نیرو، میله به حالت نخستین خود برمی‌گردد. اجسام تغییر شکل‌پذیر دیگر، مانند ریسمانی که آزادانه روی یک میز قرار دارد، با اندک نیرو شکل خود را تغییر می‌دهند و پس از حذف نیرو به حالت اولیه‌ی خود برنمی‌گردند.
در این بخش، خود را به بررسی تک جسم تغییر شکل‌پذیر محدود خواهیم کرد؛ مانند ریسمانی که در میدان گرانش در تعادل ایستایی است و تحت تأثیر نیروهای گوناگون قرار می‌گیرد. در این بررسی فرض می‌کنیم که جسم تغییر شکل‌پذیر از اجزاء سخت زیادی تشکیل شده است که به هم پیوسته‌اند و نیروهائی که به هر جزء وارد می‌شوند از گونه‌ی نیروهای خارجی است که تاکنون در نظر گرفته‌ایم و با آن‌ها آشناییم. مانند اثر نیروهایی که همسایه‌ها به جزیی که تحت بررسی است اعمال می‌کنند. این اثر البته نیروی کششی است که در ریسمان است و در راستای خطی که دو جزء را بهم وصل می‌کند، اثر می‌کند.

۱-۶-۹ پل معلق: نخست حالتی را در نظر بگیرید که از وزن ریسمان چشم‌پوشی شده است و باری را که ریسمان تحمل می‌کند به طور یکنواخت در راستای افقی توزیع شده است مثل پل معلق شکل (۲۰-۹). آسان‌ترین روش بررسی آن است که بخشی از ریسمان را انتخاب کنیم. پائین‌ترین نقطه‌ی پل یک انتهای ریسمان باشد وانتهای دیگرش هر نقطه‌ی دیگر پل، مانند شکل (۲۱-۹)، باشد. نیروهایی که به بخش AB ریسمان وارد می‌شوند عبارتند از کشش $\mathbf{T}_\circ$ در نقطه A که در راستای افقی است، کشش $\mathbf{T}$ که در نقطه‌ی B بر ریسمان مماس است و سرانجام وزن کل $\mathbf{W}$، آن بخش از پل که به وسیله‌ی تکه‌ی AB ریسمان نگهداری شده است (یعنی بار روی قطعه $A'B'$ جاده). می‌توان فرض کرد که این نیرو به وسط این بخش ازجاده یا پل وارد می‌شود. اگر λ وزن واحد طول باشد، آنگاه $W=\lambda x$ در نقطه‌ی E به ریسمان وارد می‌شود. فاصله‌ی x افقی اندازه‌گیری شده است. θ زاویه‌ای است که خط مماس به ریسمان در نقطه‌ی B با افق می‌سازد. شرط ترازمندی AB عبارت است از:

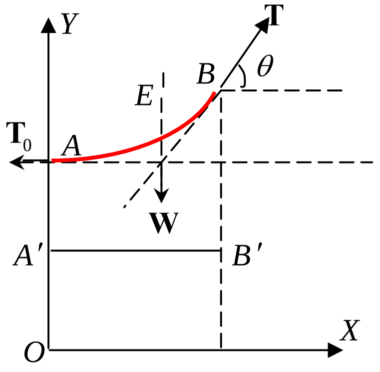
$$T\ \sin\theta=\lambda x \qquad (۴۹-۹)$$

$$T\ \cos\theta=T_\circ \qquad (۵۰-۹)$$

اگر این دو رابطه را به هم تقسیم کنیم و توجه کنیم که $\tan\theta=dy/dx$ است، آنگاه $dy/dx=\lambda x/T_\circ$. با انتگرال‌گیری از این رابطه به دست می‌آید



شکل ۲۰-۹



شکل ۲۱-۹

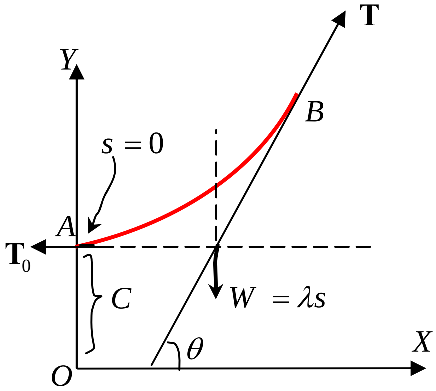
$$y = \frac{\lambda x^{2}}{2T_{0}} + C_{1} \qquad (۹-۵۱)$$

این معادله‌ی سهمی است و C_1 ثابت انتگرال‌گیری است. معنی C_1 روشن است: ارتفاع وسط ریسمان از مبدأ مختصات O است. محور سهمی خط OY است. اینک می‌توان در هر نقطه‌ی ریسمان کشش T را با استفاده از رابطه‌های (۴۹-۹) و (۵۰-۹) به دست آورد، کافی است این دو رابطه را به توان دو رساند و با هم جمع کرد.

$$T = \sqrt{T_{0}^{2} + \lambda^{2} x^{2}} \qquad (۹-۵۲)$$

با افزایش طول x، کشش نیز به صورت x^2 افزایش پیدا می‌کند و در نقطه‌ی انتهایی به بیشینه مقدار خود می‌رسد. اگر فاصله‌ی پیوندگاه‌ها را a بنامیم آنگاه بیشینه کشش $T_{\max}$ عبارت است از

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{4T_{0}^{2} + \lambda^{2} a^{2}} \qquad (۹-۵۳)$$



شکل ۲۲-۹

۲-۶-۹ زنجیر سنگین: فرض کنید زنجیر یا ریسمان سنگینی را از دو انتها به دو دیوار وصل کرده‌ایم. زنجیر یا ریسمان تحت نیروی وزن خود به حالت خمیده درمی‌آید. فرق این مسئله و پل معلق در این است که اینجا بار به طور یکنواخت در امتداد زنجیر یا ریسمان توزیع شده است. در شکل (۲۲-۹) بخش AB این زنجیر یا ریسمان نشان داده است. فرض کنید دو انتهای زنجیر یا ریسمان که به دو دیوار وصل اند دریک سطح باشند. نقطه‌ی A در شکل ، پائین‌ترین نقطه‌ی زنجیر است و نقطه‌ی B هر نقطه‌ی دیگر آن با مختصات (x, y)است. محور OY از نقطه‌ی A می‌گذرد و طول s را در امتداد زنجیر و از نقطه‌ی A اندازه‌گیری می‌کنیم. ریسمان تحت نیروی وزن خود به حالت خمیده درمی‌آید. فرق این مسئله و پل معلق در این است که اینجا بار به طور یکنواخت در امتداد زنجیر یا ریسمان توزیع شده است. در شکل (۲۲-۹) بخش AB این زنجیر یا ریسمان نشان داده است. فرض کنید دو انتهای زنجیر یا ریسمان که به دو دیوار وصل اند دریک سطح باشند. نقطه‌ی A در شکل، پائین‌ترین نقطه‌ی زنجیر است و نقطه‌ی B هر نقطه‌ی دیگر آن با مختصات (x, y)است. محور OY از نقطه‌ی A می‌گذرد و طول s را در امتداد زنجیر و از نقطه‌ی A اندازه‌گیری می‌کنیم. معادله‌های ترازمندی جزء AB زنجیر عبارتند از: $T\sin\theta = \lambda s$ و $T\cos\theta = T_0$ که در آن T_0 کشش در نقطه‌ی A و T کشش در نقطه‌ی B اند. مانند حالت پیش اگر این دو رابطه را به هم تقسیم کنیم داریم

$$s = C\tan\theta \qquad (۹-۵۴)$$

که در آن $C = T_0/\lambda$ است و دارای بعد طول است. معادله‌ی (۵۴-۹) معادله‌ی **سرشتی زنجیر** نام دارد. اگر آن را برحسب مختصات x و y بنویسیم، به نظر آشناتر خواهد آمد. برای این کار توجه کنید ک $\tan\theta = dy/dx$ است و رابطه (۵۴-۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{C} \qquad (۹-۵۵)$$

اگر یک بار ازاین رابطه مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{1}{C}\frac{ds}{dx}=\frac{1}{C}\frac{\sqrt{dx^{2}+dy^{2}}}{dx}=\frac{1}{C}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}} \qquad (۹-۵۶)$$

در این رابطه نه x وجود دارد و نه y . با تعریف $p\equiv dy/dx$ رابطه‌های بالا به معادله‌ی درجه یک از p و x تبدیل می‌شود:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^{2}}}=\frac{1}{C}dx \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{dx}=\frac{1}{C}\sqrt{1+p^{2}} \qquad (۹-۵۷)$$

که اگر از آن انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$\sinh^{-1}p=\frac{x}{C} \qquad (۹-۵۸)$$

در اینجا ثابت انتگرال‌گیری صفر است؛ چون در $x=0$ داریم $p=dy/dx=0$. رابطه‌ی (۹-۵۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\frac{x}{C} \qquad (۹-۵۹)$$

حال اگر از این رابطه انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$y=C\cosh\frac{x}{C} \qquad (۹-۶۰)$$

در اینجا نیز اگر به ازای $x=0$ داشته باشیم $y=C$ ثابت انتگرال‌گیری صفر می‌شود. این معادله‌ی خم زنجیری است که رأس آن در $y=C$ ، $x=0$ است. کمیت C **پارامتر زنجیر** نام دارد و مشخصه‌ی زنجیر است. ما به شیوه‌ی محاسبه‌ی این کمیت خواهیم پرداخت.

گاهی نوشتن s برحسب x آموزنده است. این کار را با ترکیب رابطه‌های (۹-۵۵) و (۹-۶۰) می‌توان انجام داد: از رابطه‌ی (۹-۵۵) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{C}=\sinh\left(x/C\right) \Rightarrow s=C\sinh\frac{x}{C} \qquad (۹-۶۱)$$

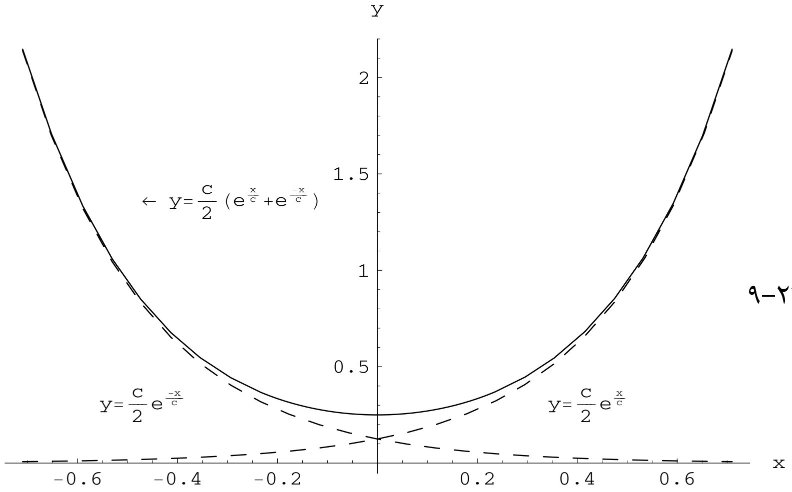
رابطه‌های دیگری نیز می‌توان نوشت: اگر رابطه‌های (۶۰- ۹) و (۶۱- ۹) را به توان دو برسانیم و از یکدیگر کم کنیم رابطه‌ای به دست خواهیم آورد که در آن x وجود ندارد: $y^{2}=s^{2}+c^{2}$.

در شکل (۹-۲۳) خط پررنگ معادله‌ی زنجیر را نشان می‌دهد که معادله‌ی آن با رابطه‌ی (۹-۶۰) داده شده است. این خم نسبت به محور زنجیر، OY ، متقارن است و خم جمع دو تابع نمایی است. این را می‌توان به سادگی دید. کافی است رابطه‌ی (۶۰- ۹) را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$y=\frac{C}{2}\left(e^{x/c}+e^{-x/c}\right) \qquad (۹-۶۲)$$

کشش در هر نقطه از ریسمان یا زنجیر را می‌توان از رابطه‌ی $T\cos\theta=T_{0}$ و رابطه‌های (۶۰- ۹) و(۶۲- ۹) به دست آورد. چون $\cos\theta\equiv dx/ds$ است ، پس داریم

$$T = T_\circ \frac{ds}{dx} = T_\circ \cosh\frac{x}{C} = \frac{T_\circ}{C} y = \lambda y \qquad (۹-۶۳)$$



شکل ۲۳-۹

تساوی سوم با مشتق گرفتن از رابطه‌ی (۶۱-۹) به دست آمد. بنابراین، کشش در هر نقطه‌ی زنجیر با ارتفاع آن نقطه متناسب است و بیشینه‌ی آن در نقطه‌ی اتصال است، جائی که $|x| = a/2$ و $y = h + C$ اند. در این جا a فاصله‌ی بین اتصال دو نقطه‌ی انتهایی است و h بیشینه فاصله‌ی زنجیر از خط افقی است که دو انتها را به هم وصل می‌کند. بیشینه‌ی T عبارت است از

$$T_{\max} = T_\circ \cosh\frac{a}{2C} = \lambda C \cosh\frac{a}{2C} = \lambda(h + C) \qquad (۹-۶۴)$$

مثال ۱۱- ۹ ریسمان سنگینی از دو گل‌میخ هم سطح به فاصله‌ی d از هم آویزان است. نشان دهید که تعادل غیرممکن است مگر اینکه طول ریسمان بزرگتر یا مساوی de باشد. e پایه‌ی لگاریتم طبیعی است.

حل: وضعیت در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. طول ریسمان مجموع دو قطعه‌ی AD و DB و دو بخش عمودی آن است: $L = 2s_1 + 2b$. پارامتر سهمی‌وار ADB برابر C است. برای این‌که در نقطه‌ی B تعادل برقرار باشد باید داشته باشیم $T_{\max} = \lambda b = \lambda C \cosh\left(d/2C\right)$. هم چنین $b = C\cosh\left(d/2C\right)$ و $s_1 = C\sinh\left(d/2C\right)$ اند. بنابراین، طول کل L برابر است با

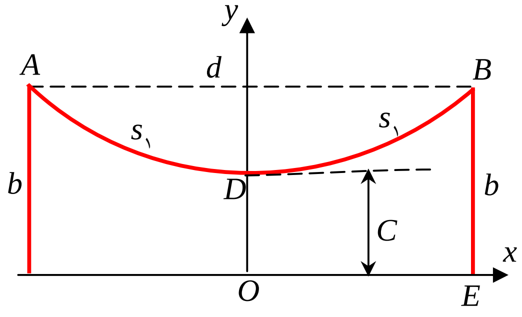
$$L = 2C\left(\cosh\frac{d}{2C} + \sinh\frac{d}{2C}\right) = 2Ce^{d/2C} \qquad (۹-۶۵)$$

اگر طول ریسمان را تغییر دهیم، تنها کمیتی که در این رابطه تغییر می‌کند پارامتر C است. بنابراین، اگر از L نسبت به مشتق C بگیریم و حالت مانای آن را بررسی کنیم داریم

$$\frac{dL}{dC} = 2e^{d/2c} - 2C\,\frac{d}{2C^2}e^{d/2c} = 0 \qquad (۹-۶۶)$$

و از اینجا $d = 2C$ که اگر در رابطه‌ی (۶۵-۹) قرار دهیم، خواهیم داشت $L = de$. برای اینکه ببینیم این مقدار L بیشینه یا کمینه مقدار است باید از (۶۶-۹) دوباره مشتق بگیریم. به سادگی می‌توان دریافت که اگر $d = 2C$ باشد آنگاه داریم

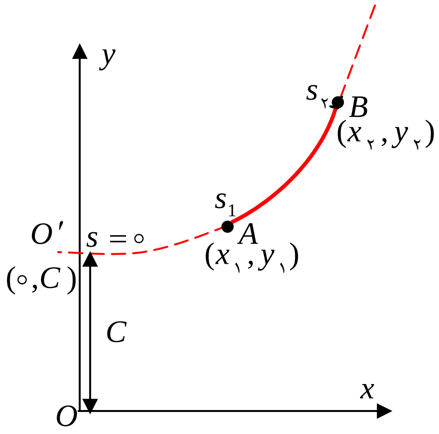
که $d^{۲}L/dC^{۲} = ۲e/C$ که مقدار مثبتی است و در نتیجه de کمینه طولی است که به ازای آن حالت ترازمندی می‌تواند برقرار باشد.



شکل ۲۴-۹

۳-۶-۹ محاسبه‌ی پارامتر زنجیر

می‌بینیم که برای حل بسیاری از مسئله‌های مربوط به زنجیر یا ریسمان معلق لازم است که پارامتر زنجیر، C، را بیابیم. نخست رابطه‌ای برای C به دست می‌آوریم و سپس درباره‌ی مقدار تقریبی آن بحث می‌کنیم.
ریسمان همگن AB شکل (۲۵-۹) را در نظر بگیرید که از دو نقطه‌ی A و B آویزان است. نقطه‌های آویز لازم نیست هم‌سطح باشند. مختصات نقطه‌ی A عبارت است از $(x_۱, y_۱)$. $s_۱$ و $s_۲$ فاصله‌ی نقطه‌های A و B از نقطه‌ی O' اند که روی خم زنجیر اندازه‌گیری می‌شوند. O' به اندازه‌ی C (پارامتر زنجیر) بالای مبداء مختصات قرار دارد.



شکل ۲۵-۹

بهتر است نمادهای زیر را نخست تعریف کنیم

$$L \equiv s_۲ - s_۱, \quad a \equiv x_۲ - x_۱, \quad h \equiv y_۲ - y_۱ \qquad (۹-۶۷)$$

از رابطه‌های (۶۰-۹) و (۶۱-۹) داریم

$$L = C\left(\sinh\frac{x_۲}{C} - \sinh\frac{x_۱}{C}\right)$$
$$h = C\left(\cosh\frac{x_۲}{C} - \cosh\frac{x_۱}{C}\right) \qquad (۹-۶۸)$$

اگر این دو رابطه را به توان دو برسانیم و از یکدیگر کم کنیم، خواهیم داشت

$$\left(L^۲ - h^۲\right) = C^۲\left(\sinh^۲\frac{x_۲}{C} + \sinh^۲\frac{x_۱}{C} - ۲\sinh\frac{x_۲}{C}\sinh\frac{x_۱}{C}\right)$$
$$-C^۲\left(\cosh^۲\frac{x_۲}{C} + \cosh^۲\frac{x_۱}{C} - ۲\cosh\frac{x_۲}{C}\cosh\frac{x_۱}{C}\right) \qquad (۹-۶۹)$$

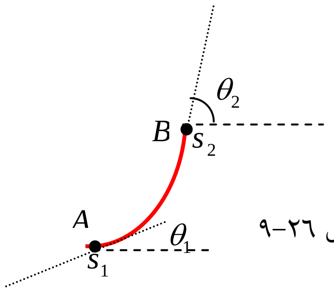
پس از ساده کردن رابطه‌ی بالا خواهیم داشت

$$L^۲ - h^۲ = ۲C^۲\left(\cosh\frac{a}{C} - ۱\right) = ۴C^۲\sinh^۲\frac{a}{۲C} \qquad (۹-۷۰)$$

از این رابطه می‌توان C را به طور عددی به دست آورد. روث (Routh) دو پاسخ حقیقی برای C یافت. یکی مثبت و دیگری منفی. فقط پاسخ مثبت رابطه‌ی بالا به زنجیری که رأس خم آن در پائین قرار دارد منطبق است. بنابراین، تنها پاسخ یا ریشه‌ی مثبت پذیرفتنی است. توجه کنید که چون رابطه‌ی (۷۰-۹) تنها یک مقدار مثبت برای C دارد، بنابراین زنجیر یا ریسمان همگن سنگین که از دو نقطه آویزان است تنها یک وضعیت تعادلی می‌تواند داشته باشد.

۹-۶-۴ مقدار تقریبی پارامتر C برای زنجیر کشیده شده

اگر ریسمان یا زنجیر سنگین خوب کشیده شده باشد، آنگاه C خیلی بزرگ خواهد بود و با استفاده از این واقعیت، می‌توان مقدار تقریبی آن را به دست آورد. در شکل (۹-۲۶) طول L از ریسمانی که از دونقطه‌ی A و B آویزان است نشان داده شده است. مختصات s_1 و s_2 در امتداد ریسمان (که AB خمی از آن است) و از رأس خم اندازه‌گیری می‌شوند. از رابطه‌ی (۹-۵۴) داریم: $L = s_2 - s_1 = C\left(\tan\theta_2 - \tan\theta_1\right)$. اگر ریسمان کشیده شده باشد، θ_1 باید تقریباً با θ_2 برابر باشد. برای این که تساوی بالا برقرار باشد باید C در مقایسه با L بسیار بزرگ باشد. برای هر ریسمان سنگینی به طول L که از دو نقطه‌ی ثابت هم‌سطح به فاصله‌ی a از هم آویخته است، از رابطه (۹ -۶۱) می‌توان نوشت



شکل ۲۶-۹

$$\frac{L}{2} = C\sinh\frac{a}{2C} \qquad (۹-۷۱)$$

وقتی ریسمان کشیده است، چون C خیلی بزرگ است، رابطه‌ی (۹-۷۱) را می‌توان بسط داد.

$$\frac{L}{2} = C\left(\frac{a}{2C} + \frac{1}{3!}\frac{a^3}{8C^3} + \cdots\right) \approx \frac{a}{2} + \frac{a^3}{48C^2} \qquad (۹-۷۲)$$

از حل این معادله برای C خواهیم داشت

$$C = \left[\frac{a^3}{24(L-a)}\right]^{1/2} \qquad (۹-۷۳)$$

که رابطه‌ای تقریبی برای پارامتر Cبرحسب طول L و فاصله‌ی a است. اینک محاسبه‌ی مقدار تقریبی کشش بیشینه شدنی است. از رابطه‌ی (۹-۶۴)، با چشم‌پوشی از توان‌های بالاتر a/C ، داریم

$$T_{\max} = \lambda C\cosh\frac{a}{2C} = \lambda C\left(1 + \frac{1}{2!}\frac{a^2}{4C^2} + \frac{1}{4!}\;\frac{a^4}{16C^4} + \cdots\right) \approx \lambda\left(C + \frac{a^2}{8C}\right) \qquad (۹-۷۴)$$

مثال ۱۲ـ ۹ ریسمان کشیده شده‌ای به طول L از دو نقطه‌ی ثابت هم‌سطح به فاصله‌ی a از یکدیگرآویزان است. گود افتادگی (شکم‌دادگی) ریسمان را حساب کنید.

حل: اگر h گودافتادگی و y_1 ارتفاع نقطه‌ی آویز بالای رأس باشد، داریم

$$h = y_1 - C = C\left(\cosh\frac{a}{2C} - 1\right) \qquad (۹-۷۵)$$

اگر $\cosh a/2C$ را بسط تیلور بدهیم، خواهیم داشت

$$h = C\left(1 + \frac{1}{2!}\frac{a^2}{4C^2} + \frac{1}{4!}\frac{a^4}{16C^4} + \cdots\right) - C \approx \lambda\frac{a^2}{8C} \qquad (۹-۷۶)$$

و با استفاده از (۹ -۶۶) داریم

$$h \approx \left[\frac{3}{\gamma}a(L-a)\right]^{1/2} \qquad (۹-۷۷)$$

۹-۶-۵ زنجیر سهمی: بد نیست که در اینجا رابطه‌ی (۶۰- ۹) را برای C بزرگ (ریسمان‌کشیده) بررسی کنیم. داریم

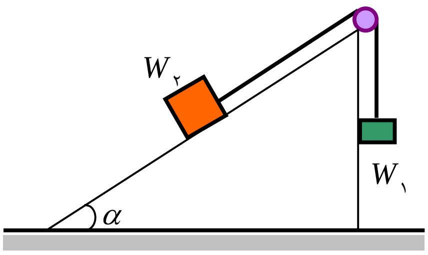
$$y=C\cosh(x/C)=C\left(1+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{C^2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{C^4}+\dots\right)\approx C+\frac{x^2}{2C} \qquad (۹-۷۸)$$

این پاسخ، معادله‌ی سهمی است. اگر در رابطه‌ی (۵۱- ۹) ثابت انتگرال‌گیری C_1 را به طور مناسب تعریف کنیم، رابطه‌ی بالا دقیقاً به معادله‌ی ریسمان سبکی که توزیع بار یکنواخت دارد (پل معلق) تبدیل می‌شود. این البته شگفت‌آور نیست، زیرا اگر ریسمان کشیده باشد، وزن واحد طول، λ، ریسمان سنگین تقریب خوبی برای بار افقی است.

۹-۷ اصل کار مجازی

تاکنون، اصول ایستایی‌شناسی را بر پایه‌ی ترازمندی نیروها و گشتاور نیروها بیان کردیم. می‌توان به جای این دو، بنیادهای ایستایی‌شناسی را بر یک اصل استوار کرد و از این یک اصل اصول ترازمندی نیروها و گشتاور نیروها را نتیجه گرفت. نخست با دو مثال تاریخی آغاز می‌کنیم.

در شکل (۲۷-۹) وزنه‌ی W_1 با ریسمان سبک ناکشسانی که از روی قرقره‌ی هموار می‌گذرد به وزنه‌ی W_2 وصل شده است. وزنه‌ی W_2 مقید به لغزیدن در روی سطح شیب‌دار همواری با شیب α است. گالیله به ویژگی بسیار مهم این آرایه پی برد: ترازمندی را می‌توان برحسب جابه‌جایی روبه بالاو دورشدن وزنه‌ی W_1 از مرکز زمین و جابه‌جایی رو به پائین و نزدیک شدن وزنه‌ی W_2 به مرکز زمین توصیف کرد. در بیان گالیله، اگر در جابه‌جایی سامانه، حاصلضرب W_1 و جابه‌جایی عمودی آن با حاصلضرب W_2 و جابه‌جایی در راستای عمودیش برابر باشند، وزنه‌ها در ترازمندی ایستایی خواهند بود. افزون براین، جابه‌جایی‌های وزنه‌ها باید در خلاف جهت یکدیگر باشند. اگر W_1 پائین آورده شود، W_2 باید بالا برده شود. پس، اگر سامانه در حال ترازمندی باشد و W_1 به اندازه‌ی h پائین بیاید، باید داشته باشیم



شکل ۲۷-۹

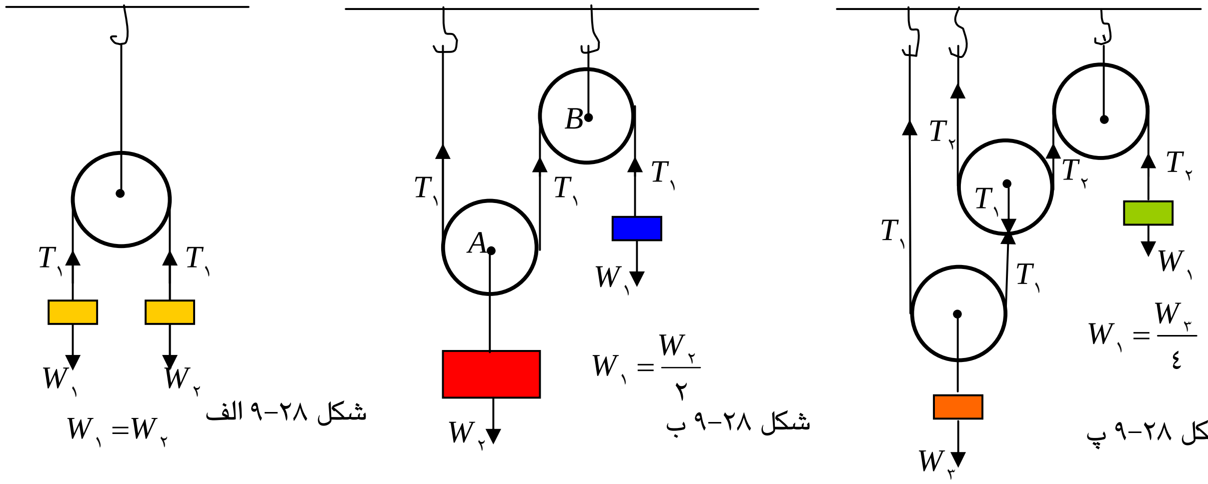
$W_1h=W_2h\sin\alpha$، یا

$$W_1h-W_2h\sin\alpha=0 \qquad (۹-۷۹)$$

در واژگان نوین این بدان معنی است که کار کل نیروهای W_1 و W_2 در طول جابه‌جایی صفر است. روشن است که نتیجه‌ی (۷۹- ۹) با آنچه که پیشتر گفتیم یکسان است. همین نتیجه برای قرقره‌های استوینوس، هم عصر گالیله، نیز به کار برده شده است. در شکل (۲۸-۹) آرایه‌ای از قرقره های هموار سامان داده شده‌اند که در حالت ترازمندی‌اند. بر پایه‌ی اصول ترازمندی که پیشتر گفتیم، اگر در شکل (۲۸-۹ الف) دو قرقره بخواهند ترازمند باشند، وزن آنها باید یکسان و $T_1=W_1=W_2$ باشد. در شکل (۲۸-۹ب) می‌توانیم هر بخش را جداگانه در نظر بگیریم: اگر قرقره‌ی A بخواهد ترازمند باشد باید داشته باشیم $2T_1=W_2$. چون T_1 با W_1 برابر است، پس داریم $W_1=W_2/2$. در شکل (۲۸-۹پ) بررسی همانندی را می‌توان انجام داد: برای اینکه W_1 در حال تعادل باشد باید داشته باشیم $T_2=W_1$ و برای اینکه قرقره‌ی میانی در حالت ترازمند باشد باید $2T_2=T_1$ باشد و سرانجام برای ترازمندی قرقره‌ی سمت چپ یا W_3 باید $2T_1=W_3$ باشد و از اینجا نتیجه می‌شود که

$$W_3=2T_1=2(2T_2)=4T_2=4W_1 \;\Rightarrow\; W_1=\frac{W_3}{4} \qquad (۹-۸۰)$$

همین نتیجه‌ها را می‌توان با این شرط هم به دست آورد که اگر یکی از وزنه‌ها در راستای عمودی جابه‌جا شود، بقیه‌ی



شکل ۲۸-۹ الف　　شکل ۲۸-۹ ب　　شکل ۲۸-۹ پ

وزنه‌های سامانه چنان جابه‌جا می‌شوند که کار کل نیروی گرانش صفر شود. می‌توان این را به آسانی دید: فرض کنید در هر کدام از سامانه‌های بالا W_1 به اندازه‌ی S_1 پائین آورده شود. برای نمونه، از هندسه‌ی شکل (۲۸-۹ الف)، دیده می‌شود که

$$W_1 S_1 - W_2 S_2 = 0 \qquad (۹-۸۱)$$

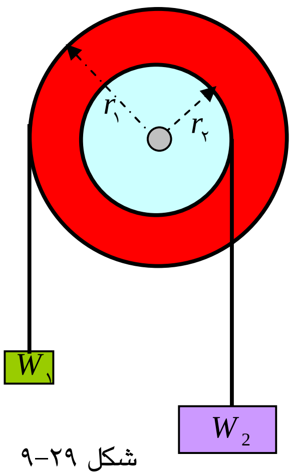
S_2 مقدار جابه‌جایی W_2 و رو به بالاست. چون $S_1 = S_2$ است پس، $W_1 = W_2$. در شکل (۲۸-۹ب) S_2 جابه‌جایی قیدی W_2 است که در اثر پائین‌آوردن W_1 به اندازه S_1 حاصل شده است، داریم

$$W_1 S_1 - W_2 S_2 = W_1 S_1 - W_2 \frac{S_1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{W_2}{2} \qquad (۹-۸۲)$$

و سرانجام در شکل (۲۸-۹پ) اگر W_2 در اثر پایین آوردن W_1 به اندازه ی S_1 وادار به جابه‌جایی به اندازه‌ی S_2 شود معادله‌ی مربوطه عبارت خواهد بود از

$$W_1 S_1 - W_2 S_2 = W_1 S_1 - W_2 \frac{S_1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{W_2}{4} \qquad (۹-۸۳)$$

بنابراین، روشن است که اندیشه‌ی صفر بودن کار کل در جابه‌جایی سامانه‌های بالا، اصل ترازمندی را فراهم می‌کند. جالب است که همین نتیجه را برای سامانه‌ی چرخنده هم می‌توان به دست آورد. درشکل (۲۹- ۹) دو چرخ به شعاع‌های r_1 و r_2 به یکدیگر پیچ شده‌اند. ریسمانی برابر شکل از آنها می‌گذرد و وزنه‌های W_1 و W_2 از ریسمان آویزانند. وزنه‌های W_1 و W_2 چنان اند که سامانه در حال ترازمند است . فرض کنید سامانه را به اندازه‌ی θ پاد ساعتگرد بچرخانیم. در طول این جابه‌جایی، W_1 به اندازه‌ی $r_1\theta$ پائین می‌رود و W_2 به اندازه‌ی $r_2\theta$ بالا می‌آید. حال فرض می‌کنیم که کار کل انجام گرفته توسط نیروی گرانش صفر باشد. بنابراین داریم $W_1 r_1\theta - W_2 r_2\theta = 0$ یا $W_1 r_1 = W_2 r_2$. اما این همان شرط ترازمندی گشتاورها برای این مسئله است. پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم که صفرشدن کار در طول جابه‌جایی این سامانه‌های ساده در حال ترازمند، دو شرط ترازمندی (ترازمندی نیروها و ترازمندی گشتاور نیروها) ایستایی پیشین را همزمان فراهم می‌کند. در مثال‌های بالا هیچ محدودیتی در اندازه‌ی جابه‌جایی اعمال نکردیم و در هر کدام، سامانه‌ی جابه‌جا شده در حالت



شکل ۲۹-۹

ترازمند بود. بنابراین، حالت های خاصی را در نظر گرفتیم که می‌توانستیم به اجزاء سامانه جابه‌جایی محدودی بدهیم و در هر جزء این جابه‌جایی سامانه هنوز هم ترازمند باقی بماند. ممکن است، در حالت عمومی، سامانه را با جابه‌جایی اندکی از حالت ترازمندی به وضعیت مجاور برد که دیگر ترازمندی نباشد. این نگرانی را می‌توان با به سوی صفر میل‌دادن اندازه‌ی جابه‌جایی برطرف کرد. به بیان دیگر، جابه‌جایی های جزئی که در آن‌ها کار کل صفر می‌شود و ترازمندی برقراراست. افزون بر این، فرض می‌کنیم که در طول جابه‌جایی زمان ثابت بماند. یک چنین جابه‌جایی را *جابه‌جایی مجازی* می‌نامند. جابجایی مجازی δx از نظر هندسی با جابه‌جایی حقیقی dx یکسان است. تفاوت این دو در آن است که *در جابه‌جایی مجازی، زمان در طول جابه‌جایی δx ثابت پنداشته می‌شود*. پس، اگر سطحی که جسم روی آن جابه‌جا می‌شود حرکت کند و یا تغییر شکل بدهد، وابستگی مکان یا تغییر شکل سطح تأثیری در جابه‌جایی مجازی δx ندارد. بنابراین، اصل کار مجازی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

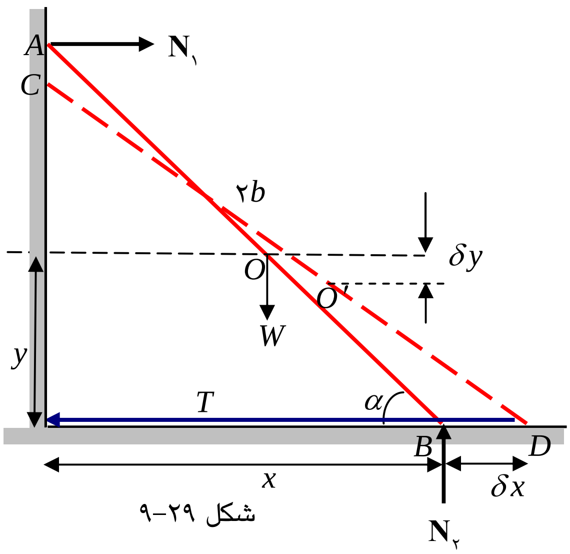
اگر سامانه‌ای با هر تعداد اجزاء، تحت تأثیر نیروهای $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots, \mathbf{F}_n$ باشد و هر یک از این نیروها سبب جابجایی‌های جزئی $\delta\mathbf{S}_1, \delta\mathbf{S}_2, \cdots, \delta\mathbf{S}_n$ شوند، اگر $\mathbf{F}_1\cdot\delta\mathbf{S}_1 + \mathbf{F}_2\cdot\delta\mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n\cdot\delta\mathbf{S}_n = 0$ یا

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{S}_i = 0 \qquad (۹-۸۴)$$

باشد، گوییم سامانه در حالت ترازمندی است. تأکید می‌کنیم که جابه‌جایی‌های $\delta\mathbf{S}_i$ مجازی‌اند؛ به این معنی که در واقعیت سامانه در حالت ترازمندی ایستایی است و حرکت نمی‌کند و جابه‌جایی تنها یک پندار ذهنی است. بیان دقیق‌تر اصل کار مجازی این است که بگوییم جابه‌جایی‌های مجازی قیدهای سامانه را نقض نمی‌کنند وشرط لازم و کافی برای ترازمندی سامانه این است که کار محازی صفر باشد.

رابطه‌ی (۸۴-۹) می‌گوید: *کار (مجازی) کل همه‌ی نیروهایی که به سامانه در حال ترازمند وارد می‌شود در طول مجموعه‌ای از جابه‌جایی‌ها صفر است. جابه‌جایی‌ها باید کوچک و در همسایگی وضعیت ترازمند باشد. این اصل کار مجازی است.*

مثال ۱۳-۹ برابر شکل (۳۰-۹) یک سر میله‌ی همگن به وزن W روی سطح افقی هموار قرار و انتهای دیگر آن به دیوار هموار تکیه دارد. انتهای پائین میله با ریسمان ناکشسان بدون وزنی به پای دیوار وصل شده است. زاویه‌ی شیب میله نسبت به افق α است. کشش ریسمان را حساب کنید.



شکل ۲۹-۹

حل: فرض کنید طول میله $2b$ است. وضعیت اولیه‌ی میله در شکل (۲۹-۹) با AB نشان داده شده است. وسط میله در O است که به اندازه‌ی y بالای سطح افقی قرار دارد و انتهای B آن در فاصله‌ی x از پای دیوار است. داریم:

$$y = b\sin\alpha \quad , \quad x = 2b\cos\alpha \qquad (۹-۸۵)$$

نیروهای وارد به میله عبارت اند از کشش ریسمان، T، نیروی

وزن W و نیروهای واکنش N_1 در A و N_2 در B. میله را اندکی جابه‌جا کنید و به حالت CD (خط نقطه‌چین) درآورید. (اگر $\alpha = \pi/4$ می‌بود، می‌بایست داشته باشیم $AC = BD$). برای این که بتوان کار نیروها را در این جابه‌جایی حساب کرد، لازم است برای α دلخواه، δyرا در همسایگی O و جابه‌جایی افقی δx نقطه‌ی B را بدانیم. می توان ازرابطه‌ی (۸۵-۹) آن‌ها را به دست آورد.

$$|\delta y| = b\cos\alpha\ \delta\alpha \quad , \quad |\delta x| = 2b\sin\alpha\,\delta\alpha \tag{۹-۸۶}$$

چون جابه‌جایی‌های دو انتهای میله در امتداد سطح افقی و دیوار اند، N_1 و N_2 کار انجام نمی‌دهند (آنها بر جابه‌جایی‌ها عمودند) بنابراین، با توجه به اصل کار مجازی باید داشته باشیم

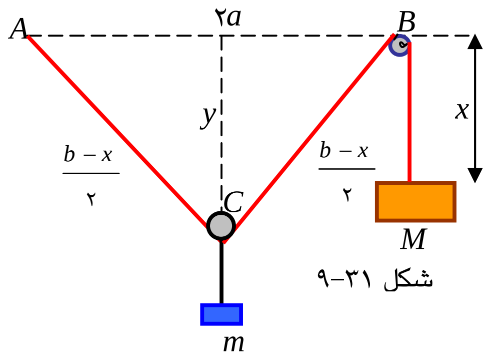
$$-T\cdot|\delta x| + W\cdot|\delta y| = 0 \tag{۹-۸۷}$$

علامت جلو جمله‌ی نخست منفی است چون جابه‌جایی δx در خلاف جهت نیروی T است؛ در حالی که علامت جمله‌ی دوم مثبت است چون جابه‌جایی δy و نیروی W همسو اند. بنابراین

$$-T\cdot 2b\sin\alpha\,\delta\alpha + W\cdot b\cos\alpha\,\delta\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{W}{2}\cot\alpha \tag{۹-۸۸}$$

این نتیجه را پیش‌تر هم به دست آوردیم.

مثال ۱۴-۹ ریسمانی به طول b در نقطه‌ی A به دیواری وصل است. ریسمان از روی قرقره‌ی همواری در نقطه‌ی B می‌گذرد. نقطه‌ی B با نقطه‌ی A هم‌سطح است و فاصله‌ی آنها $2a$ است. جرم m برابر شکل (۳۱-۹) به قرقره‌ی هموار و سبکی در نقطه‌ی C آویخته است. به انتهای دیگر ریسمان که از قرقره B می‌گذرد وزنه‌ای M آویزان است. قرقره‌ی C آزاد و سامانه در حال ترازمند است. طول x را که به ازای آن ترازمندی برقرار است، بیابید.



شکل ۳۱-۹

حل: اگر جرم M را به اندازه‌ی δx به سمت پائین جابجا کنیم جرم m به اندازه‌ی δy به سمت بالا جابه‌جا خواهد شد. پس داریم $y^2 + a^2 = (b-x)^2/4$. اگر از این رابطه مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$\delta y = \frac{-(b-x)}{\left[4(b-x)^2 - 16a^2\right]^{1/2}}\delta x \tag{۹-۸۹}$$

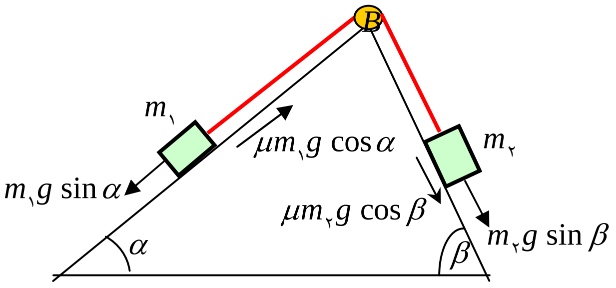
بنا به اصل کار مجازی $-mg\,|\delta y| + Mg\cdot|\delta x| = 0$ است. اگر به جای δy از رابطه‌ی (۸۹-۹) قرار دهیم ، سرانجام خواهیم داشت

$$x = b - \left(\frac{16M^2a^2}{4M^2 - m^2}\right)^{1/2} \tag{۹-۹۰}$$

مثال ۱۵- ۹ جرم‌های m_1 و m_2 همانند شکل (۳۲-۹) با ریسمان ناکشسانی به هم وصل اند. ریسمان از روی قرقره‌ی هموار در نقطه‌ی B می‌گذرد. وزنه‌ها بر روی دو سطح شیب‌دار قرار دارند. اصطکاک هر دو سطح یکسان و ضریب اصطکاک μ

است. زاویه های شیب α و βاند. اگر جرمها در آستانه‌ی لغزش در جهت پاد ساعتگرد باشند، ضریب اصطکاک ایستایی μ را بیابید.

حل: جابه‌جایی کوچک و پاد ساعتگرد δx را در نظر بگیرید. اگر سامانه در حالت ترازمند باشد کار کل همه‌ی نیروها در طول این جابه‌جایی باید صفر باشد:



شکل ۳۲-۹

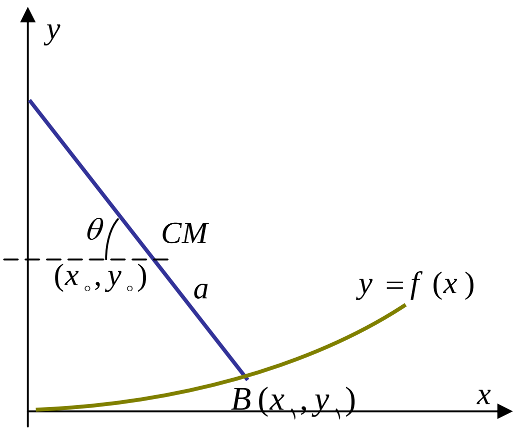
$$(m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha).|\delta x| - (m_2 g \sin\beta + \mu m_2 g \cos\beta).|\delta x| = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta} \qquad (۹-۹۱)$$

همین نتیجه را می‌توانید با استفاده از ترازمندی نیروها و گشتاور نیروها هم به دست آورید.

مثال ۱۶ ـ ۹: میله‌ای به طول a از یک سر به دیوار عمودی کاملاً هموار تکیه دارد و انتهای دیگر آن بر روی سطحی کاملاً هموار با معادله‌ی $y = f(x)$ قراردارد. تابع سطح $f(x)$ چگونه باید باشد تا میله در هر وضعیتی که قرار گیرد همواره در حالت ترازمند باقی بماند (شکل ۳۳ -۹).

حل: برای این‌که میله در هر وضعیتی در حال ترازمند باشد، ارتفاع مرکز جرم آن باید ثابت باشد (چرا؟ با توجه به اصل کار مجازی این گزاره را توجیه کنید). فرض کنید (x_0, y_0) مختصات مرکزجرم و (x_1, y_1) مختصات نقطه‌ی تماس میله در نقطه‌ی B با خم $f(x)$ باشد. اگر زاویه‌ی شیب میله θ باشد داریم:



شکل ۳۳-۹

$$y_0 = \frac{a}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin\theta;$$
$$x_0 = \frac{1}{2}a\cos\theta\,,\quad x_1 = a\cos\theta \qquad (۹-۹۲)$$

بنابراین،

$$y_1 = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1-\cos^2\theta}\right) = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) \qquad (۹-۹۳)$$

۸-۹ پایداری ترازمندی

مثال (۱۶-۹) آغاز خوبی برای بررسی پایداری تعادل است. اصل کار مجازی می‌آموزد که برای هر سامانه‌ی در حال ترازمند، کار کل تمام نیروهائی که به سامانه وارد می‌شوند، در طول جابه‌جایی سامانه صفر است، یعنی

$$\delta W = \circ \qquad (۹-۹٤)$$

حالا، اگر نیروها پایستار باشند، همان‌گونه که پیشتر گفتیم، می‌توان از تابع انرژی پتانسیل سامانه V حرف زد . V فقط تابعی از مختصات است. افزون بر این، با جابه‌جایی سامانه، تابع انرژی پتانسیل نیز همراه با جابه‌جایی تغییر می‌کند. می‌دانیم

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dV \qquad (۹-۹٥)$$

بنابراین، برای جابه‌جایی مجازی این رابطه به صورت زیر درمی‌آید

$$\delta W = -\delta V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) = \circ \qquad (۹-۹٦)$$

چون δx، δy و δz متغیرهای مستقل اند؛ رابطه‌ی (۹٦- ۹) فقط هنگامی می‌تواند برقرار باشد که به ازای هر δx، δy و δz، هر یک از جمله‌های (۹٦-۹) جداگانه صفر شوند. به بیان دیگر، برای این که رابطه‌ی (۹٦-۹) برقرار باشد باید داشته باشیم

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \circ \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \circ \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \circ \qquad (۹-۹۷)$$

رابطه‌های (۹۷-۹) شرط‌های لازمی‌اند که انرژی پتانسیل در آرایش ترازمند مقدار ثابتی داشته باشد. این همان نکته‌ی فیزیکی است که در حل مثال (۱٦-۹) از آن استفاده کردیم. رابطه‌های (۹۷-۹) همچنین، به مولفه‌های نیروها مربوط اند: برای نمونه $F_x \equiv -\partial V/\partial x$. معادله‌ی (۹۷-۹) بیان گزاره‌ی آشنای *« در حالت تعادل برآیند نیروها صفر است»* می‌باشد. با این حال، رابطه‌های (۹۷-۹) نمی‌گویند که آیا ترازمندی پایدار است یا نه. در حالت ترازمندی پایدار انرژی پتانسیل **همواره کمینه** است. پس، اگر با اندک اختلالی در سامانه آن را از حالت ترازمندی پایدار خود خارج کنیم، پس از حذف اختلال، سامانه به موقعیت اولیه‌ی خود برمی‌گردد. اگر ترازمندی پایدار نباشد، پس از حذف اختلال سامانه دیگر به حالت اولیه‌ی خود برنمی‌گردد. مثال ساده‌ی ترازمندی پایدار غلتیدن تیله‌ای در درون کاسه‌ی به شکل نیم‌کره است. تجربه‌ی همگانی می‌آموزد که تیله در ته کاسه باقی می‌ماند و اگر از نقطه‌ی ته کاسه به سویی هل داده شود، دوباره به جای اول خود برمی‌گردد. در مقابل، اگر کاسه را وارون کنیم و تیله را بر روی کاسه و در قطب شمال آن قرار دهیم، با کوچکترین اختلال تیله از سطح کاسه جدا می‌شود و هیچ تمایلی برای بازگشت به جایگاه نخستین خود نداشته باشد. در حالت نخست که تیله در ته کاسه قرار دارد ترازمندی **پایدار** است، در حالت دوم ترازمندی **ناپایدار** است. حالت سومی نیز وجود دارد که در آن اختلال نه سبب افزایش و نه کاهش انرژی پتانسیل می‌شود؛ مانند حالتی که تیله آزادانه روی سطح افقی جابه‌جا شود. این گونه ترازمندی، **ترازمندی بی‌تفاوت** است. همان‌گونه که پیشتر دیدیم، تابع انرژی پتانسیل را می‌توان در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی بسط تیلور. برای سادگی فرض کنید تابع انرژی پتانسیل تابعی از یک متغیر، x، است، یعنی سامانه تنها یک درجه‌ی آزادی دارد. نقطه‌ی ترازمندی را در $x = \circ$ فرض کنید. بسط تیلور تابع انرژی پتانسیل در همسایگی $x = \circ$ به صورت زیر است از

$$V(x) = V_\circ + x\left(\frac{dV}{dx}\right)_\circ + \frac{x^۲}{۲!}\left(\frac{d^۲V}{dx^۲}\right)_\circ + \frac{x^۳}{۳!}\left(\frac{d^۳V}{dx^۳}\right)_\circ + \frac{x^٤}{٤!}\left(\frac{d^٤V}{dx^٤}\right)_\circ + \cdots \qquad (۹-۹۸)$$

در رابطه‌ی بالا $V_\circ$، انرژی پتانسیل در مبداء است و مقدار ثابتی است. می‌توانیم آنرا صفر بگیریم. (مقدار ثابت افزودنی به تابع انرژی پتانسیل اثری در نیرو ندارد). افزون بر این، چون $x = \circ$ نقطه‌ی ترازمندی است، پس در آنجا نیرو باید صفر باشد $(dV/dx)_\circ = \circ$، . پس داریم:

$$V(x)=\frac{x^{2}}{2!}\left(\frac{d^{2}V}{dx^{2}}\right)_{0}+\frac{x^{3}}{3!}\left(\frac{d^{3}V}{dx^{3}}\right)_{0}+\frac{x^{4}}{4!}\left(\frac{d^{4}V}{dx^{4}}\right)_{0}+\cdots \qquad (۹-۹۹)$$

چون بسط در همسایگی $x=0$ انجام گرفته است، x باید به طور کلی کمیت بسیار کوچکی باشد. پس، هر یک از جمله‌های رابطه‌ی (۹۹-۹) مقدار کوچکی است و هر جمله نسبت به جمله‌ی پیشین یک مرتبه بالاتر است. بنابراین، اگر $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}$ صفر نباشد، با تقریب خوبی می‌توان از جمله‌های با مرتبه‌ی بالاتر چشم پوشی کرد و نوشت

$$V(x)=\frac{X^{2}}{2!}\left(\frac{d^{2}V}{dx^{2}}\right)_{0} \qquad (۹-۱۰۰)$$

اگر $V(x)$ بخواهد در $x=0$ کمینه باشد (چون با قراردادن $V_{0}=0$ تعریف کردیم که V در $x=0$ صفر است) باید $V(x)$ در همسایگی $x=0$بزرگتر از صفر باشد. چون x^{2} در رابطه (۱۰۰-۹) کمیت مثبتی است ؛ در نتیجه علامت $V(x)$ همانند علامت $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}$ است. پس، پایداری یا ناپایداری ترازمندی بستگی به این دارد که $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}$ مثبت یا منفی باشد. اگر $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}=0$ باشد، لازم است که به بررسی جمله‌های بالاتر بپردازیم، در مورد مسئله‌ی کنونی، باید به بررسی جمله‌ی

$$V(x)=\frac{x^{3}}{3!}\left(\frac{d^{3}V}{dx^{3}}\right)_{0} \qquad (۹-۱۰۱)$$

به پردازیم. اگر $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ مثبت باشد آنگاه بسته به این که xمثبت یا منفی است، $V(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. همچنین، اگر $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ منفی باشد باز هم $V(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بستگی به دارد که x منفی یا مثبت است. نتیجه آنکه، اگر نخستین جمله‌ی غیرصفر بسط تیلور $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ باشد ترازمندی ناپایدار است چه علامت $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ مثبت باشد یا منفی. اگر $V(x)$ را بتوان به شکل (۱۰۱-۹) نوشت، آنگاه نمودار $V(x)$ به صورت شکل (۳۴-۹) خواهد بود. یعنی در مبدأ مختصات $V(x)$ دارای نقطه‌ی عطف است. شکل (۳۴-۹ الف) حالتی را نشان می‌دهد که $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ مثبت است و در شکل (۳۴-۹ ب) حالت $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}<0$ نشان داده شده است.



شکل ۳۴-۹ الف　　　　شکل ۳۴-۹ ب

اگر $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ باشد، باید جمله‌ی بعدی $V(x)=\left(d^{4}V/dx^{4}\right)x^{4}/4!$ بسط (۹۹- ۹) را بیازمائیم. در اینجا هم مثل رابطه‌ی (۹۸-۹) مثبت یا منفی‌بودن $V(x)$بستگی به علامت $\left(d^{4}V/dx^{4}\right)_{0}$دارد و پایداری و ناپایداری ترازمندی نیز همانند آن است، یعنی اگر $\left(d^{4}V/dx^{4}\right)_{0}$مثبت باشد ترازمندی پایدار و اگر منفی باشد ترازمندی ناپایدار است.

مثال۱۷-۹: در مثال ۱۴-۹ آرایش ترازمندی را بیابید و پایداری آن را بیازمائید.

حل: انرژی پتانسیل را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$V=-mgy-Mgx=-\frac{mg}{2}\sqrt{(b-x)^2-4a^2}-Mgx$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dV}{dx}=\frac{mg}{2}\frac{b-x}{\left[(b-x)^2-4a^2\right]^{1/2}}-Mg \qquad (۹-۱۰۲)$$

مکان ترازمندی جایی است که $dV/dx=0$ باشد. در نتیجه

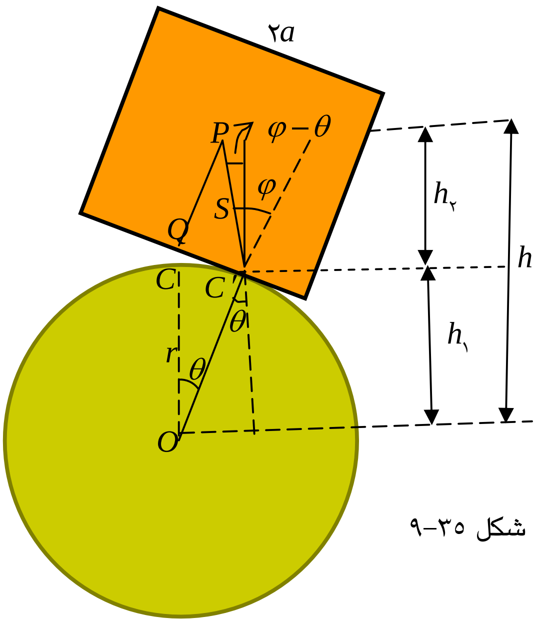
$$\frac{dV}{dx}=0\quad\Rightarrow\quad x=b-\left(\frac{16M^2a^2}{4M^2-m^2}\right)^{1/2} \qquad (۹-۱۰۳)$$

این همان مقداری است که در مثال (۹-۱٤) به دست آوردیم. جالب است که توجه کنید: برای این که x کمیت حقیقی باشد باید داشته باشیم $4M^2>m^2$. برای این که بدانیم ترازمندی پایدار یا ناپایدار است باید d^2V/dx^2 را وارسی کنیم.

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{g\left(4M^2-m^2\right)^{3/2}}{4m^2a} \qquad (۹-۱۰٤)$$

اگر $4M^2>m^2$ باشد، آنگاه d^2V/dx^2 کمیت مثبتی است. پس، تنها هنگامی ترازمندی خواهیم داشت که $4M^2>m^2$ باشد و در این حالت ترازمندی، پایدار است.

مثال ۱۸– ۹ مکعب توپری به ضلع $2a$ بر روی تنه‌ی استوانه‌ای درختی به شعاع r در حال ترازمندی است. صفحه‌ی یک طرف مکعب به محور استوانه عمود است. آیا این ترازمندی پایدار است یا نه؟



شکل ۹-۳۵

حل: در شکل (۹-۳۵) مکعب اندکی از حالت ترازمندی جابه‌جا شده است. در حالت ترازمندی نقطه‌ای Q بر نقطه‌ی C تنه‌ی درخت منطبق بود. در وضعیت جدید تماس، C'، خط OC' با OC زاویه‌ی θ می‌سازد و PC' با PQ زاویه‌ی φ دارد. اگر لغزش وجود نداشته باشد، باید داشته باشیم: $r\theta=a\tan\varphi$ یا $\overline{QC'}=r\theta$. چون جابه‌جایی بسیار کوچک است، رابطه‌ی بالا را می توان به صورت $r\theta=a\varphi$ نوشت. چون نقطه‌ی صفر انرژی پتانسیل دلخواه است، آن را در سطح محور استوانه فرض کنید. پس، انرژی پتانسیل مکعب عبارت است از $+mgh$ که h ارتفاع مرکز مکعب، P، از نقطه‌ی O است. اما از شکل آشکار است که $h=h_1+h_2=r\cos\theta+S\cos(\varphi-\theta)$ که در آن $S\equiv\overline{PC'}=\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}$. پس

$$V = mgh = mgr\cos\theta + mg\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}\cos(\varphi-\theta)$$
$$= mgr\cos\theta + mg\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] \qquad (۹-۱۰۵)$$

حال اگر از این رابطه نسبت به θ مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = -mgr\sin\theta + \frac{mgr^2\theta}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right]$$
$$-mg\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}\left(\frac{r}{a}-1\right)\sin\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] \qquad (۹-۱۰۶)$$

این تساوی برای r و a دلخواه هنگامی برقرار است که $\theta=0$ باشد. اینک داریم

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mgr\cos\theta + \frac{mgr^2}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] - \frac{mgr^4\theta^2}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{3/2}}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right]$$
$$-\frac{mgr^2\theta}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)\sin\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right]-$$
$$\frac{mgr^2\theta}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)\sin\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] - mg\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] \qquad (۹-۱۰۷)$$

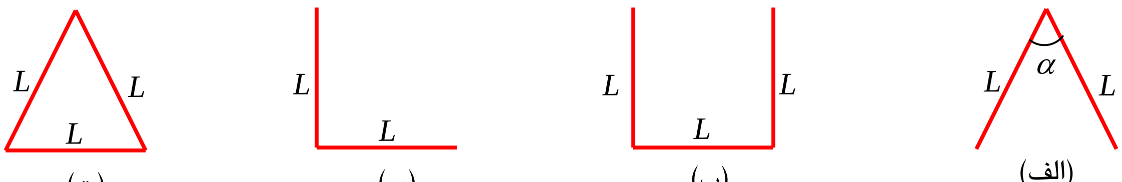
و به ازای $\theta=0$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 = mg\left[-r+\frac{r^2}{a}-a\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\right] = mg(r-a) \qquad (۹-۱۰۸)$$

پس: اگر $r>a$ باشد آنگاه ترازمندی پایدار است. اگر $r<a$ ، ترازمندی ناپایدار و سرانجام، به ازای $r=a$ باید مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر را وارسی کرد تا از سرشت ترازمندی آگاه شد.

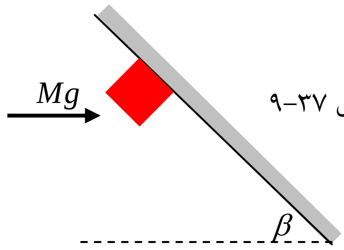
مثال‌های تکمیلی

ت-۱ هریک از اجسام شکل (۳۶-۹) از سیم‌های همگن ساخته شده‌اند. مکان مرکزجرم هریک را پیدا کنید.



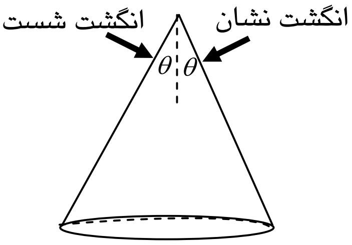
شکل ۳۶-۹

ت-۲ قطعه‌ای به جرم M در زیر دیواری قرار دارد که با افق زاویه‌ی β می‌سازد. نیروی افقی Mg برابر شکل (۳۷-۹) به قطعه وارد می‌شود. فرض کنید نیروی اصطکاک بین قطعه و دیوار به اندازه‌ای بزرگ است که قطعه در حال سکون باقی می‌ماند. نیروعمودی N و نیروی اصطکاک F_f که دیوار به قطعه وارد می‌کند چیستند؟ اگر ضریب اصطکاک ایستایی μ باشد، در چه بازه‌ی β قطعه ساکن باقی می‌ماند؟



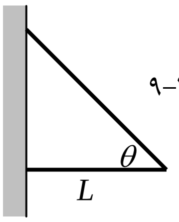
شکل ۹-۳۷

ت-۳ یک قیف بستنی را با برابر شکل (۳۸-۹) دو انگشت شست و نشان به طور وارون در هوا ساکن نگه می‌داریم. جرم قیف m است و ضریب اصطکاک ایستایی بین قیف و انگشت‌ها μ است. زاویه‌ی راس قیف 2θ است. کم‌ترین نیرویی را که هر انگشت باید عمود بر قیف وارد کند تا قیف را در هوا نگه دارد چیست؟ کم‌ترین مقدار μ (برحسب θ) که بتوان قیف را هنوز در هوا نگه داشت چدر است؟ فرض کنید که نیروی عمودی لازم، هر اندازه که بزرگ باشد، انگشت‌ها می‌توانند فراهم کنند.



شکل ۹-۳۸

ت-۴ دو میله برابر شکل (۳۹-۸) به یکدیگر و به دیوار وصل‌اند. طول میله‌ی افقی L است. زاویه‌ی بین میله‌ها θ است. اگرجرم واحد طول هر دو میله ρ باشد. مولفه‌های افقی و عمودی نیرویی را که دیوار به پیوندگاه بالا وارد می‌کند حساب کنید. نشان دهید که اندازه‌ی این نیرو در هر دو حالت $\theta \to 0$ و $\theta \to \pi/2$ به بینهایت میل میکند (بنابراین زاویه‌ای مانند $0 < \theta_0 < \pi/2$ وجود دارد که به ازای آن نیرو کمینه می‌شود. می‌توانید نشان دهید که این کمینه در $\cos\theta = \sqrt{3} - 1$ یا $\theta \approx 43^\circ$ فراهم می‌شود.)

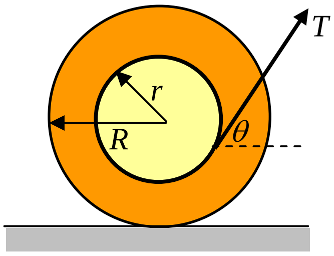


شکل ۹-۳۹

ت-۵ ماسوره‌ای شامل یک محور استوانه‌ای به شعاع r و بدنه‌ای به شعاع R است و روی زمین می‌غلتد. جرم ماسوره M است. فرض کنید اصطکاک بین زمین و ماسوره به اندازه‌ی کافی بزرگ است که از لغزیدن آن جلوگیری می‌کند. برابر شکل (۴۰-۹) ریسمانی به دور محور پیچیده شده است و با کشش T کشیده می‌شود.

(الف): برای r و R معین زاویه‌ی θ چقدر باید باشد تا ماسوره حرکت نکند؟

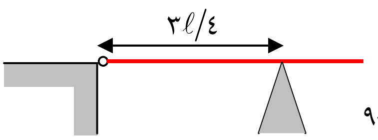
(ب): برای r و R وضریب اصطکاک μ بین ماسوره و زمین معین، بیشینه مقداری که T می‌تواند داشته باشد و هنوز هم ماسوره جابه‌جا نشود، چیست؟



شکل ۹-۴۰

(پ): برای R و μ معین، r چقدر باید باشد تا با کمترین مقدار ممکن T ماسوره از حالت ایستایی خارج شود و در روی سطح بلغزد؛ یعنی به ازای چه مقدار r حد بالای T در بخش (ب) کم‌تریم مقدار ممکن را دارد. این مقدار T را حساب کنید.

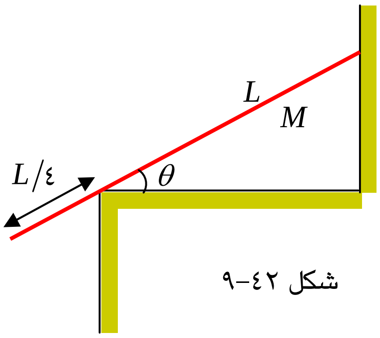
ت-۶ انتهای چپ میله‌ی یکنواختی به جرم m و طول ℓ برابر شکل (۴۱-۹) به میزی لولا شده است. گوه‌ای در فاصله‌ی $3\ell/4$ زیر میله قرار دارد تا آن را افقی نگه دارد. گوه چه نیرویی به میله وارد می‌کند؟



شکل ۹-۴۱

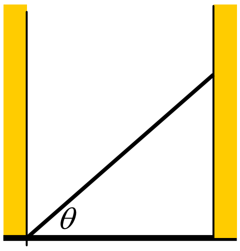
ت-۷ میله‌ای به جرم M و طول L از یک انتها به دیوار عمودی بدون اصطکاک تکیه دارد و برابر شکل (۴۲-۹) در فاصله‌ی

۱/٤ طول از انتهای دیگرش بر لبه‌ی سکویی قرار دارد. میله با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. به ازای چه مقدار θ، کم‌ترین ضریب اصطکاک در لبه‌ی سکو می‌تواند میله را در حال سکون نگه دارد؟ (برای طول‌های مختلف میله،مقدار θ متفاوت خواهد بود، اما فرض کنید که برای هر طولی ، جرم همان M است).



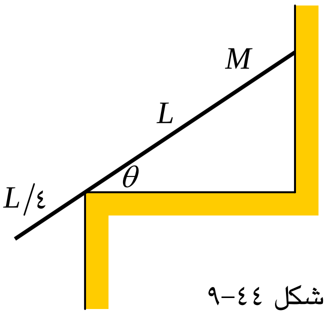
شکل ۴۲-۹

مسئله ها



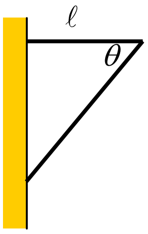
شکل ۹-۴۳

۹-۱ (میله در چاه): میله‌ی همگنی برابر شکل (۹-۴۳) از یک سر به دیوار و از سر دیگر به ته چاهی تکیه دارد و با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. چاه چه نیروی‌هایی را که به دو انتهای میله وارد می کند؟ دیوارها و سطح چاه اصطکاک ندارد.



شکل ۹-۴۴

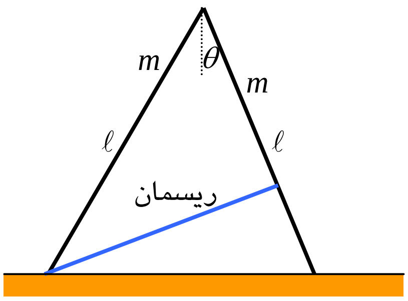
۹-۲ (نردبان بر لب سکو): نردبانی به طول L و جرم M از یک انتها به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه دارد و در فاصله‌ی $L/٤$ از انتهای دیگر با لبه‌ی سکویی درتماس است (شکل ۹-۴۴). فرض کنید اصطکاک لبه‌ی سکو به اندازه‌ی کافی بزرگ است که نردبان را در حال سکون نگه دارد. نیروی کل که سکو به نردبان وارد می کند چقدر است؟



شکل ۹-۴۵

۹-۳ (چنگک روی دیوار): برابر شکل (۹-۴۵) دو میله با لولا به یکدیگر و به دیواری عمودی وصل شده اند. زاویه‌ی بین میله‌ها θ است. چگالی جرمی میله‌ها یکنواخت و ρ است. طول میله‌ی افقی ℓ است. مولفه‌های افقی و عمودی نیرویی را که میله‌ی پایین به دیوار وارد می‌کند پیدا کنید.

۹-۴ (دو میله و ریسمان): دو میله هر یک به طول ℓ و جرم m را برابر شکل (۹-۴۶) از یک انتها با لولای بدون اصطکاک به هم می‌پیوندیم. هر میله با خط قایم زاویه‌ی θ می‌سازد. با ریسمانی انتهای پایینی میله‌ی سمت چپ را به میله‌ی سمت راست می‌بندیم به طوری که ریسمان و میله‌ی سمت راست زاویه‌ی 90° بسازند. مجموعه قائم بر روی میز بدون اصطکاک قرار دارد.

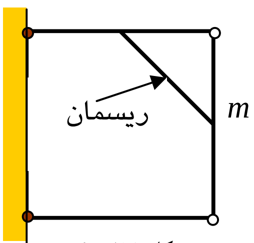


شکل ۹-۴۶

(الف): کشش ریسمان را حساب کنید.

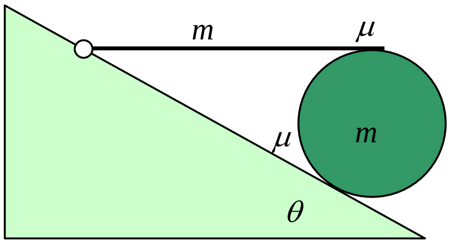
(ب): میله‌ی سمت چپ چه نیرویی را در پیوندگاه به میله‌ی سمت راست وارد می‌کند؟

۹-۵ (سه میله و ریسمان): سه میله هریک به جرم m سه ضلع یک مربع را می‌سازند. میله‌ها برابر شکل (۹-۴۷) با بست‌های بدون اصطکاک به یکدیگر و به دیوار وصل‌اند. وسط میله‌ی بالایی و سمت راست با ریسمان به همدیگر وصل شده‌اند. کشش را در ریسمان حساب کنید.

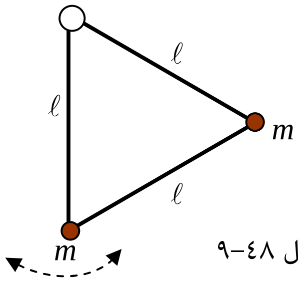


شکل ۹-۴۷

۹-۶ (دو جرم و مثلث) : از سه میله‌ی بدون جرم و به طول ℓ یک قاب مثلث ساخته‌ایم. دو جرم m را در دو راس این مثلث متساوی الاضلاع قرار می‌دهیم. راس سوم ازمیخی آویخته شده است. قاب می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی عمودی نوسان کند، شکل (۹-۴۸). هنگامی که یکی از میله‌ها عمودی است (همانند شکل). سامانه را از حالت سکون رها می کنیم. کشش را در هر سه میله بیابید و شتاب جرم‌ها را درست پس از رها شدن حساب کنید

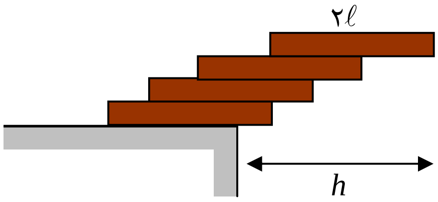


شکل ۹-۴۹



شکل ۹-۴۸

۹-۷ (**استوانه روی سطح شیب‌دار**):   یک میله‌ی افقی به جرم m از انتهای چپ با لولای بدون اصطکاک به سطح شیب‌داری با شیب θ وصل شده است. انتهای راست میله برابر شکل (۹-۴۹) بر روی استوانه‌ای به جرم m قرار دارد. استوانه روی سطح شیب‌دار در حالت سکون است. ضریب اصطکاک بین میله و استوانه و بین سطح و استوانه هر دو μ است

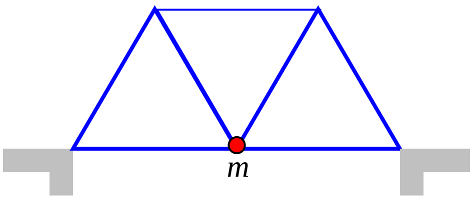


شکل ۹-۵۰

(الف): فرض کنید سامانه در حال سکون است. سطح چه نیروی عمودی به استوانه وارد می‌کند؟

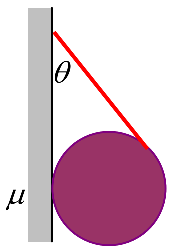
(ب): برای این که سامانه نلغزد، کمترین مقدار μ برحسب θ چقدر باید باشد؟

۹-۸ (**چیدن آجرها):** چهارآجر یکسان هر یک به طول ۲ℓ و جرم m را بر روی میزی چنان می‌چینیم که بخشی از هر آجر نسبت به آجر زیری در هوا باشد (شکل ۹-۵۰). آجر ها را چگونه بچینیم تا فاصله‌ی لبه‌ی سمت راست آخرین آجر تا لبه‌ی میز (فاصله‌ی h) بیشترین فاصله ممکن باشد. مسئله را برای N آجر گسترش دهید



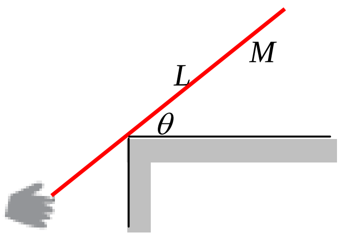
شکل ۹-۵۱

۹-۹ (**پل**): با سه قاب مثلث متساوی الاضلاع که هر کدام با سه میله ساخته شده است پلی برابر شکل (۹-۵۱) ساخته شده می‌شود. فرض کنید هفت میله‌ی تشکیل دهنده بدون جرم‌اند و میله‌ها دو به دو با بست به هم پیوند داده شده اند. اگر اتوموبیلی به جرم m در وسط پل باشد، نیروی وارد به هر یک از میله ها را بیابید. فرض کنید نیروی پایه‌های پل مولفه‌ی افقی ندارد.



شکل ۹-۵۲

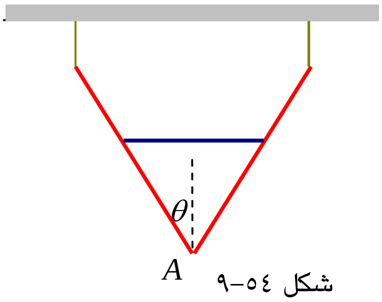
۹-۱۰ (**توپ و ریسمان**): توپی برابر شکل (۹-۵۲) نگه داشته شده است. ریسمان به توپ مماس است. ریسمان با دیوار زاویه‌ی θ می‌سازد. کمینه مقدار ضریب اصطکاک بین توپ و دیوار چقدر باید باشد تا توپ نیفتد.



شکل ۹-۵۳

۹-۱۱ (**نگه داری میله**): میله‌ای به طول L و جرم M را برابر شکل (۹-۵۳)با انگشت دست نگه می داریم. در فاصله‌ی $L/4$ از انگشت دست، میله بر لبه‌ی بدون اصطکاک میزی تکیه دارد و ساکن است. در این حالت میله با افق زاویه‌ی

θمی‌سازد. برای این که میله در این وضعیت باقی بماند چه نیرویی را باید دست به میله وارد کند؟ به ازای چه زاویه‌ی θ نیروی دست باید افقی باشد؟



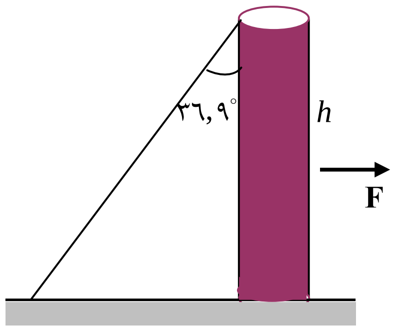
شکل ۵٤-۹

۱۲-۹ (v آویزان): دو میله‌ی همگن یکسان هر یک به وزن ۲٦۰ N از یک انتها (نقطه‌ی A در شکل (٥٤-۹)) با لولای بدون اصطکاک به هم چسبیده‌اند. میله‌ی افقی سبکی وسطهای آنها را به هم وصل می‌کند تا به این وسیله زاویه‌ی راس دو میله $^\circ$۵۳ باقی بماند. این سامانه را با دو سیم نازک از سقف می‌آویزیم تا به صورت " **v** " بایستد.

(الف): میله‌ی افقی چه نیرویی به هر یک از میله‌ها وارد می‌کند؟

(ب): در نقطه‌ی A لولا چه نیرویی به هر یک از میله ها وارد می‌کند؟

۱۳-۹ (تیرک پابرجا): تیرکی به وزن ٤۰۰ N و ارتفاع h بر روی زمین ایستاده است. ضریب اصطکاک بین زمین و سطح قاعده‌ی تیرک $\mu =$ ۰/۳ است. انتهای بالای تیرک برابر شکل (۵۵-۹) با ریسمانی به زمین بسته شده است. زاویه‌ی ریسمان با تیرک $^\circ$۹ر۳٦ است. نیروی افقی **F** به وسط تیرک وارد می شود.



شکل ۵۵-۹

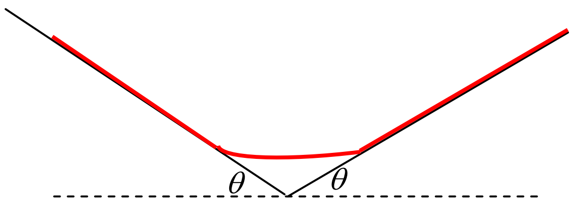
(الف): بیشه مقداری را که **F** می‌تواند داشته باشد و هنوز هم تیرک سرپا بماند چقدر است؟

(ب): اگر نیروی **F** در فاصله‌ی٦ ر۰ ارتفاع تیرک از پای آن به تیرک وارد شود، بیشینه مقدار **F** چقدر می‌تواند باشد که هنوز هم تیرک می‌تواند تاب بیاورد و نیفتد؟

(پ): نشان دهید که اگر نقطه‌ی اثر نیرو خیلی بالاتر از سطح زمین باشد، اندازه‌ی **F** هر چه باشد نمی‌تواند تیرک را جابه‌جا کند.

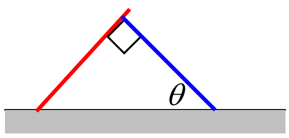
(ت): ارتفاع بحرانی از سطح زمین که اگر نقطه‌ی اثر **F** بالاتر از آن باشد، نمی‌تواند تیرک را جابه‌جا کند کجاست؟

۱۴-۹ (ریسمان بین دو سطح شیب‌دار): ریسمانی برابر شکل (٥٦-۹) در حالت کشیده بر روی دو سطح شیب‌دار، هردو با شیب θ، در حال سکون است. چگالی جرمی ریسمان یکنواخت است و ضریب اصطکاک بین آن و سطح‌ها $\mu =$ ۱ است. سامانه تقارن راست- چپ دارد. بزرگ‌ترین کسری از طول ریسمان که می تواند با سطح ها در تماس نباشد چیست؟ به ازای چه زاویه‌ی θ این مقدار بیشینه است؟

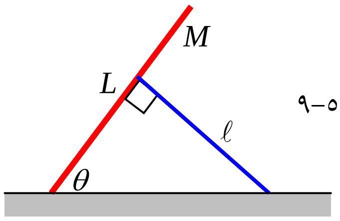


شکل ٥٦-۹

۱۵-۹ (میله‌هایی که به هم تکیه داده‌اند): دو میله با چگالی جرمی یکسان برابر شکل (۵۷-۹) به هم تکیه داده‌اند. زاویه‌ای که این دو میله با هم می سازند $^\circ$۹۰ است. میله‌ی سمت راست با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. میله‌ی سمت چپ به مقدار ناچیزی پس از نقطه‌ی تماس با لبه‌ی میله‌ی سمت راست، ادامه دارد. ضریب اصطکاک بین دو میله μ است. انتهای دیگر هر دو میله روی زمین‌اند. زاویه‌ی θ چقدر باید باشد تا میله‌ها نیفتند ؟



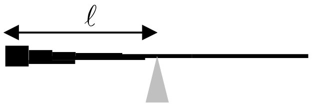
شکل ۵۷-۹



شکل ۵۸-۹

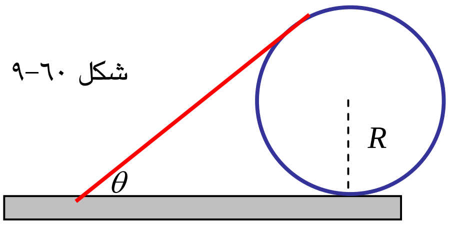
۱۶-۹ (نگه داشتن نردبان): نردبانی به طول L و جرم M به میله‌ی بدون جرمی با طول ℓ تکیه دارد. میله و نردبان هردو از یک انتها روی زمین‌اند. زاویه‌ی بین میله و نردبان 90° است. زاویه‌ی نردبان با زمین افقی θ است (شکل ۵۸-۹) . چه نیرویی از سوی میله به نردبان وارد می شود؟

۱۷-۹ (ترازمندی میله): میله‌ای از یک طرف تا بینهایت ادامه دارد.توزیع جرم این میله چگونه باید باشد تا اگر میله را در جای دلخواهی ببریم، بقیه‌ی آن (که هنوز میله‌ای است که از یک سو تا بینهایت ادامه دارد) روی تکیه‌گاهی که در فاصله‌ی ℓ از انتهای میله است، ترازمند باشد. شکل (۵۹-۹) را ببینید.



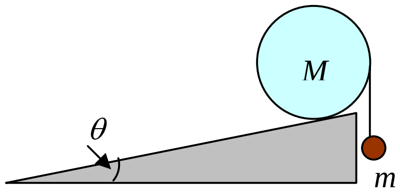
شکل ۵۹-۹

۱۸-۹ (میله و حلقه): میله‌ای با چگالی جرمی ρ برابر شکل (۶۰-۹) به حلقه‌ای با شعاع R تکیه دارد و با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. میله در جایی که به حلقه تکیه می کند برحلقه مماس است. همه‌ی نقاط تماس سامانه دارای اصطکاک است. فرض کنید اصطکاکها به اندازه‌ای بزرگ‌اند که سامانه را در حال سکون نگه می‌دارند. اصطکاک بین زمین و حلقه را بیابید.



شکل ۶۰-۹

۱۹-۹ (استوانه و جرم آویزان): استوانه‌ی همگنی به جرم M روی سطح شیب‌دار ثابتی با شیب θ قرار دارد. به سمت راست استوانه ریسمانی بسته شده است و از آن جرم m برابر شکل (۶۱-۹) آویزان است. اگر اصطکاک بین استوانه و سطح به اندازه‌ای بزرگ باشد که از لغزین استوانه جلوگیری کند، m را برحسب M و θ چنان بیابید که سامانه ایستا بماند.

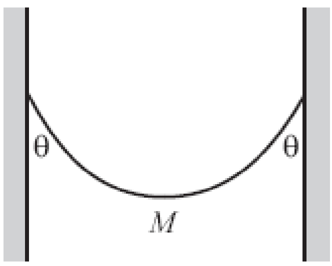


شکل ۶۱-۹

۲۰-۹ (رنجیر آویزان) : دو انتهای زنجیری به جرم M از یک سطح بین دو دیوار آویزان است. زنجیر برابر شکل (۶۲-۹) با هر یک از دیوارها زاویه‌ی θ می‌سازد. کشش زنجیر را در پایین‌ترین نقطه‌ی آن بیابید. مسئله را به دو روش حل کنید.

(الف): نیروهای وارد به نیمی از رنجیر را در نظر بگیرید (این روش زودتر به نتیجه می‌رسد).

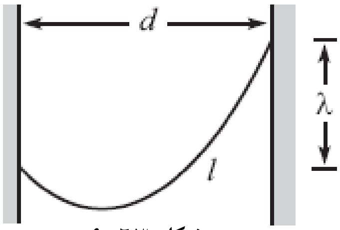
(ب): به یاد بیاورید که ارتفاع زنجیر $y(x)=C\cosh(x/C)$ است و از آن استفاده کنید و نیروی عمودی وارد به جزء بسیار کوچک واقع در پایین زنجیر را در نظر بگیرید. این روش کشش را برحسب C به دست می‌دهد. سپس رابطه‌ای برای C برحسب زاویه‌ی θ بیابید.



شکل ۶۲-۹

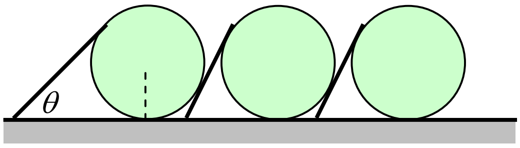
۲۱-۹ (رنجیر آویزان از دو نقطه‌ی ناهم‌سطح): **(الف)** زنجیری با چگالی جرمی یکنواخت از دو انتها به دو دیوار وصل است. معادله‌ی عمومی شکل زنجیر را پیدا کنید. به غیر از یک ثابت انتگرال‌گیری، در پاسخ شما که شکل زنجیر را توصیف می‌کند، باید یک ثابت ناشناخته وجود داشته باشد.

(ب): ثابت ناشناخته در پاسخ بخش (الف) به فاصله‌ی افقی، d ، دو دیوار و اختلاف سطح نقطه‌های اتصال و طول زنجیر بستگی دارد (شکل۶۳-۹). رابطه‌ای را پیدا کنید که این کمیت ها ثابت ناشناخته را بتوان از آن به دست آورد.



شکل ۹-۶۳

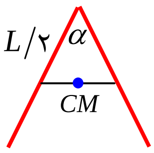
۹-۲۲ (میله ها وحلقه هایی که به هم تکیه داده اند): تعداد زیادی میله (هر یک با چگالی ρ) و حلقه (هر یک به شعاع R) برابر شکل (۹-۶۴) به هم تکیه داده اند. زاویه‌ی هر میله با افق θ است. انتهای بالایی هر میله به حلقه‌ی سمت راست خود مماس است. انتهای پایین میله‌ها به زمین وصل‌اند و هر سطح دیگر بدون اصطکاک است(بین میله و حلقه اصطکاک وجود ندارد.) برای حالتی که تعداد حلقه‌ها و میله‌ها خیلی زیاد است، نیروی عمودی بین یک میله و حلقه‌ی سمت راست آن را که میله تکیه کرده است چقدر است؟ فرض کنید آخرین حلقه به دیوار تکیه دارد.



شکل ۹-۶۴

حل مثال‌های تکمیلی

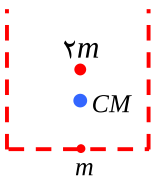
ت-۱ برای همه‌ی حالت‌ها از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر میله‌ی همگن به طول L را می‌توان به صورت جرم نقطه‌ی واقع در مرکز میله پنداشت.



شکل ۹-۶۵ الف

(الف): مرکزجرم در وسط خطی است که مرکز دو میله را به هم وصل می‌کند و در فاصله‌ی $(L/2)\cos(\alpha/2)$ از راس قرار دارد. شکل (۹-۶۵ الف).

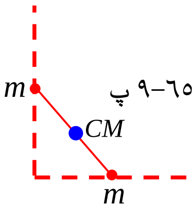
آزمون درستی پاسخ: $\alpha=0 \Rightarrow L/2$ ، $\alpha=90^\circ \Rightarrow L/2\sqrt{2}$ (حالت (پ)) و $\alpha=180^\circ \Rightarrow 0$ که همگی پذیرفتنی‌اند.



شکل ۹-۶۵ ب

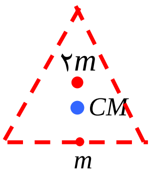
(ب): دو میله‌ی عمودی همانند جرم $2m$ است که در وسط قرار دارد، شکل (۹-۶۵ ب) . بنابراین، مرکزجرم بین وسط میله‌ی افقی و در فاصله‌ی $2/3$ از آن قرار دارد. به بیان دیگر در فاصله‌ی $L/3$ از میله‌ی افقی و درست بالای وسط آن.

(پ): مرکزجرم در وسط خطی است که وسط دو میله را به هم وصل می‌کند شکل (۹-۶۵ پ).



شکل ۹-۶۵ پ

(ت): مرکزجرم دو ضلع جانبی همانند حالت (الف) در وسط خطی ایت که وسط آنها را به هم می‌پیوندد. در ایت نقطه جرم $2m$ قرار دارد. مرکزجرم ضلع افی در وسط آن است و جرم m در این نقطه است. بنابراین، مرکز جرم روی ارتفاع مثلث و به فاصله‌ی $(1/3)\left(\sqrt{3}/2\right)L$ از وسط ضلع افقی است ، شکل (۹-۶۵ ت)



شکل ۹-۶۵ ت

ت-۲ نیروها را به مولفه‌هایشان در راستای سطح و عمود بر آن تجزیه کنید. فرض کنید F_f مثبت در امتداد دیوار رو به بالا باشد. نیروهایی که موازی و عمود بر دیوارند، عبارت اند از

$$F_f = Mg\sin\beta + Mg\cos\beta \quad , \quad N = Mg\sin\beta - Mg\cos\beta \qquad (۹-۱۰۹)$$

N باید مثبت باشد (نمی تواند منفی باشد و اگر $N=0$ باشد قطعه دیوار را ترک می‌کند)، بنابراین، دیده می‌شود که اگر قرار است این آرایش ایستا باشد، β باید بیش‌تر از 45° باشد. ضریب اصطکاک μ می‌گوید که $|F_f|\le \mu N$ است و با استفاده از رابطه‌ی (۹-۱۰۹) این نابرابری به صورت زیر در می‌آید

$$Mg\left(\sin\beta+\cos\beta\right)\le \mu Mg\left(\sin\beta-\cos\beta\right)\ \Rightarrow\ \frac{\mu+1}{\mu-1}\le\tan\beta \tag{۹-۱۱۰}$$

برای این که زاویه‌ی β وجود داشته باشد و این نابرابری برقرار باشد، باید $\mu>1$ باشد. اگر $\mu\to\infty$ برود β می‌تواند تا 45° کاهش پیدا کند اما کم‌تر از آن نمی‌تواند باشد.

ت-۳ نیروی اصطکاک بین قیف و هر انگشت را F بنامید. مولفه‌ی نیروها در راستای قائم F_y باید صفر باشد. به بیان دیگر داریم $2F\cos\theta-2N\sin\theta-mg=0$. همچنین داریم $F\le\mu N$. پس

$$2\mu N\cos\theta-2N\sin\theta-mg>0\ \Rightarrow\ N\ge\frac{mg}{2\left(\mu\cos\theta-\sin\theta\right)} \tag{۹-۱۱۱}$$

این کمینه مقدار نیروی عمودی است. وقتی $\mu=\tan\theta$ باشد $N=\infty$ می‌شود. پس، $\mu=\tan\theta$ کمینه مقدار مجاز μ است.

ت-۴ مولفه‌های خواسته شده را F_x و F_y بنامید. جرم میله‌ی بالایی $\rho\left(L/\cos\theta\right)$ و جرم میله‌ی پایینی ρL است. از صفر بودن گشتاورهای وارد به کل این سامانه نسبت به انتهای چپ میله‌ی افقی داریم

$$F_x\left(L\tan\theta\right)=\rho g\left(\frac{L}{\cos\theta}+L\right)\left(\frac{L}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad F_x=\frac{\rho Lg}{2}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right) \tag{۹-۱۱۲}$$

حال، فقط میله‌ی بالایی را در نظر بگیرید. چون این میله در حال ترازمندی ایستایی است گشتاور کل وارد به آن صفر است. گشتاورها را نسبت به انتهای پایین میله حساب کنید:

$$F_yL=F_x\left(L\cot\theta\right)+\rho g\left(\frac{L}{\cos\theta}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad F_y=\frac{\rho gL}{2}\left(\frac{2+\cos\theta}{\cos\theta}\right) \tag{۹-۱۱۳}$$

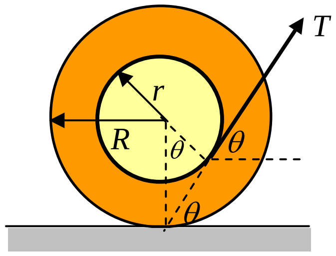
F_x به ازای $\theta\to0$ به بینهایت میل می‌کند و F_y به ازای $\theta\to\pi/2$ بینهایت می‌شود.

نکته: اگر مولفه‌ها را به توان دو برسانیم و باهم جمع کنیم، با استفاده از $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ خواهیم داشت

$$F^2\propto\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\left(2+\cos\theta\right)^2}{\cos^2\theta} \tag{۹-۱۱۴}$$

اگر از این رابطه مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم به دست می‌آید $\cos^3\theta-6\cos\theta+4=0$. یک ریشه‌ی این معادله‌ی درجه سه ۲ است. اگر معادله‌ی بالا را به $\left(\cos\theta-2\right)$ تقسیم کنیم، معادله‌ی درجه ۲ به دست می‌آید که ریشه‌ی پذیرفتنی آن $\cos\theta=-1+\sqrt{3}$ است.

ت-۵ (الف): نیروی اصطکاک بین ماسوره و زمین را F_f بنامید. سامانه در ترازمندی استایی است، بنابراین، از $\sum F_x=0$ داریم $T\cos\theta=F_f$ و از $\sum\mathbf{G}=0$ نسبت به مرکز ماسوره داریم $Tr=F_fR$. از تقسیم این دو رابطه به یکدیگر به دست می‌آید $\cos\theta=r/R$. سادگی این پاسخ نشان دهنده‌ی آن است که روش آسان‌تری برای به دست آوردن آن وجود دارد. در



شکل ۶۶-۹

واقع، از شکل (۶۶-۹) پیداست که $\cos\theta = r/R$ زاویه‌ای است که به ازای آن امتداد خط کشش از نقطه‌ی تماس ماسوره و زمین می‌گذرد. چون گشتاور نیروهای گرانش و اصطکاک نسبت به این نقطه صفر اند، گشتاور کل هم نسبت به آن صفر است و در نتیجه، ماسوره ساکن باقی می‌ماند.

(ب): نیروی عمودی سطح زمین عبارت است از $N = Mg - T\sin\theta$. با استفاده از $T\cos\theta = F_f$ شرط $F_f \le \mu N$ به صورت زیر در می‌آید

$$T\cos\theta \le \mu\left(Mg - T\sin\theta\right) \quad \Rightarrow \quad T \le \frac{\mu Mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \qquad (۹-۱۱۵)$$

که در آن θ عبارت است از $\theta = \cos^{-1}\left(r/R\right)$.

(پ): بیشینه مقدار T از رابطه‌ی (۹-۱۱۵) به دست می‌آید و به θ بستگی دارد. θ هم به r وابسته است. می‌خواهیم r را چنان به دست بیاوریم که T را کمینه کند. اگر از رابطه‌ی (۹-۱۱۵) نسبت به θ مشتق بگیریم در می‌یابیم که به ازای $\tan\theta_\circ = \mu$ مخرج کسر بیشینه می‌شود. مقدار T به ازای $\theta_\circ$ برابر است با

$$T_\circ = \frac{\mu Mg}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (۹-۱۱۶)$$

برای این که r متناظر با آن را به دست آوریم از $\cos\theta = r/R$ استفاده می‌کنیم تا بنویسیم

$$\tan\theta = \sqrt{R^2 - r^2}\Big/r \qquad (۹-۱۱۷)$$

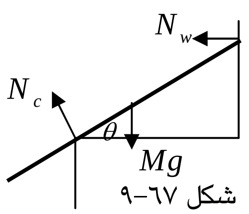
اینک رابطه‌ی $\tan\theta_\circ = \mu$ به پاسخ

$$r_\circ = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (۹-۱۱۸)$$

می‌انجامد. به ازای این مقدار، حد بالای T کمینه مقدار ممکن را خواهد داشت. در حد $\mu = 0$ داریم $\theta_\circ = 0$ ، $T_\circ = 0$ و $r_\circ = R$. حد $\mu = \infty$ منطبق است بر $\theta_\circ = \pi/2$ ، $T_\circ = Mg$ و $r_\circ = 0$.

ت-۶ به گشتاورها حول لولا توجه کنید. چون گرانش به مرکزجرم اثر می‌کند، پس نیروی F که گوه به میله وارد می‌کند باید در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$mg\left(\ell/2\right) = F\left(3\ell/4\right) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2}{3}mg \qquad (۹-۱۱۹)$$



شکل ۶۷-۹

ت-۷ نیروی عمودی سکو را N_c بنامید. از گشتاور نیروها نسبت به انتهای بالایی میله (شکل ۶۷-۹) داریم

$$\sum \mathbf{G} = 0 \;\Rightarrow\; N_c\left(\frac{3L}{4}\right) = Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta \;\Rightarrow\; N_c = \frac{2}{3}Mg\cos\theta \qquad (۹-۱۲۰)$$

اگر نیروی عمودی دیوار را N_w بنامیم از $\sum \mathbf{G} = 0$ نسبت به لبه‌ی سکو به دست می‌آید

$$N_W\left(\frac{3L}{4}\right)\sin\theta = Mg\left(\frac{L}{4}\right)\cos\theta \quad\Rightarrow\quad N_W = \left(\frac{Mg}{3}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{۹-۱۲۱}$$

اگر F_f نیروی اصطکاک لبه‌ی سکو باشد، از $\sum F_x = 0$ داریم

$$F_f\cos\theta = N_c\sin\theta + N_w \quad\Rightarrow\quad F_f = \frac{2}{3}Mg\sin\theta + \frac{1}{3}\frac{Mg}{\sin\theta} \tag{۹-۱۲۲}$$

اما می‌خواهیم $F_f \le \mu N_c$ باشد. پس

$$\frac{2Mg\sin\theta}{3} + \frac{Mg}{3\sin\theta} \le \mu\frac{2Mg\cos\theta}{3} \quad\Rightarrow\quad \mu \ge \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta} \tag{۹-۱۲۳}$$

اگر از این رابطه نسبت به θ مشتق بگیریم تا μ را کمینه کنیم به دست می‌آید $\tan\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$.

فصل ۱۰

حرکت جسم سخت : گشتاور لختی و تکانه‌ی زاویه‌ای

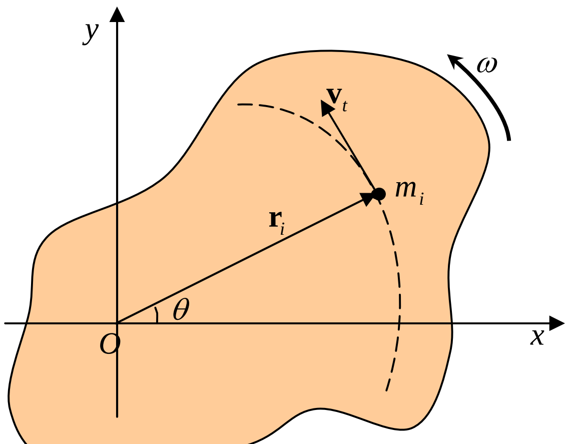
ویژگی اصلی جسم سخت این است که در شرایط معمولی، شکل و اندازه‌ی آن در اثر تنش، کشش و یا تغییر دما و عوامل دیگر بسیار کم تغییر می‌کند. در مورد جسم سخت آرمانی فرض می‌شود که اندازه و شکل آن همواره ثابت می‌ماند. بنابراین، جسم سخت را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

جسم سخت جسمی است که فاصله‌ی میان هر جفت نقطه‌ی آن همواره ثابت می‌ماند.

در این فصل به مکانیک اجسام سخت خواهیم پرداخت. جسم سخت دارای بعد است و حرکتش در اثر نیرو پیچیده‌تر از حرکت جسم نقطه‌ای است. جسم نقطه‌ای در اثر نیرو تنها حرکت انتقالی پیدا می‌کند. اما جسم دارای بعد به غیر از حرکت انتقالی مرکزجرمش، ممکن است حرکت چرخشی حول یک نقطه یا محور داشته باشد. آموزه‌های ما تا کنون به حرکت جرم نقطه‌ای محدود بود. با این آموزه‌ها نمی‌توان حرکت چرخشی یک جسم دارای بعد را بررسی کرد. برای نمونه، یویو را در نظر بگیرید که در راستای ریسمان خود بالا و پائین می‌رود. در اساس می‌دانیم که هر ذره‌ی یویو بر اساس قانون دوم نیوتن حرکت می‌کند، اما بررسی حرکت چرخشی یویو بر اساس حرکت چرخشی کل جسم است. در بررسی حرکت انتقالی به مفاهیم نیرو، تکانه و مرکزجرم نیاز بود. در این فصل از مفهوم‌های گشتاور، تکانه‌ی زاویه‌ای و گشتاور لختی استفاده خواهدشد. هدف ما یافتن شیوه‌ای برای بررسی حرکت عمومی یک جسم سخت تحت تأثیر هر مجموعه‌ی دلخواهی از نیروهاست. این مسئله‌ی عمومی را می توان به دو بخش تقسیم کرد. (۱) یافتن حرکت انتقالی مرکزجرم جسم که پیشتر به آن پرداخته‌ایم. (۲) یافتن حرکت چرخشی حول مرکزجرم که موضوع این فصل است.

۱۰-۱ انرژی جنبشی چرخشی :

در فصل ۱ رابطه‌ی میان کمیت‌های حرکت چرخشی و حرکت خطی یک نقطه را آموختیم. اینک جسمی را برابر شکل (۱-۱۰) در نظر بگیرید که دارای بعد است. فرض کنید این جسم از مجموعه‌ای نقاط کوچک تشکیل شده است. اگر این جسم حول محور ثابت z ها با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، هر ذره‌ی آن مقداری انرژی جنبشی خواهد داشت و با جرم و سرعت آن ذره تعیین می‌شود. ذره i ام با جرم m_i و سرعت v_i در شکل (۱-۱۰) نشان داده شده است. انرژی جنبشی ذره i ام عبارت است از



شکل ۱-۱۰

$$T_i = \frac{۱}{۲} m_i v_i^۲ \qquad (۱-۱۰)$$

سرعت v_i، سرعت مماسی ذره است که براثر حرکت چرخشی جسم به هر ذره‌ی i ام داده می‌شود و مقدار آن برای ذره های مختلف جسم می‌تواند متفاوت باشد. توجه کنید که اگر چه سرعت زاویه ای، ω، همه‌ی ذره‌های جسم سخت با هم برابرند اما سرعت خطی هر ذره به فاصله‌ی r_i آن ذره تا محور چرخش بستگی دارد؛ چون از فصل ۱ می دانیم که $v_i = r_i\omega$. بنابراین، انرژی جنبشی **کل** جسم چرخان باید با جمع انرژی‌های جنبشی تک ذره‌های تشکیل دهنده‌ی آن برابر باشد. پس می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$T=\sum T_i=\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i (r_i\omega)^2 \qquad \Rightarrow \qquad T=\frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2)\,\omega^2 \tag{۱۰-۲}$$

بسامد ω^2 را از زیر علامت جمع بیرون می‌آوریم ، چون این مقدار برای همه‌ی ذره‌ها مشترک است. کمیت درون پرانتز **گشتاور لختی**، I، نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود

$$I=\sum_i m_i r_i^2 \tag{۱۰-۳}$$

پس، می‌توان انرژی جنبشی کل جسم سختی را که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور ثابت z می‌چرخد به صورت زیر نوشت:

$$T\equiv\frac{1}{2}I\,\omega^2 \tag{۱۰-٤}$$

از تعریف گشتاور لختی روشن است که بُعد آن (kg.m^2) ML^2 است. نقش گشتاور لختی I در حرکت چرخشی شبیه نقشی است که جرم m در حرکت خطی به عهده دارد. روشی که در بالا برای به دست آوردن انرژی جنبشی به کار بردیم، چیز تازه‌ای نیست و نباید پنداشته شود که $(1/2)I\omega^2$ نوع جدیدی از انرژی است. با این حال، نوشتن آن به صورت رابطه‌ی (۱۱-٤) در بررسی حرکت‌های چرخشی بسیار مناسب است. بنابراین، گام نخست برای بررسی حرکت چرخشی این است که شیوه‌ی محاسبه‌ی I یک جسم دارای بعد را بیاموزیم. بخش ۲-۱۰ به روش محاسبه‌ی گشتاور لختی جسم سخت با توزیع پیوسته‌ی جرم می‌پردازد. پیش از آن، در دو مثال زیر گشتاور لختی و انرژی جنبشی توزیع گسسته‌ای از ذره‌ها را حساب می‌کنیم.

مثال ۱-۱۰: مولکول دو اتمی اکسیژن، O_2، را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy حول محوری که از مرکز مولکول می‌گذرد و بر آن عمود است، می‌چرخد. فاصله‌ی بین دو اتم اکسیژن در دمای اتاق $1{,}21\times10^{-10}\,\text{m}$ است.

(الف): گشتاور لختی مولکول را حول محور z (محور چرخش) حساب کنید.

(ب): اگر سرعت زاویه‌ای مولکول حول محور z برابر $2\times10^{12}\,\text{rad./sec}$ باشد انرژی جنبشی چرخشی مولکول را بیابید.

حل: **(الف)**: جرم هر اتم اکسیژن $2{,}77\times10^{-26}\,\text{kg}$ است و فاصله‌ی هر اتم تا محور z ها $d/2$ است. پس، گشتاور لختی حول محور z ها عبارت است از

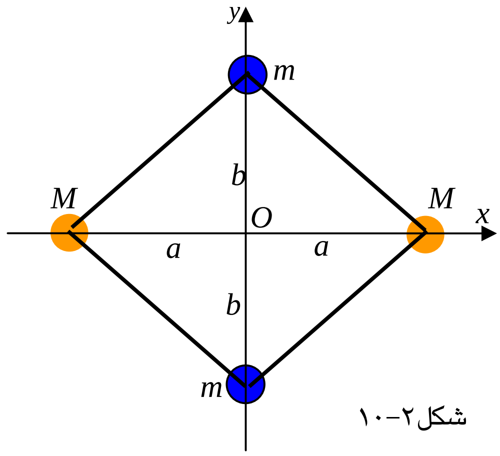
$$I=\sum m_i r_i^2=m\left(\frac{d}{2}\right)^2+m\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{md^2}{2}$$
$$=\left(\frac{2.77\times10^{-26}}{2}\text{kg}\right)\left(1.21\times10^{-10}\,\text{m}\right)^2=2.03\times10^{-46}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \tag{۱۰-۵}$$

(ب):

$$T=\frac{1}{2}I\,\omega^2=\frac{1}{2}\left(2{,}03\times10^{-48}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(2\times10^{12}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2=4.1\times10^{-22}\,\text{J} \tag{۱۰-٦}$$

مثال ۲-۱۰ شکل (۲-۱۰) چهار جرم نقطه‌ای را نشان می‌دهد که در چهار گوشه‌ی یک چارچوب بدون جرم قرار دارد. این مجموعه در صفحه‌ی xy قرار دارد.

(الف): اگر سامانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور y ها بچرخد گشتاور لختی آن را حول محور yها حساب کنید و انرژی جنبشی را به دست آورید .



شکل۲−۱۰

(ب): اینک فرض کنید سامانه در صفحه‌ی xy حول محور z ها که از مرکز O می گذرد می گردد. گشتاور لختی را حول محور z ها حساب کنید و انرژی جنبشی این چرخش را به دست آورید.

حل: **(الف)**: توجه کنید که جرم‌های m روی محور y قرار دارند و فاصله‌ی r_i آنها تا محور چرخش صفر است بنابراین سهمی در I_y ندارند. با استفاده از رابطه‌ی (۳−۱۰) داریم:

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2 \qquad (۱۰−۷)$$

بنابراین، انرژی جنبشی چرخشی این حرکت عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2 \qquad (۱۰−۸)$$

(ب): چون r_i در رابطه‌ی (۳−۱۰) **فاصله ی عمودی** جرم تا محور چرخش است، بنابراین داریم:

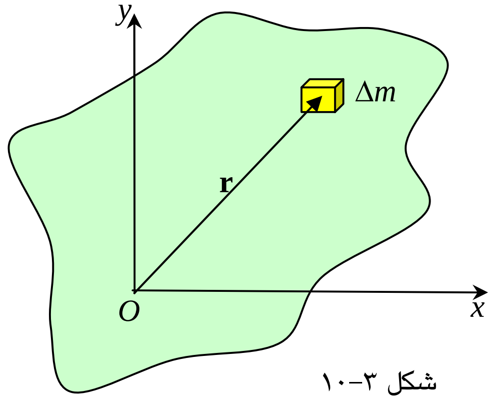
$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2 \qquad (۱۰−۹)$$

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2 \qquad (۱۰−۱۰)$$

از مقایسه‌ی قسمت (الف) و(ب) این مثال دیده می‌شود که برای سرعت زاویه‌ای معینی، گشتاور لختی و در نتیجه انرژی جنبشی چرخشی به محور چرخش بستگی دارند. در قسمت (ب) محاسبه، هر چهار جرم را شامل شد، چون هر چهار جرم نسبت به محور z حرکت می‌کردند. در قسمت (الف) دوجرم m نسبت به محور y حرکت نمی‌کردند و از این رو انرژی جنبشی در قسمت (الف) کوچکتر از قسمت (ب) بود. یعنی چرخاندن این سامانه حول محور y ها آسان‌تر از (به کار کمتری نیاز دارد) چرخاندن آن حول محور z هاست.

۱۰−۲ محاسبه‌ی گشتاور لختی جسم سخت

فرض کنید جرم جسم سخت شکل (۳−۱۰) در حجم آن توزیع شده است. اگر Δm جرم موجود در جزء حجم باشد، می‌توان برای یافتن گشتاور لختی از رابطه‌ی (۳−۱۱) استفاده کرد. در این صورت خواهیم داشت $I = \sum r^2 \Delta m$. چون توزیع جرم پیوسته است، می‌توان Δm را به سمت صفر میل داد. در حد $\Delta m \to 0$ علامت جمع به علامت انتگرال تبدیل می‌شود. چون جرم در تمام حجم جسم توزیع شده است، بنابراین انتگرال‌گیری هم بر روی تمام جسم باید انجام گیرد. توجه کنید که r فاصله عمودی جزء جرم Δm تا محورچرخش است. فرض کنید جسم شکل (۳−۱۰) حول محور z می‌چرخد. پس، خواهیم داشت



شکل ۳−۱۰

$$I = \ell im_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \Delta m = \int r^2 dm \qquad (۱۰−۱۱)$$

برای این که بتوان از رابطه‌ی (۱۱−۱۰) استفاده و گشتاور لختی را حساب کرد، لازم است که dm بر حسب مختصات بیان شود. برای این کار **چگالی جرمی** یا **جرم در واحد حجم** یک جسم سه بعدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho = \ell im_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dv \qquad (۱۰-۱۲)$$

که در آن dv جزء حجم است. اگر جرم در دو بعد توزیع شود، جزء جرم $dm = \sigma\, da$ است که در آن σ چگالی سطحی جرم یا جرم در واحد سطح و da جزء سطح است. جزء جرم برای توزیع خطی جرم $dm = \lambda\, dl$ است و λ چگالی خطی جرم یا جرم در واحد طول و dl جزء طول است. پس، گشتاور لختی یک جسم سه بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I = \int \rho r^2 dv \qquad (۱۰-۱۳)$$

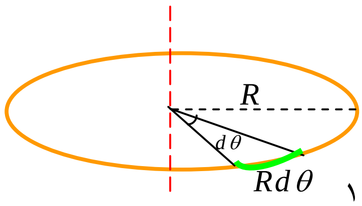
و برای جسم دو بعدی و یک بعدی خواهیم داشت:

$$I = \int \sigma r^2 da \quad , \quad I = \int \lambda r^2 dl \qquad (۱۰-۱٤)$$

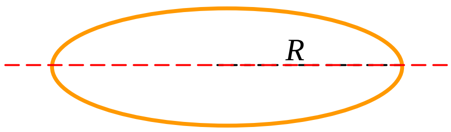
توجه کنید که انتگرال‌گیری روی تمام جسم (یعنی همه جا که جرم توزیع شده است) است.

نکته: وقتی از گشتاور لختی سخن گفته می‌شود، باید روشن شود که گشتاور لختی نسبت به چه نقطه یا محوری است. ♣ اینک می‌توان گشتاور لختی اجسام گوناگون را حول محور معینی حساب کرد. در مثال‌هایی که برای نشان دادن روش محاسبه برگزیده‌ایم (و تعداد زیادی از آن ها) فرض خواهیم کرد که چگالی جرم در همه جای جسم یکنواخت است. این فرض از عمومیت روش محاسبه نمی‌کاهد. اگر چگالی جرم یکنواخت نباشد، تابعی از مختصات خواهد شد. در این صورت هنوز هم روش محاسبه همان است، فقط انتگرال‌ها پیچیده‌تر خواهند شد. اگر شکل جسمی را که می‌خواهیم گشتاورلختی‌اش را حساب کنیم پیچیده باشد، همواره خوب است که آن را به قطعه‌هایی بُرش دهیم که I آن قطعه‌ها را می‌دانیم. در این صورت مسئله به انتگرال‌گیری روی I ها کاهش می‌یابد. معمولا بیش از یک راه برای برش دادن جسم وجود دارد. برای مثال، کره را می‌توان به صورت پوسته‌های تودرتوی متمرکز پنداشت یا آن را مجموعه‌ای از قرص‌هایی فرض کرد که بر روی هم چیده شده‌اند.

مثال ۳-۱۰ محاسبه‌ی گشتاور لختی حلقه‌ای به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحه‌ی حلقه عمود است (شکل ٤-۱۰):



شکل ٤-۱۰



شکل ۵-۱۰

حل: جزء جرم روی پیرامون حلقه عبارت است از $dm = \lambda R d\theta$. بنابراین:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 (\lambda R d\theta) = (2\pi R\lambda) R^2 = \boxed{MR^2} \qquad (۱۰-۱۵)$$

توجه کنید که گشتاور لختی استوانه‌ی همگن تو خالی هم حول محورش همین مقدار خواهد بود.

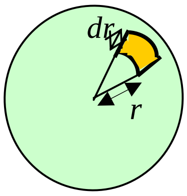
مثال ۴-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی حلقه‌ای به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و در صفحه‌ی حلقه قرار دارد (شکل ۵-۱۰)

حل: جزء جرم مانند مثال ۳-۱۰ است. اما حالا فاصله‌ی جزء جرم تا محور چرخش $R \sin\theta$ است. پس

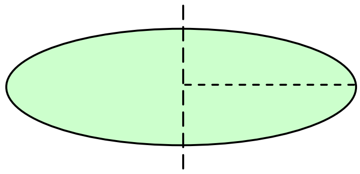
$$I=\int r^2 dm=\int_0^{2\pi}(R\sin\theta)^2(\lambda R d\theta)=\frac{1}{2}(2\pi R\lambda)R^2=\boxed{\frac{1}{2}MR^2}$$ (۱۰–۱٦)

در این جا از $\sin^2\theta=(1-\cos2\theta)/2$ استفاده کردیم.

مثال ۵–۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی قرصی به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحه‌ی قرص عمود است (شکل ٦–۱۰)



شکل ۷–۱۰

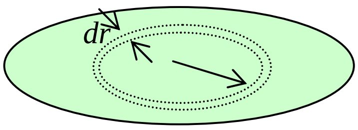


شکل ٦–۱۰

حل ۱: جزء دلخواه سطح را برابر شکل (۷–۱۰) انتخاب کنید. مساحت این جزء سطح $dA=rdr\,d\theta$ است. بنابراین، جرم آن $dm=\sigma dA=\sigma rdr\,d\theta$ است. در نتیجه

$$I=\int r^2 dm=\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2(\sigma rdrd\theta)=\left(R^4/4\right)2\pi\sigma=\frac{1}{2}(\sigma\pi R^2)R^2=\boxed{\frac{1}{2}MR^2}$$ (۱۰–۱۷)

حل ۲: اگر قرص را مانند شکل (۸–۱۰) مجموعه‌ای از حلقه‌های تودرتو به شعاع r و با ضخامت dr در نظر بگیرید، می‌توانید از نتیجه‌ی مثال ۳–۱۰ استفاده کنید و در یک انتگرال‌گیری (بدیهی) صرفه جویی کنید. جرم هر حلقه $dm=\sigma 2\pi rdr$ است. حال اگر روی حلقه ها انتگرال بگیرید به دست می‌آید



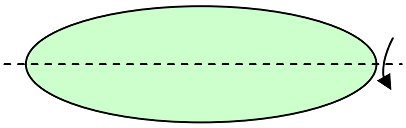
شکل ۸–۱۰

$$I=\int r^2 dm=\int_0^R(\sigma 2\pi r\,dr)r^2=\pi\sigma R^4/2=\boxed{MR^2/2}$$

که همان نتیجه‌ی حل ۱ است. در این مثال برش دادن جسم چندان اهمیتی ندارد اما برای اجسام پیچیده می‌تواند از دردسرها بکاهد.

مثال ۶–۱۰ : محاسبه‌ی گشتاور لختی قرصی به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و در صفحه‌ی قرص قرار دارد (شکل ۹–۱۰).

حل: قرص را به حلقه‌های با شعاع r و ضخامت dr برش دهید و از پاسخ مثال ۵–۱۰ استفاده کنید:



شکل ۹–۱۰

$$I=\int_0^R(1/2)(\sigma 2\pi r\,dr)r^2=\left(R^4/4\right)\sigma\pi$$

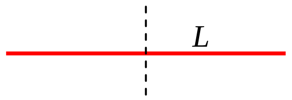
$$=\frac{1}{4}(\sigma\pi R^2)R^2=\boxed{\frac{1}{4}MR^2}$$ (۱۰–۱۸)

مثال ۷–۱۰ محاسبه‌ی گشتاور لختی میله‌ی نازک همگن به جرم M و طول L. محور چرخش عمود بر میله است و از وسط

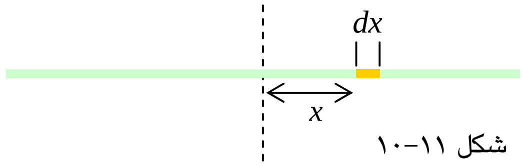
آن می‌گذرد (شکل ۱۰-۱۰).

حل: جزء جرم dm را روی میله همانند شکل (۱۱-۱۰) انتخاب کنید.

داریم $dm=\lambda\, dx$ و $\lambda = M/L$.



شکل ۱۰-۱۰



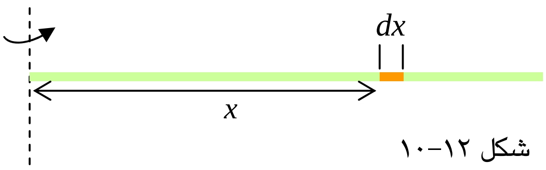
شکل ۱۱-۱۰

$$I=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2\, dm=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 (M/L)\, dx$$

$$=(M/L)\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\, dx=(M/L)\left(x^3/3\right)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \qquad (۱۰-۱۹)$$

$$=\boxed{\frac{1}{12}ML^2}$$

مثال ۸-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی میله‌ی نازک همگن به جرم M و طول L. محور چرخش عمود بر میله است و از انتهای میله می‌گذرد (شکل ۱۲-۱۰):



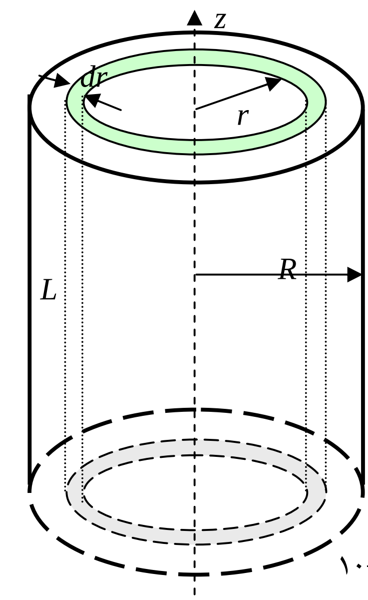
شکل ۱۲-۱۰

حل: این مثال مانند مثال ۷-۱۰ است. فقط حدود انتگرال‌گیری فرق دارد.

با توجه به شکل (۱۲-۱۰) داریم

$$I=\int r^2 dm=\int_0^L x^2\frac{M}{L}dx=\frac{M}{L}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^L=\boxed{\frac{1}{3}ML^2} \qquad (۱۰-۲۰)$$

مثال ۹-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی استوانه‌ی توپر و همگن به جرم m، شعاع R و طول L. محور چرخش، محور استوانه است (شکل ۱۳-۱۰).



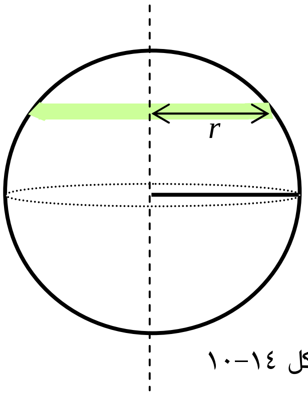
شکل ۱۳-۱۰

حل: در این مسئله بهتر است که استوانه را به پوسته‌های استوانه‌ای به شعاع r و به ضخامت dr و طول L برش داد. یک نمونه را در شکل (۱۳-۱۰) به صورت هاشور خورده می‌بینید. با این برش دادن تمامی جزء جرم dm روی هر استوانه‌ی باریک، فاصله‌ی یکسانی از محور چرخش، r، دارند. این کار محاسبه را آسان می کند. حجم هر استوانه باریک عبارت است از $dv=da.L=(2\pi r\,dr)L$. اگر چگالی حجمی جرم را ρ بنامیم آنگاه، جرم dm پوسته برابر است با $dm=\rho\, dv=\rho 2\pi r\, Ldr$. بنابراین

$$I_z=\int r^2 dm=2\pi\rho L\int_0^R r^3 dr=\frac{\pi\rho L R^4}{2} \qquad (۱۰-۲۱)$$

چون $\rho=M/V=M/\pi R^2 L$ پس

$$I=\pi\left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right)\frac{LR^4}{2}=\boxed{\frac{1}{2}MR^2} \qquad (۱۰-۲۲)$$



شکل ۱۴-۱۰

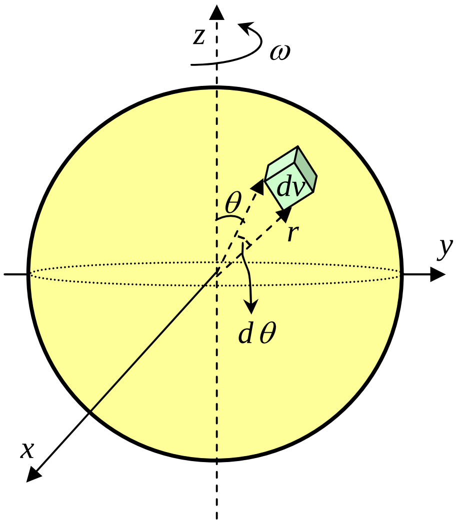
مثال ۱۰-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی پوسته‌ی کروی (کره‌ی تو خالی) شکل (۱۴-۱۰) با جرم M و شعاع R. محور چرخش قطر کره است.

حل: کره را به باریکه‌های حلقه‌مانند افقی برش بدهید، مانند یک روبان باریک. شعاع هر حلقه در مختصات کروی $r = R\sin\theta$ است. زاویه‌ی θ از قطب شمال کره به قطب جنوب افزایش می‌یابد. پهنای هر حلقه $Rd\theta$ و مساحت آن $2\pi(R\sin\theta)Rd\theta$ است. از قاعده‌ی $\int \sin^3\theta d\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = -\cos\theta + \cos^3\theta/3$ استفاده کنید. خواهیم داشت

$$I = \int r^2 dm = \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 2\pi\sigma(R\sin\theta)Rd\theta = 2\pi\sigma R^4 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$
$$= 2\pi\sigma R^4 (4/3) = \frac{2}{3}(4\pi R^2\sigma)R^2 = \boxed{\frac{2}{3}MR^2} \qquad (10-23)$$

مثال ۱۱-۱۰ محاسبه‌ی گشتاور لختی کره‌ی توپرهمگن با جرم M و شعاع R. محور چرخش قطر کره است.

حل ۱: این مسئله را نخست با روش عمومی حل می‌کنیم. در مختصات کروی جزء حجم dv را برابر شکل (۱۵-۱۰) در نظر بگیرید. داریم $dv = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$. جزء جرم مربوط به این حجم جزیی $dm = \rho dv = \rho r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\varphi$ است. و فاصله عمودی آن از محور چرخش برابر است با $r\sin\theta$. بنابراین،



شکل ۱۵-۱۰

$$I = \int (r\sin\theta)^2 dm$$
$$= \int (r^2\sin^2\theta)(\rho r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr) \qquad (10-24)$$

انتگرال گیری روی $d\phi$ برابر است با 2π. با استفاده از دستور

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx \qquad (10-25)$$

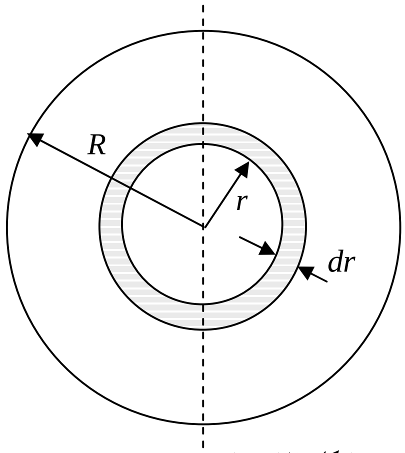
می توان انتگرال $\sin^3\theta d\theta$ را ازصفر تا π حساب کرد.

$$\int \sin^3\theta d\theta = -\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{3}\Bigg|_0^\pi + \frac{2}{3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta$$
$$= 0 + \frac{2}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{4}{3} \qquad (10-26)$$

و سرانجام این که

$$I_z = (2\pi)\rho(4/3)\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho}{3}\frac{2}{5}R^5 = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)\frac{2}{5}R^2 = \boxed{\frac{2}{5}MR^2} \qquad (10-27)$$

حل ۲: کره‌ی تو پر را می‌توان مجموعه‌ای از پوسته‌های کروی نازک هم‌مرکز با ضخامت dr در نظر گرفت. یکی از این



شکل ۱۰-۱۶

پوسته‌های کروی در شکل (۱۰-۱۶) دیده می‌شود. چگالی جرم سطحی متناظر آن $\sigma = \rho dr$ است (چرا؟). از مثال ۱۰-۱۰ می‌دانیم که گشتاور لختی، dI ، پوسته‌ی نازک کروی به جرم dm حول قطر آن عبارت است از

$$dI = (2/3) r^2 dM = (2/3) r^2 (4\pi r^2 \rho dr)$$

$$\Rightarrow dI = (8/3)\pi r^4 \rho dr \qquad (۱۰-۲۸)$$

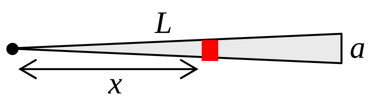
پس گشتاور کل کره‌ی توپر را می توان با انتگرال گرفتن از گشتاور لختی پوسته‌ی کروی به صورت زیر به دست آورد

$$I = \int dI = \frac{8}{3}\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}(\frac{4}{3}\pi\rho R^3)R^2$$

$$\Rightarrow I = \boxed{\frac{2}{5}MR^2} \qquad (۱۰-۲۹)$$

که همان پاسخ قبلی است.

مثال ۱۰-۱۲ محاسبه‌ی گشتاور لختی مثلث بسیار باریک شکل (۱۰-۱۷) به جرم M و طول L. محور چرخش از راس می‌گذرد و بر صفحه‌ی مثلث عمود است.



شکل ۱۰-۱۷

حل: قاعده‌ی مثلث را a بنامید وفرض کنید که a بسیار کوچک است. طول برشی در فاصله‌ی x از راس مثلث برابر $a(x/L)$ است. اگر پهنای این برش dx باشد، می‌توان آن را همانند جرم نقطه‌ای با جزء جرم $dm = \sigma a x\, dx/L$ پنداشت. بنابراین،

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \sigma a (x/L) dx = \frac{1}{2}(\sigma a L/2)L^2 = \boxed{\frac{1}{2}ML^2} \qquad (۱۰-۳۰)$$

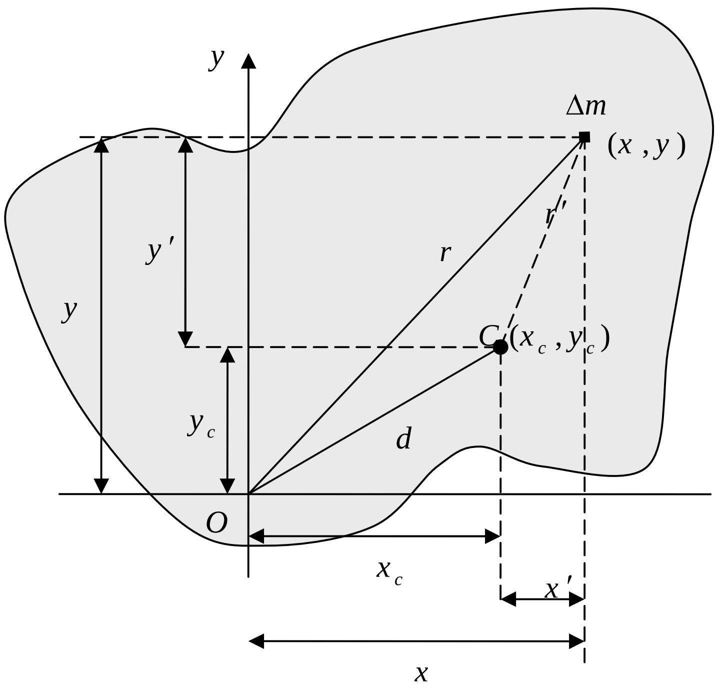
چون مساحت مثلث $aL/2$ است. گشتاور لختی این باریکه مثلث همانند گشتاور لختی قرص مثال ۱۰-۵ است؛ چون قرص از همین باریکه‌های مثلثی شکل ساخته می‌شود.

۱۰-۳ قضیه‌ی محورهای موازی

در مثال‌های بالا توانستیم گشتاور لختی اجسام با هندسه‌ی ساده (دارای تقارن) را به آسانی حساب کنیم. در این مثال‌ها محور تقارن و محور چرخش بر هم منطبق بودند. اگر محور تقارن جسم و محور چرخش یکی نباشند، محاسبه‌ی گشتاور لختی می‌تواند بسیار دشوار باشد. در مثال‌های بالا، به جز مثال ۱۰-۱۲، محور چرخش از مرکز جرم می‌گذشت. در مثال کره اگر محور چرخش از مرکز جرم آن نمی‌گذشت، با وجود تقارن کره، این محاسبه پیچیده می‌شد. خوشبختانه، قضیه‌ی مهمی وجود دارد که اجازه می‌دهد با دانستن گشتاور لختی حول محور گذرنده از مرکزجرم، بتوان گشتاور لختی حول هر محور دیگر موازی با محور گذرنده از مرکزجرم را هم حساب کنیم. این قضیه با نام **قضیه محورهای موازی** شناخته می‌شود. فرض کنید گشتاور لختی جسمی حول محوری که از مرکزجرم آن می‌گذرد I_C باشد؛ قضیه‌ی محورهای موازی می‌گوید گشتاور لختی جسم حول محوری که با محور گذرنده از مرکزجرم موازی و به فاصله‌ی d از آن است، برابر است با

$$I = I_C + Md^2 \qquad (۱۰-۳۱)$$

اثبات: فرض کنید جسم شکل (۱۸-۱۰) در صفحه‌ی xy قرار دارد و حول محوری می‌چرخد که از O می‌گذرد. مختصات مرکز جرم C را با x_c و y_c نشان بدهید. جزء جرم Δm را در مکان $(x\,,y)$ نسبت به O در نظر بگیرید. این جزء جرم در فاصله‌ی $r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ از محور چرخش (z) قرار دارد. محور z بر صفحه‌ی جسم عمود است و از O می‌گذرد. گشتاور لختی حول محور چرخش z عبارت است از: $I=\int r^{۲}\,dm=\int(x^{۲}+y^{۲})dm$. اما می‌توان مختصات $(x\,,y)$ جزء جرم را به مختصات $(x_c\,,y_c)$ مرکزجرم و مختصات (x',y') جزء جرم Δm نسبت به مرکزجرم مربوط کرد. در واقع داریم $x=x'+x_c$ و $y=y'+y_c$. بنابراین



شکل ۱۸-۱۰

$$I=\int\left[(x'+x_c)^{۲}+(y'+y_c)^{۲}\right]dm$$
$$=\int\left[(x')^{۲}+(y')^{۲}\right]dm+۲x_c\int x'dm+۲y_c\int y'dm+\int(x_c^{۲}+y_c^{۲})dm \qquad (۱۰-۳۲)$$
$$\int r'^{۲}dm+۲x_c\int x'dm+۲y_c\int y'dm+\int(x_c^{۲}+y_c^{۲})dm$$

جمله‌ی نخست، بنا به تعریف، گشتاور لختی حول محوری است که از مرکزجرم می‌گذرد و با z موازی است. جمله‌های دوم و سوم صفر اند، چون، بنا به تعریف مرکز جرم، $\int x'dm=\int y'dm=۰$ (یعنی y',x' مختصات جزء جرم نسبت به مرکزجرم اند. رابطه‌ی (۵-۹) را ببینید). سرانجام، جمله‌ی چهارم که همان $Md^{۲}$ است؛ چون $\int dm\equiv M$ و $d^{۲}\equiv x_c^{۲}+y_c^{۲}$ است. پس نتیجه می‌گیریم:

$$I_z=I_C+Md^{۲} \qquad (۱۰-۳۳)$$

این قضیه می‌گوید، اگر گشتاور لختی را حول محوری که از مرکزجرم جسم می‌گذرد،(I_C) ، بدانیم آنگاه اگر بخواهیم گشتاور لختی جسم را حول هر محور موازی با این محور حساب کنیم کافی است مقدار $Md^{۲}$ را با I_C جمع کنیم.

اگرچه این قضیه برای جسم تخت اثبات شد، اما برای هر جسمسه بعدی هم درست است.

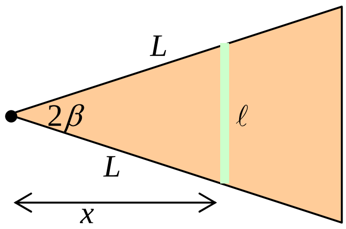
مثال ۱۰-۱۳ درستی قضیه‌ی محورهای موازی را در باره‌ی میله‌ی یکنواخت به جرم M و طول L مثال‌های ۱۰-۷ و ۱۰-۸ بیازمایید.

حل: در مثال ۱۰-۷ دیدیم که گشتاور لختی میله نسبت به محوری که از مرکزجرم آن می گذرد $I_C = ML^2/12$ است. همین میله در مثال ۱۰-۸ وقتی حول محور گذرنده از یک انتهایش می‌چرخید، گشتاور لختی آن $I_{end} = ML^2/3$ بود. محور گذرنده از انتهای میله در فاصله‌ی $L/2$ از محور گذرنده از مرکزجرم میله است، یعنی $d = L/2$. بنابه قضیه‌ی محورهای موازی داریم

$$I_{end} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(L/2\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (۱۰-۳۴)$$

که همان پاسخ مثال ۱۰-۸ است.

مثال ۱۰-۱۴ گشتاور لختی مثلث متساوی الساقین شکل (۱۰-۱۹) با جرم M و طول ساق L و زاویه‌ی راس 2β را نسبت به محوری که از راس مثلث می گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است، بیابید.



شکل ۱۰-۱۹

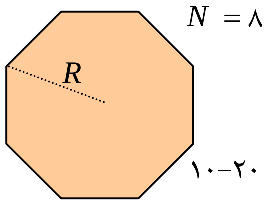
حل: ارتفاع مثلث را h بنامید: $h = L\cos\beta$. مثلث را به نوارهای باریک موازی قاعده برش دهید. فاصله‌ی نوار باریک تا راس را x بنامید. بنابراین، طول نوار باریک برابر $\ell = 2x\tan\beta$ و جرمش $dm = \sigma(2x\tan\beta\, dx)$ می شود. dx پهنای نوار باریک است. این نوار همانند میله‌ی همگن مثال ۱۰-۷ است و گشتاور لختی آن نسبت به محوری که از مرکزش می‌گذرد $\left(\ell^2/12\right)dm$ است. با استفاده از این مثال و قضیه‌ی محورهای موازی می توان نوشت

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h dm\left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) = \int_0^h (\sigma 2x\tan\beta\, dx)\left(\frac{(2x\tan\beta)^2}{12} + x^2\right) \\ &= \int_0^h 2\sigma\tan\beta\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right)x^3 dx = 2\sigma\tan\beta\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right)\frac{h^4}{4} \end{aligned} \qquad (۱۰-۳۵)$$

چون مساحت کل مثلث $h^2\tan\beta$ است، پس

$$I = \left(\frac{Mh^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right) = \left(\frac{ML^2}{2}\right)\left(\cos^2\beta + \frac{\sin^2\beta}{3}\right) = \boxed{\frac{ML^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\beta\right)} \qquad (۱۰-۳۶)$$

مثال ۱۰-۱۵ گشتاور لختی N ضلعی منتظمی را بیابید که جرمش M و فاصله‌ی مرکز تا راس آن R است. N ضلعی حول محوری که از مرکز می‌گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است، می‌چرخد. در شکل (۱۰-۲۰) یک هشت ضلعی نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۲۰

حل: N ضلعی منتظم از N مثلث متساوی الساقین تشکیل شده است. پس می‌توان از مثال ۱۰-۱۴ با $\beta = \pi/N$ استفاده کرد. جرم مثلث‌ها با هم جمع می‌شوند و جرم کل M چند ضلعی را می‌سازند. بنابراین داریم

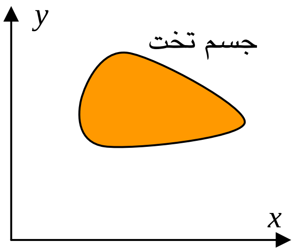
$$I = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\pi/N\right) \qquad (۱۰-۳۷)$$

برای چند مقدار N مقدارهای I با کوتاه نوشت $(N\ ,\ I/MR^{۲})$ به قرار زیر اند

$$(۳,\ ۱/۴)\ ,\ (۴,\ ۱/۳)\ ,\ (۶,\ ۵/۱۲)\ ,\ (\infty,\ ۱/۲)$$

۱۰-۴ قضیه ی محورهای متعامد

این قضیه **فقط** برای اجسام تخت درست است. جسم تخت شکل (۱۰-۲۱) را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد. اگر I_x و I_y به ترتیب گشتاورهای لختی جسم حول محورهای x و y باشند، آنگاه، بنا به قضیه‌ی محورهای متعامد داریم



شکل ۱۰-۲۱

$$I_z = I_x + I_y \qquad (۱۰-۳۸)$$

اثبات: اثبات این قضیه ساده است. نخست به تعریف‌های I_x و I_y و I_z توجه کنید :

$$I_x \equiv \int (y^{۲}+z^{۲})dm\ \ ,\ \ I_y \equiv \int (x^{۲}+z^{۲})dm\ \ ,\ \ I_z \equiv \int (x^{۲}+y^{۲})dm \qquad (۱۰-۳۹)$$

برای اثبات قضیه از این واقعیت استفاده می‌کنیم که برای جسم تخت $z=۰$ است. پس، اگر در رابطه‌های (۱۰-۳۹) قرار دهیم $z=۰$ ، دیده می‌شود که $I_z = I_x + I_y$.

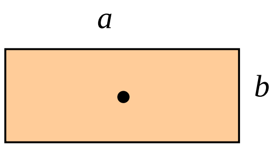
مثال ۱۰-۱۶ **(الف)**: مثال ۱۰-۴ را با استفاده از قضیه‌ی محورهای متعامد حل کنید.

(ب) : مثال ۱۰-۶ را با استفاده از قضیه‌ی محورهای متعامد حل کنید.

حل: **(الف)**: حلقه جسمی متقارن است و بنا به تقارن $I_x = I_y$. پس، براساس رابطه‌ی (۱۰-۳۸) داریم $I_z = ۲I_x \Rightarrow I_x = I_z/۲$. اما از مثال ۱۰-۳ می‌دانیم که $I_z = MR^{۲}$. بنابراین $I_x = MR^{۲}/۲$.

(ب): در اینجا هم قرص تقارن دارد و در نتیجه $I_x = I_y$ است. بنا به قضیه‌ی محورهای متعامد داریم $I_z = ۲I_x \Rightarrow I_x = I_z/۲$. اما از مثال ۱۰-۵ می‌دانیم $I_z = MR^{۲}/۲$ است. پس $I_x = MR^{۲}/۴$.

مثال ۱۰-۱۷ گشتاور لختی مستطیل به جرم M، طول a وپهنای b شکل (۱۰-۲۲) را حول محوری بیابید که از مرکزش می گذرد و بر صفحه‌ی مستطیل عمود است.



شکل ۱۰-۲۲

حل: فرض کنید محور z به صفحه‌ی مستطیل عمود است. می‌دانیم که $I_x = Mb^{۲}/۱۲$ و $I_y = Ma^{۲}/۱۲$ اند (چرا ؟). پس، بنا به قضیه‌ی محورهای متعامد داریم

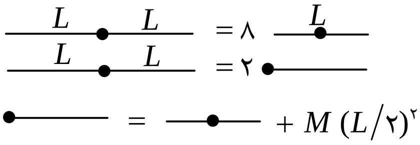
$$I_z = I_x + I_y = \frac{۱}{۱۲}M\,(a^{۲}+b^{۲}) \qquad (۱۰-۴۰)$$

۱۰-۵ شگردی زیبا- روش میان‌بُر

محاسبه‌ی گشتاور لختی برخی اجسام با تقارن را می‌توان بدون هیچ انتگرال‌گیری به دست آورد. کافی است از قضیه‌ی محورهای موازی و تحلیل مقیاس‌بندی استفاده کرد. این روش را با مثال میله (مثال ۱۰-۷) توضیح می‌دهیم و با مثالی دیگر کاربردش را در اجسام برخالی خواهیم دید. در بخش مسئله‌ها کاربردهای دیگرش را خواهید یافت. برای مثال میله، شگرد از این قرار است: گشتاور لختی میله‌ای به طول L را با گشتاور لختی میله‌ی به طول $۲L$ مقایسه کنید. تحلیل مقیاس‌بندی نشان می‌دهد که گشتاور میله‌ی به طول $۲L$ هشت برابر میله‌ی با طول L است. چون در انتگرال $\int x^{۲}dm = \int x^{۲}\lambda dx$ سه توان x

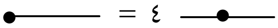
وجود دارد. بنابراین، تغییر متغیر $y=۲x$ به ضریب $۸=۲^{۳}$ می‌انجامد. همچنین، تجسم کنید که میله‌ی کوتاه را به میله‌ی بلند تبدیل کنید. در این صورت، فاصله‌ی هر جزء میله‌ی بلند در مقایسه با جزء متناظر میله‌ی کوتاه از محور چرخش دو برابر می‌شود. جرم نیز دو برابر می‌شود. بنابراین، انتگرال $\int x^{۲}dm$ با ضریب $۸=۲\times ۲^{۲}$ بزرگ می‌شود.

با شکل می‌توان این روش را ساده‌تر نشان داد. گشتاور لختی جسم را با شکل جسم نشان دهید و نقطه‌ی سیاهی را نماینده‌ی محور چرخش بنامید:



(۱۰−٤۱)

سطر اول نتیجه‌ی تحلیل مقیاس‌بندی است. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاورهای لختی با هم جمع می‌شوند (سمت چپ، دو نسخه‌ی سمت راست است که در جایگاه محور چرخش به هم چسبیده اند) و سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطرهای اول و دوم داریم

 (۱۰−٤۲)

اگر این رابطه را برای در سطر سوم رابطه‌ی (۲٦−۱۰) قرار دهیم نتیجه‌ی دلخواه به دست می‌آید

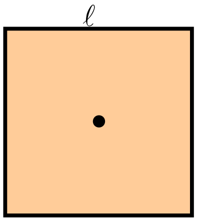
 $=\frac{۱}{۱۲}ML^{۲}$ (۱−٤۳)

در دو مثال زیر با این روش بیشتر آشنا می‌شوید. در مثال ۱۹−۱۰ آن را در مورد جسم برخال به کار می‌بریم که در نگاه نخست یافتن گشتاور لختی آن دشوار می‌نماید.

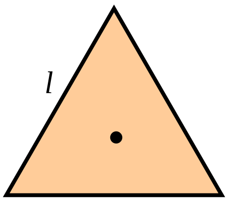
مثال ۱۸−۱۰ با استفاده از راه میان‌بُر گشتاورهای لختی زیر را حساب کنید

(الف): مربع همگن شکل (۲۳−۱۰) به جرم m و به ضلع ℓ. محور چرخش از مرکز مربع می‌گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است.

(ب): مثلث متساوی الاضلاع شکل (۲٤−۱۰) به جرم m و به ضلع ℓ. محور چرخش از مرکز مثلث می‌گذرد و به صفحه‌ی آن عمود است

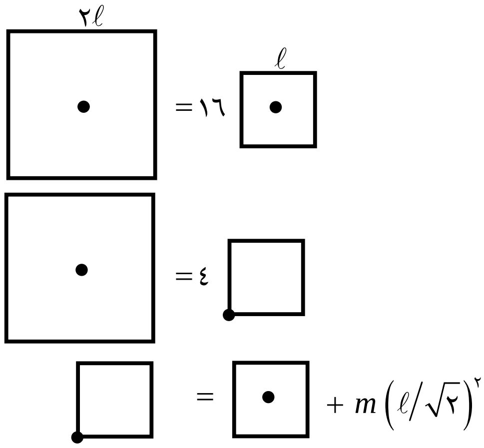


شکل ۲۳−۱۰

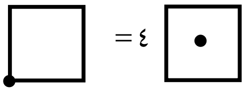


شکل ۲٤−۱۰

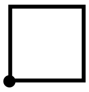
حل: (الف): گشتاور لختی مربعی به ضلع ۲ℓ شانزده برابر گشتاور لختی مربعی با ضلع ℓ است. چون dm با سطح متناب است و سطح نیز با مربع طول ضلع متناسب است. بنابراین، dm های متناظر دو مربع با ضریب ٤ با هم فرق دارند. همچنین در انتگرال گشتاور لختی r با توان دو ظاهر می‌شود. پس، وقتی متغیرها را از یک مربع به مربع دیگری تغییر می‌دهیم درانتگرال $\int r^{2}dm=\int r^{2}\sigma dx\, dy$ چهار توان ۲ ظاهر می شود. اینک **حل تصویری**:



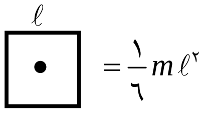
سطر اول از تحلیل مقیاس‌بندی به دست می آید. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاور های لختی باهم جمع می‌شوند. سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطر اول و دوم داریم



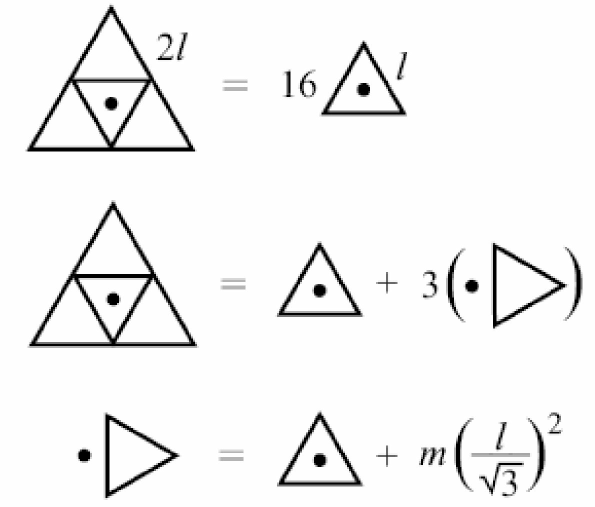
که با قرار دادن آن در سطر سوم وحذف



خواهیم داشت:

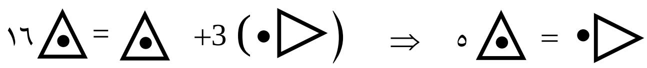


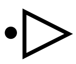
این نتیجه با پاسخ مثال ۱۷–۱۰ به ازای $a = b = \ell$ سازگار است.

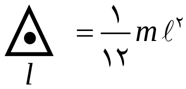


(ب): جسم باز هم دو بعدی است. بنابراین، I مثلثی با ضلع ۲ℓ شانزده برابر I مثلثی به ضلع ℓ است

حل تصویری: سطر اول از تحلیل مقیاس بندی به دست می‌آید. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاورهای لختی باهم جمع می‌شوند. سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطر اول و دوم داریم



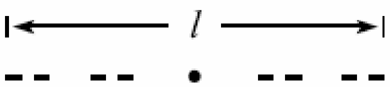
اینک می‌توان  را از سطر سوم حذف کرد. خواهیم داشت



(۱۰–۴٤)

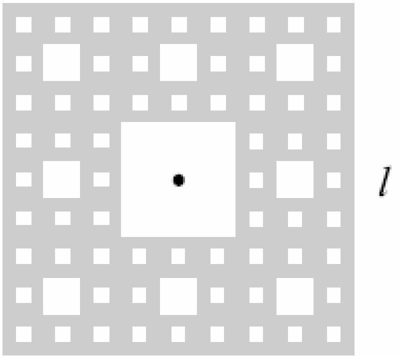
این پاسخ با نتیجه‌ی مثال ۱۵–۱۰ به ازای $N = ۳$ و $"R" = \ell/\sqrt{۳}$ سازگار است.

مثال ۱۹–۱۰ گشتاور لختی اجسام برخال زیر را بیابید



شکل ۲۵–۱۰

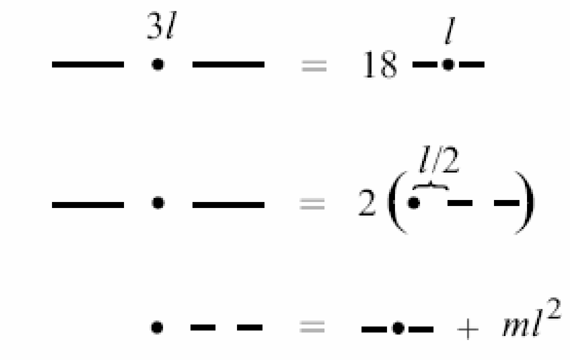
(الف): برابر شکل (۲۵–۱۰) میله‌ای به طول ℓ را در نظر بگیرید و ۱/۳ میانی آن را حذف کنید. با دو قسمت باقی مانده هم همین کار را بکنید و هریک را سه قسمت بکنید و قسمت میانی را بردارید. این کار را بینهایت بار انجام دهید. فرض کنید جرم جسم باقی مانده‌ی نهایی m است. گشتاور لختی این جسم را حول محوری که از وسط میله‌ی اولیه می‌گذرد و بر آن عمود است، بیابید. (توجه کنید که این جسم باقی‌مانده طول ندارد و بنابراین، چگالی جرم آن بینهایت است. اما این جسم یک جرم نقطه‌ای با چگالی بینهایت نیست. اگر چنین تصوری پیدا کردید، به جای بینهایت، برخال کردن را یک میلیون بار انجام دهید.)



شکل ۲۶-۱۰

(**ب**): مربعی به ضلع ℓ شکل (۲۶-۱۰)را در نظر بگیرید. آن را به ۹ مربع کوچک تر یکسان تقسیم کنید و مربع میانی را حذف کنید. همین کار را با ۸ مربع دیگر انجام دهید و این کار را بینهایت بار تکرار کنید. فرض کنید جرم جسم باقی مانده نهایی m است. گشتاور لختی آن را نسبت به محوری که از مرکز مربع اصلی می‌گذرد و بر سطخ آن عمود است، حساب کنید

حل: (**الف**) تحلیل مقیاس‌بندی در این مثال کمی پیچیده‌تر از پیش است. جسم نهایی با جسمی که سه برابر بزرگ‌تر است، خودگون است. بنابراین، اگر جسم را سه برابر کنیم I چگونه تغییر خواهد کرد؟ در I دو عامل وجود دارد: x^2 و dm . اگر طول جسم را سه برابر کنیم، x سه برابر می‌شود و در نتیجه انتگرال $\int x^2 dm$ با یک ضریب ۹ بزرگ می‌شود. dm چگونه تغییر می‌کند؟ با سه برابر کردن جسم، جرم آن دو برابر می‌شود؛ چون جسم جدید عبارت است از دو جسم کوچک‌تر بعلاوه‌ی فضای خالی بین آن‌ها. پس، dm جسم جدید دو برابر dm جسم کوچک تر است. بنابراین، انتگرال I یک ضریب ۲ هم به این خاطر به دست می‌آورد. نتیجه این که I جسمی به طول 3ℓ هیجده برابر I جسمی با طول ℓ می‌شود. اینک **حل تصویری**:



سطر اول از تحلیل مقیاس‌بندی به دست می‌آید . سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاور های لختی باهم جمع می‌شوند. سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطرهای اول و دوم داریم ▬ ▬ • ▬ = ۹ ▬$\overset{l}{\bullet}$▬ که اگر در سطر سوم قرار دهیم و ▬ ▬ • را حذف کنیم به دست می‌آید

$$\overset{l}{\bullet} = \frac{۱}{۸} m\ell^{۲}$$

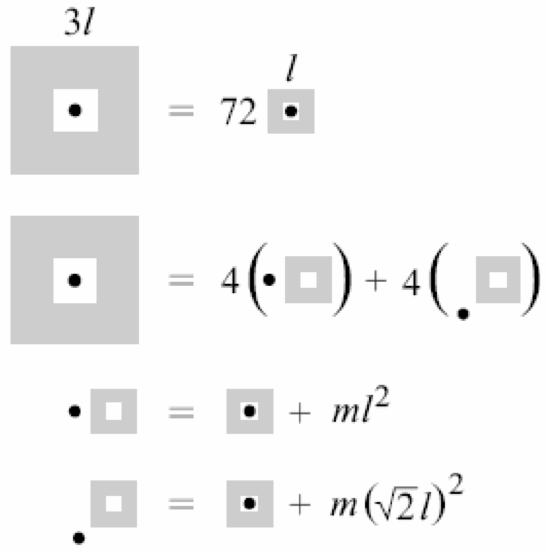
این مقدار بزرگ‌تر از گشتاور میله‌ی همگن ($m\ell^{۲}/۱۲$) است چون حالا جرم در فاصله‌ی دورتری از مرگز قرار دارد.

نکته: با سه برابر کردن طول جسم، dm با ضریب ۲ بزرگ شد که بیشتر از ضریب ۱ برای جسم با بعد صفر و کم‌تر از ضریب ۳ برای جسم یک بعدی است. به حسابی، بُعد جسم ما چیزی بین صفر و یک است. می‌توان بعد، d ، یک جسم را به این صورت تعریف کرد که در اثر r برابر شدن طول، عدد r^d رشد "حجم" جسم را نشان دهد. در این مثال $r = ۳$ است و حجم به ۲ برابر افزایش یافته است. پس $۳^d = ۲ \Rightarrow d = \ell og_{۳} ۲ \simeq ۰,۶۳$. ♣

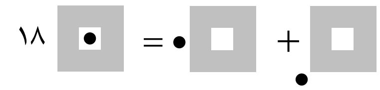
(**ب**): نخست به مقیاس‌بندی جرم توجه کنید. ابعاد جسم نهایی را سه برابر کنید. در این صورت I چگونه تغییر خواهد کرد؟ x ها در انتگرال $\int x^2 dm$ سه برابر شده اند. پس یک ضریب ۹ خواهیم داشت. از سوی دیگر، با سه برابر کردن ابعاد جسم، جرم آن ۸ برابر می‌شود؛ چون جسم جدید (جسم سه برابر شده) از هشت جسم کوچک بعلاوه‌ی مربع خالی در میان آن‌ها تشکیل می‌شود. بنابراین، dm جسم جدید ۸ برابر می‌شود. در نتیجه، I جسم با طول ۳ℓ هفتادودو برابر I جسم با طول ℓ است.

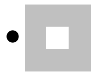
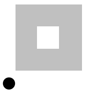
حل تصویری:

سطر اول از تحلیل مقیاس بندی به دست می‌آید. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاورهای لختی باهم جمع

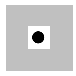


می‌شوند. سطرهای سوم و چهارم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطرهای اول و دوم داریم



از این تساوی در سطرهای سوم و چهارم استفاده کنید و  و  را حذف کنید. خواهیم داشت

$$\text{[square]} = \frac{۳}{۱۶} m\ell^{۲} \qquad (۱۰-٤٥)$$



این مقدار بزرگ‌تر از گشتاور لختی مربع همگن ($m\ell^{۲}/۶$) است. چون جرم اینک در فاصله‌ی دورتری از مرکز قرار دارد. با سه برابر کردن طول جسم، حجم آن ۸ برابر شد. پس، بعد جسم $۳^{d} = ۸ \Rightarrow d = \ell og_{۲} ۸ \simeq ۱,۸۹$.

۱۰-۶ گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای

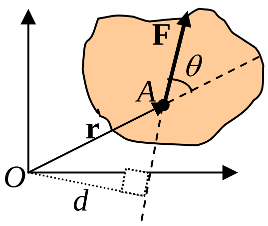
۱۰-۶-۱ گشتاور

در فصل ۷ گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای را تعریف کردیم. در آنجا گفتیم که این دو کمیت در بررسی حرکت جسم سخت نقش مهمی دارند. اینک با جزییات بیشتری به آن می‌پردازیم.

جسمی را در نظر بگیرید که از یک نقطه آویزان است. اگر نیروی **F** در مکان مناسبی به این جسم وارد شود، جسم می‌کوشد حول محوری که از نقطه‌ی آویز می‌گذرد بچرخد. توانایی نیرو در چرخاندن جسم حول یک محور با کمیت گشتاور (**G**) اندازه گیری می‌شود. در فصل ۷ گشتاور نیرو را با رابطه‌ی (۲۲-۷) تعریف کردیم و بر این نکته پا فشردیم که **گشتاور همواره نسبت به یک محور یا نقطه‌ی معینی تعریف می‌شود**. بگذارید یک بار دیگر هم گشتاور نیروی **F** را نسبت به مبداء معینی تعریف کنیم.

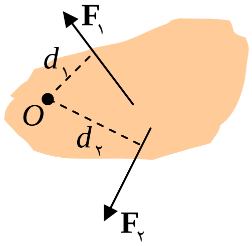
$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{G}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin\alpha = Fr \sin\theta \qquad (۱۰-٤٦)$$

θ زاویه‌ای است که راستای F با راستای r می‌سازد. در شکل (۲۷-۱۰) نیروی **F** در نقطه‌ی A به جسم اثر کرده است. زاویه‌ی θ نشان داده شده است و اندازه‌ی گشتاور این نیرو نسبت به مبداء O برابر است با $Fr\sin\theta$. کمیت $d \equiv r\sin\theta$ *بازوی گشتاور* نامیده می‌شود وفاصله‌ی عمودی محور چرخش تا راستای اثر نیروی **F** است. توجه کنید که فقط مؤلفه‌ی $F\sin\theta$ گشتاورمی‌کوشد جسم را بچرخاند. این مؤلفه‌ی گشتاور به r عمود است. اگر مانند شکل (۲۸-۱۰) بیش از یک نیرو به جسم اثر کند، آنگاه هر یک از نیروها می کوشد جسم را حول نقطه‌ی آویز O بچرخاند. برای مثال، در شکل (۲۸-۱۰) نیروی $\mathbf{F}_۱$ می‌خواهد جسم را حول نقطه‌ی O پادساعتگرد بچرخاند، در حالیکه نیروی $\mathbf{F}_2$ می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند.از این پس قرارداد می کنیم که اگر نیرو بخواهد جسم را پاد ساعتگرد



شکل ۲۷-۱۰

بچرخاند، گشتاور مربوط به آن نیرو مثبت است. اگر نیرو بخواهد جسم را ساعتگرد بچرخاند، گشتاورش را منفی فرض خواهیم کرد. این همان قاعده‌ی انگشت‌های دست راست است . به هر حال، بنا به تعریف گشتاور یک کمیت برداری است و باید جهتش معین باشد. بردار گشتاور نیرو، برداری است که بر صفحه- ای که نیرو و بردار مکان می‌سازند عمود است. یعنی گشتاور هم بر $\mathbf{F}$ و هم بر $\mathbf{r}$ عمود است. بنابراین، گشتاور نیروی $\mathbf{F}_1$ با بازوی d_1 در شکل (۲۸-۱۰) **مثبت** و مقدار آن $+F_1 d_1$ است؛ گشتاور نیروی F_2 با بازوی d_2 منفی است و اندازه‌اش $-F_2 d_2$ است. بنابراین، اندازه‌ی گشتاور برآیند وارد به جسم سخت نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از:

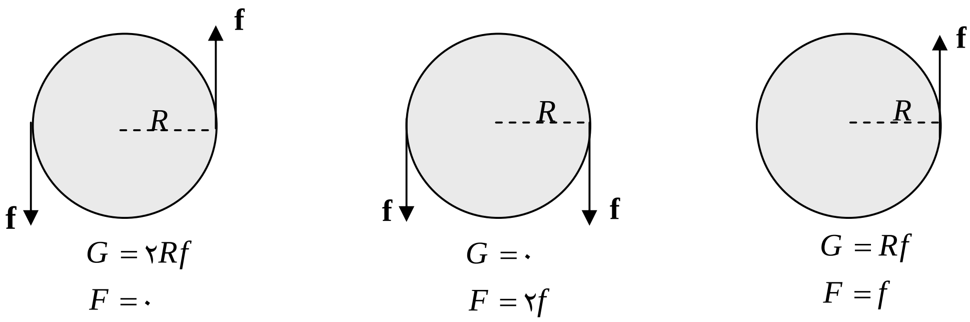


شکل ۲۸-۱۰

$$G_{net} = G_1 + G_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2 \qquad (۱۰-۴۷)$$

روشن است که اگر $F_1 d_1$ بزرگ‌تر از $F_2 d_2$ باشد، جسم پادساعتگرد خواهد چرخید. اگر $F_2 d_2$ بزرگ‌تر از $F_1 d_1$ باشد جسم ساعتگرد می‌چرخد.

توجه کنید که گشتاور و نیرو دو مفهوم کاملاً جدا از هم اند: گشتاور بستگی به این دارد که نسبت به چه نقطه‌ای حساب شود اما نیرو اینگونه نیست. از تعریف گشتاور $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ می‌بینیم که گشتاور $\mathbf{G}$ و نیروی $\mathbf{F}$ همواره بر هم عمودند. گشتاور وارد به یک جسم می‌تواند غیر صفر باشد، حال آن که



شکل ۲۹-۱۰

نیروی خالص وارد به آن جسم می‌تواند صفر باشد. ممکن است به جسم نیرو وارد شود اما گشتاور کل وارد به آن صفر باشد. در عمومی‌ترین حالت هم گشتاور و هم نیرو می‌توانند غیر صفر باشند. این سه وضعیت در شکل (۲۹-۱۰) نشان داده شده اند.

۲-۶-۱۰ تکانه‌ی زاویه‌ای

تکانه‌ی زاویه‌ای یک جرم نقطه‌ای نسبت به مبداء معینی با رابطه‌ی

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (۱۰-۴۸)$$

تعریف می‌شود. اگر مجموعه‌ای از جرم‌های نقطه‌ای داشته باشیم، تکانه‌ی زاویه‌ای کل، $\mathbf{L}$، جمع تکانه‌های زاویه‌ای جرم‌هاست. کمیت $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ویژگی‌های مهم و سودمندی دارد. یکی از این ویژگی‌ها را در بخش ۵-۷ دیدیم که قانون پایستگی $\mathbf{L}$ بود و در قضیه‌ی ۱-۷ بیان شد و به شناساندن "پتانسیل موثر" انجامید. ویژگی مهم دیگر این است که گشتاور در رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ (این رابطه، مانسته‌ی چرخشی قانون نیوتون $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ است) ظاهر می‌شود. بررسی رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ موضوع فصل ۱۲ است.

مسئله‌های تکانه‌ی زاویه‌ای دنیا دو نوع‌اند. حل هر مسئله‌ی چرخش سرانجام با $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ سروکار پیدا می‌کند. بنابراین، نخست باید تغییر $\mathbf{L}$ را نسبت به زمان به دست آوریم. چون $\mathbf{L}$ بردار است، تغییر آن ممکن است بر اثر تغییر طول یا بر اثر تغییر جهت آن و یا ترکیبی از هر دو باشد. به بیان دیگر، اگر $\mathbf{L}$ را به صورت $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{L}}$ بنویسیم که در آن $\hat{\mathbf{L}}$ بردار یکه در امتداد $\mathbf{L}$ است، آنگاه تغییر $\mathbf{L}$ می‌تواند براثر تغییر L یا $\hat{\mathbf{L}}$ و یا هردو روی دهد.

فهمیدن حالت اول، یعنی $\hat{\mathbf{L}}$ ثابت، آسان است. صفحه‌ی گرام را در نظر بگیرید. بردار $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ به صفحه‌ی گرام عمود است. اگر به صفحه نیروی مماسی مناسبی وارد کنیم، صفحه تندتر می‌چرخد. این چرخش تند، قانونمند است و ما به آن خواهیم پرداخت. اما هنوز هم $\mathbf{L}$ به صفحه عمود است و تنها اندازه‌اش بزرگ‌تر شده است. در این گونه مسئله‌ها می‌توان کاملا فراموش کرد که $\mathbf{L}$ بردار است و فقط اندازه‌ی آن را در نظر گرفت. در این فصل و اساسا در این کتاب، فقط این حالت را پی-گیرانه دنبال خواهیم کرد. حالت دوم وضعیتی است که جهت $\mathbf{L}$ تعییر کند. این حالت پیچیده‌تر است و به تجسم کردن مسئله نیاز دارد. حرکت فرفره، توپ بسکتبالی که روی حلقه می‌چرخد و دوچرخه سواری که روی پیرامون دایره‌ای دور می‌زند یا خم جاده‌ای را می‌پیماید و سایر وضعیت‌های پیچیده‌تر نمونه‌هایی از این نوع مسئله‌هاست. ما نگاهی گذرا به این حالت‌ها خواهیم انداخت.

تفاوت این دو حالت درست مانند وضعیت‌های مربوط به $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ است. تغییربردار $\mathbf{p}$ می‌تواند فقط به خاطر تغییر اندازه‌ی آن باشد که به $F = ma$ می‌انجامد؛ یا این که بر اثر تغییر جهت $\mathbf{p}$ باشد که در این صورت نیروی مرکزگرای $F = mv^{۲}/r$ را خواهیم داشت. و یا این که ترکیبی از هر دو باشد.

تکانه‌ی زاویه‌ای یک جرم نقطه‌ای با رابطه‌ی (۱۰-٤۸) داده شد. مسئله‌های دنیای واقعی به ناگزیر شامل ذرات بسیار است. بنابراین، باید محاسبه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای جسم دارای بعد را یاد بگیریم. اگر جسم از ذراتی با جرم m_i تشکیل شده باشد و هر ذره با سرعت $\mathbf{v}_i$ در جهتی حرکت کند و بنابراین، تکانه‌اش $\mathbf{p}_i$ باشد، آنگاه تکانه‌ی زاویه‌ای هر ذره $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ است. تکانه‌ی زاویه‌ای کل جسم برابر است با جمع تکانه‌ی زاویه‌ای همه‌ی جرم‌های m_i

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (۱۰-٤۹)$$

اگر توزیع جرم پیوسته باشد، در رابطه‌ی بالا علامت جمع به علامت انتگرال تبدیل می‌شود.

تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ به مکان $\mathbf{r}_i$ و تکانه‌های $\mathbf{p}_i$ جرم‌ها بستگی دارد. تکانه‌ها هم به نوبه‌ی خود بستگی به این دارد که جرم با چه سرعتی می‌چرخد و با چه سرعتی جابه‌جا می‌شود. هدف ما در یافتن وابستگی $\mathbf{L}$ به توزیع جرم جسم مورد نظرمان است.

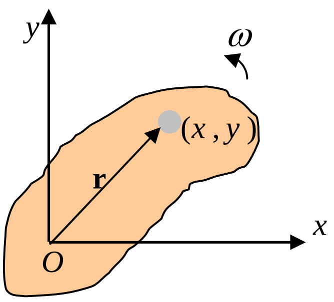
فرض کنید جسم مورد نظر دو بعدی است و در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد (به زودی در همین بخش وضعیتی را که جسم دو بعدی نیست بررسی خواهد شد و شرط دو بعدی بودن جسم را حذف خواهیم کرد). نخست $\mathbf{L}$ را نسبت به مبداء مختصات حساب می‌کنیم.

توجه کنید که برای جسم دو بعدی، هر دوی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارند و بردار $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ همواره در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ است. این واقعیت بررسی جسم دو بعدی را آسان می‌کند؛ چون تغییر $\mathbf{L}$ فقط براثر اندازه‌ی آن است و نه بر اثر تغییر جهت. بنابراین، وقتی به رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ می‌رسیم این رابطه شکل ساده‌ای پیدا می‌کند.

۱۰-۶-۳ چرخش حول محور z

جسم دو بعدی شکل (۱۰-۳۰) را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ω در جهت پادساعتگرد حول محور z می‌چرخد. بخش

کوچکی از آن را که در مکان $(x\,,y\,)$ قرار دارد و جرمش dm است، در نظر بگیرید. پس، $r=\sqrt{x^2+y^2}$. این بخش کوچک روی دایره‌ای به مرکز O با سرعت $v=\omega r$ می‌گردد. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای آن نسبت به مبداء O عبارت است از $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=r(v\ dm)\,\hat{\mathbf{z}}=dm\ r^2\omega\,\hat{\mathbf{z}}$. جهت $\hat{\mathbf{z}}$ در نتیجه‌ی ضرب برداری دو بردار متعامد $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ پدید می‌آید. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای کل جسم عبارت است از



شکل ۱۰-۳۰

$$L=\int r^2\omega\hat{\mathbf{z}}dm=\int(x^2+y^2)\omega\hat{\mathbf{z}}dm \qquad (۱۰-۵۰)$$

انتگرال برروی تمام سطح جسم که جرم در آن توزیع شده است، گرفته می‌شود. اگر توزیع جرم یکنواخت باشد، آنگاه داریم $dm=\sigma dx\ dy$. چون گشتاور لختی، بنا به تعریف، عبارت است از

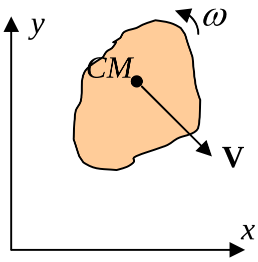
$$I_z\equiv\int r^2dm=\int(x^2+y^2)dm \qquad (۱۰-۵۱)$$

پس، مولفه‌ی z بردار $\mathbf{L}$ به قرار زیر خواهد بود

$$L_z=I_z\,\omega \qquad (۱۰-۵۲)$$

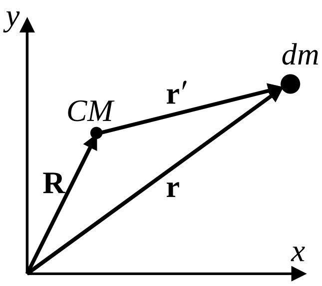
انرژی جنبشی این جسم $T=I_z\omega^2/2$ است که در آغاز این فصل حساب کردیم.

۱۰-۶-۴ حرکت عمومی در صفحه‌ی $x-y$



شکل ۱۰-۳۱

حال فرض کنید که جسم هم حرکت چرخشی و هم حرکت انتقالی دارد (شکل ۳۱-۱۰). در این صورت، بخش‌های مختلف جسم، برعکس حالت پیش، دیگر روی دایره‌هایی به مرکز مبداء نمی‌گردند و نمی‌توان از $v=\omega r$ استفاده کرد. اگر تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ و انرژی جنبشی T را برحسب مختصات مرکزجرم و مختصات نسبت به مرکزجرم بنویسیم، خواهیم دید که رابطه‌های این دو کمیت زیبا و ساده‌تر می‌شوند و روشنگری‌های بیشتری پیدا می‌کنند. نخست این کار را انجام می‌دهیم. مختصات مرکزجرم جسم را با $\mathbf{R}=(X\,,Y\,)$ نشان دهید و مختصات جزء جرم را نسبت به مرکزجرم با $\mathbf{r}'=(x',y')$ نشان دهید. در شکل (۳۲-۱۰) این بردارها نشان داده شده اند. روشن است که مکان جزء جرم dm را در چارچوب ثابت می‌توان به صورت $\mathbf{r}=\mathbf{R}+\mathbf{r}'$ نوشت. اگر سرعت مرکز جرم $\mathbf{V}$ و سرعت جزء جرم نسبت به مرکزجرم $\mathbf{v}'$ باشند، آنگاه داریم $\mathbf{v}=\mathbf{V}+\mathbf{v}'$. فرض کنید جسم با سرعت زاویه‌ای ω' حول مرکز جرم می‌چرخد (منظور این است: دستگاه مختصاتی را تجسم کنید که مبداء آن در مرکزجرم و محورهایش با محورهای ثابت x و y موازی است. در این چارچوب، جسم دو بعدی با سرعت زاویه‌ای ω' می چرخد.) حالا داریم $v'=r'\omega'$. نخست تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ را حساب می‌کنیم و سپس به انرژی جنبشی T می‌پردازیم.



شکل ۱۰-۳۲

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\int\mathbf{r}\times\mathbf{v}dm=\int(\mathbf{R}+\mathbf{r}')\times(\mathbf{V}+\mathbf{v}')dm\\&=M\mathbf{R}\times\mathbf{V}+\int\mathbf{r}'\times\mathbf{v}'dm\\&=M\mathbf{R}\times\mathbf{V}+\left(\int r'^2\omega'dm\right)\hat{\mathbf{z}}\\&\equiv M\mathbf{R}\times\mathbf{V}+\left(I_z^{CM}\,\omega'\right)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

(برخی جمله ها صفرند) (۱۰-۵۳)

M جرم کل جسم دو بعدی است. در گذار از سطر دوم به سطر سوم جمله‌های $\int \mathbf{r}'\times\mathbf{V}dm$ و $\int \mathbf{R}\times\mathbf{v}'dm$ صفر اند. چون، بنا به تعریف مرکزجرم، داریم $\int \mathbf{r}'dm = ۰$ و در نتیجه $\int \mathbf{v}'dm = d\left(\int \mathbf{r}'dm\right)\Big/dt = ۰$ است. کمیت I_z^{CM} گشتاور لختی حول محوری است که از مرکزجرم می‌گذرد و با محور z موازی است. رابطه‌ی (۱۰-۵۳) نتیجه‌ی زیبا ومهمی است و می‌ارزد که به صورت قضیه بیان شود.

قضیه ی ۱-۱۰ *تکانه‌ی زاویه‌ای هر جسم نسبت به مبداء ثابت با جمع تکانه‌های زاویه‌ای جسمی نقطه‌ای به جرم M جایگزیده در مرکزجرم و تکانه‌ی زاویه‌ای جسم نسبت به مرکزجرم برابر است.*

نکته: قضیه‌ی بالا فقط هنگامی سودمند است که مکان جرم نقطه‌ای پنداری M در مرکزجرم باشد. البته در بررسی بالا می‌توانستیم نقطه‌ی دیگری، مانند نقطه‌ی P، غیر از مرکزجرم را انتخاب کنیم و همه چیز را برحسب مختصات نقطه‌ی P و مختصات نسبت به نقطه‌ی P بنویسیم (و هنوز هم چرخش را توصیف کند). اما در این صورت برخی جمله‌ها که در بررسی بالا صفر بودند، دیگر صفر نمی‌شوند و نتیجه به زیبایی و سودمندی رابطه‌ی (۱۰-۵۳) نمی شود. ♣

در حالت خاص که مرکزجرم در دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای Ω و شعاع R (و بنابراین $V = \Omega R$) حول مبداء ثابت بگردد، تکانه‌ی زاویه‌ای جسم $L = (MR^۲\Omega + I_z^{CM}\omega')\hat{\mathbf{z}}$ می شود. اینک محاسبه‌ی انرژی جنبشی T:

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{1}{2}v^2 dm \\ &= \int \frac{1}{2}\left|\mathbf{V}+\mathbf{v}'\right|^2 dm \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \int \frac{1}{2}v'^2 dm \qquad \text{(برخی جمله ها صفر اند)} \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \int \frac{1}{2}r'^2\omega'^2 dm \\ &\equiv \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_z^{CM}\omega'^2 \end{aligned} \qquad (۱۰-۵٤)$$

در گذار از سطر دوم به سطر سوم جمله‌ی $\int \mathbf{V}\cdot\mathbf{v}'dm$، بنا به تعریف مرکزجرم، صفر است. رابطه‌ی (۱۰-۵٤) مانند رابطه‌ی (۱۰-۵۳) سودمند و زیباست و می‌ارزد که به صورت قضیه بیان شود.

قضیه‌ی ۲-۱۰ *انرژی جنبشی هر جسم برابر است با جمع انرژی جنبشی یک جرم نقطه‌ای جایگزیده در مرکزجرم بعلاوه‌ی انرژی جنبشی جسم در اثر حرکتش نسبت به مرکزجرم آن.*

۱۰-۶-۵ اجسام غیرتخت

در بخش ۱۰-٦ بحث را به اجسام تخت دو بعدی در صفحه‌ی $x-y$ محدود کردیم. با وجود این، اگر محور چرخش با محور z موازی باشد و L_z مورد توجه باشد (و نه L_x و L_y) دستاوردهای بخش ۱۰-٦ را می‌توان به اجسام غیرتخت گسترش داد. بنابراین، شرط دو بعدی بودن جسم را رها و یک بار دیگر دستاوردهای بخش ۱۰-٦ را بررسی می‌کنیم.

نخست جسمی را تجسم کنید که حول محور z می‌چرخد. این جسم در راستای محور z هم بُعد دارد.اگر تصور کنید که می‌توان این جسم را به لایه‌های تخت موازی صفحه‌ی $x-y$ برش داد، آنگاه رابطه های (۱۰-۵۱) و (۱۰-۵۲) به درستی L_z هر برش را توصیف می‌کند. چون L_z کل جسم جمع L_z های این برش‌های دو بعدی است، بنابراین I_z کل جسم هم جمع I_z

های برش‌های دو بعدی است. تفاوت در z این برش‌ها بی ربط اند. پس برای **هر** جسمی می‌توان نوشت

$$I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \qquad , \qquad L_z = I_z \omega \qquad (۱۰-۵۵)$$

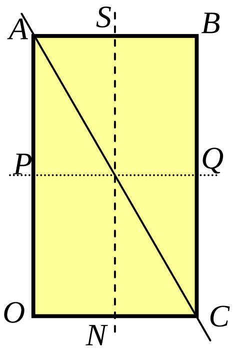
اگرچه رابطه‌ی (۵۵-۱۰) مقدار L_z را برای هر جسم دلخواه به دست می‌دهد، اما بحث این فصل هنوز از عمومیت کامل برخوردار نیست. چون (۱) چرخش به حول محور ثابت z محدود شده است و (۲) حتی با این محدودیت هم، جسمی که در خارج صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد، می‌تواند مولفه‌های L_x و L_y غیر صفر داشته باشد. ما در رابطه‌ی (۵۵-۱۰) فقط L_z را حساب کردیم. این واقعیت دوم عجیب اما واقعی است.

انرژی جنبشی، T، جسم غیرتخت که حول محور z می‌چرخد، هنوز هم با رابطه‌ی (۵۲-۱۰) توصیف می‌شود. چون انرژی جنبشی کل جسم را می‌توان از جمع انرژی‌های جنبشی برش‌های دو بعدی به دست آورد.

برای جسمی که مرکزجرمش حرکت انتقالی دارد و خود جسم حول محوری می‌چرخد که از مرکزجرم می گذرد و با محور z موازی است، رابطه‌های (۵۳-۱۰) و (۵٤-۱۰) هنوز برقرار اند. جهت سرعت $\mathbf{V}$ مرکزجرم هر جهتی می‌تواند باشد، هنوز این دو رابطه برقرار اند.

سرانجام این که قضیه‌ی محورهای موازی هم برقرار است؛ اما قضیه‌ی محورهای متعامد برای جسم غیرتخت درست نیست. این تنها موقعی است که فرض تخت بودن لازم است.

مسئله ها



شکل ۳۳-۱۰

۱-۱۰ صفحه‌ی همگن مستطیل شکل به جرم M، به درازای a و پهنای b را در نظر بگیرید.

(الف): گشتاور لختی صفحه را حول لبه‌ی OA به دست آورید.

(ب): گشتاور لختی صفحه را حول لبه‌ی OC به دست آورید.

(پ): گشتاور لختی صفحه را حول خط SN حساب کنید.

(ت): گشتاور لختی صفحه را حول خط PQ حساب کنید.

(ج): گشتاور لختی صفحه را حول محوری که از مرکز صفحه می‌گذرد و بر صفحه عمود است به دست آورید.

(چ): گشتاور لختی صفحه را حول قطر AC حساب کنید.

۲-۱۰ گشتاور لختی صفحه‌ی نازکی به جرم m و به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ℓ را حول محوری که از یک راس می‌گذرد و به صفحه‌ی مثلث عمود است، بیابید.

۳-۱۰ گشتاور لختی مربع همگن به جرم m و طول ضلع ℓ را حول

(الف): محوری که وسط دو ضلع روبرو را به هم وصل می‌کند.

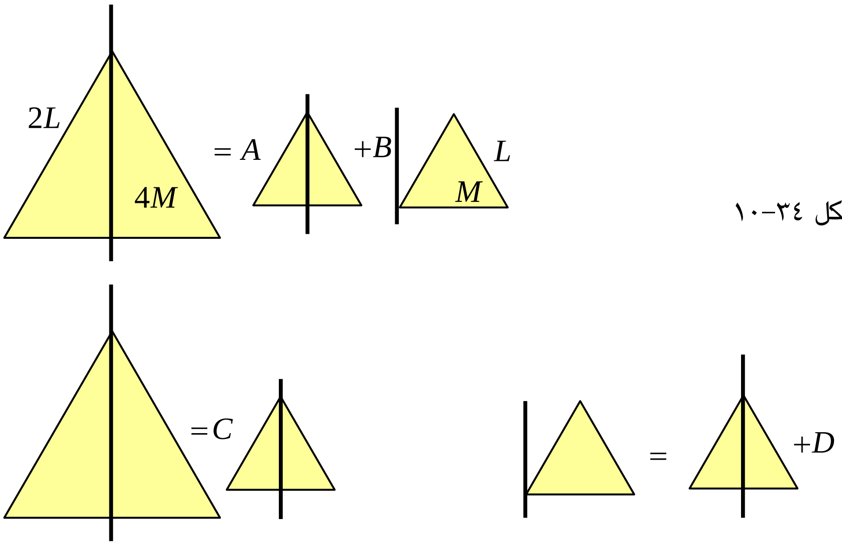
(ب): محوری که دو گوشه‌ی مقابل را به هم مصل می‌کند.

(پ): توضیح دهید که چرا پاسخ‌های (الف) و (ب) باید یکی باشند.

۴-۱۰ گشتاور لختی میله‌ای به جرم m و طول ℓ را نسبت به محوری که از فاصله‌ی $\ell/4$ از یک انتها می‌گذرد به دست آورید (این یک انتگرال‌گیری ساده است) و نتیجه را با قضیه‌ی محورهای موازی بیازمایید.

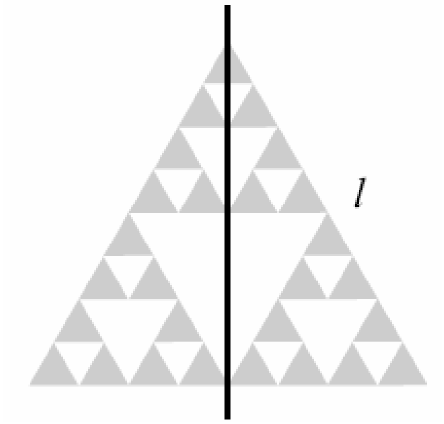
۵-۱۰ گشتاور لختی مخروط توپری با جرم M، شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h را حول محور تفارن آن به دست آورید.

۱۰-۶ با استفاده از روش میان بر و قضیه‌ی محورهای موازی، گشتاور لختی مثلث متساوی‌الاضلاع به جرم M و طول ضلع L را بیابید. برای حل این مسئله باید ضرایب A ، B ، C و D را در شکل‌های (۳٤-۱۰) پیدا کنید.



شکل ۳٤-۱۰

۱۰-۷ مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید که طول ضلعش ℓ است. وسط ضلع‌ها را به هم وصل کنید. با این کار مثلث به چهار مثلث کوچک ترتقسیم می‌شود. مثلث میانی را بردارید. این کار را با سه مثلث دیگر انجام دهید و مثلث‌های میانی آنها را هم بردارید. این کار را با بقیه‌ی مثلث‌های هم انجام دهید و تا بینهایت تکرار کنید. فرض کنید که جرم جسم نهایی باقی‌مانده m باشد. گشتاور لختی آن را نسبت به محوری که از مرکز مثلث اصلی وعمود بر صفحه‌ی آن می‌گذرد، حساب کنید. شکل (۳۵-۱۰) را ببینید.

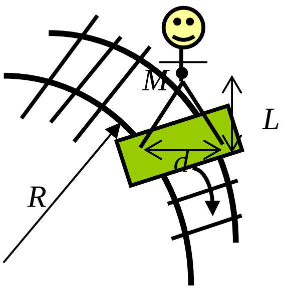


شکل ۳۵-۱۰

۱۰-۸ (**الف**): اگر تکانه‌ی خطی کل مجموعه‌ای از ذرات صفر باشد، نشان دهید که تکانه‌ی زاویه ای سامانه حول هر مرکزی یکسان است.

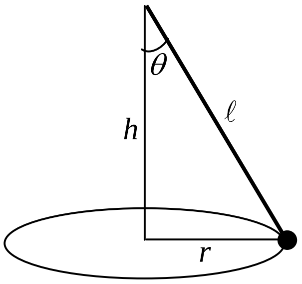
(**ب**): اگر نیروی کل وارد به سامانه‌ای از ذرات صفر باشد، نشان دهید که گشتاور وارد به سامانه نسبت به هر مبدائی یکسان است

۱۰-۹ شخصی به جرم M روی واگنی ایستاده است. واگن با سرعت v از پیچی به شعاع R می‌گذرد. مرکز جرم شخص برابر شکل (۳٦-۱۰) در ارتفاع L از سطح واگن قرار دارد. شخص رو به جهت حرکت واگن ایستاده است و پاهای خود را به فاصله‌ی d از هم قرار داده است. هر یک از پاهای شخص چه مقدار وزن تحمل می‌کند؟

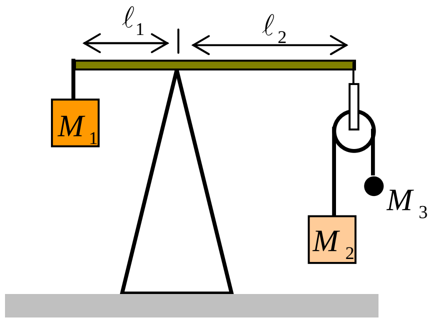


شکل ۳٦-۱۰

۱۰-۱۰ در شکل (۳۷-۱۰) جرم M_1 از یک انتهای میله‌ای آویزان است و به انتهای دیگر میله ماشین آتودی وصل است. قرقره‌ی بدون اصطکاک ماشین آتود جرم ندارد و از آن جرم-های M_2 و M_3 آویزانند. گرانش رو به پایین است و $M_2 > M_3$ است. میله بر روی تکیه‌گاهی قرار دارد. رابطه‌ای بین M_1 ، M_2، M_3 و ℓ_1 و ℓ_2 چنان پیدا کنید که درست پس از رها کردن جرم‌ها، میله نچرخد



شکل ۳۸-۱۰



شکل ۳۷-۱۰

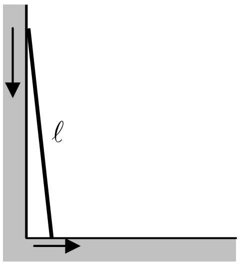
۱۱-۱۰ جرم m از ریسمان بدون جرم به طول ℓ آویزان است و برابر شکل (۳۸-۱۰) روی دایره‌ای افقی تاب می‌خورد. طول ریسمان را به آرامی افزایش (یا کاهش) می‌دهیم. کمیت های θ ، ℓ ، r و h برابر شکل تعریف شده اند.

(**الف**): با فرض این که θ بسیار کوچک است، وابستگی r به ℓ را بیابید.

(**ب**) : با فرض این که θ بسیار به $\pi/۲$ نزدیک است، وابستگی h به ℓ را بیابید.

۱۲-۱۰ تیله‌ای به جرم M و شعاع R با سرعت اولیه‌ی $V_\circ$ روی سطح شیب‌داری با شیب θ رو به بالا غلتانیده شده است. پیش از آنکه تیله رو به پائین بغلتد، چه مسافتی را روی سطح شیب‌دار پیموده است؟

۱۳-۱۰ یک انتهای میله‌ی همگنی به طول ℓ برابر شکل (۳۹-۱۰) روی سطح افقی هموار قرار دارد و سر دیگرش به دیوار بدون اصطکاک تکیه کرده است. فاصله‌ی اولیه‌ی انتهای میله از پای دیوار بسیار کم است. میله را از این وضعیت و از حالت سکون رها می‌کنیم. انتهای پایین میله روی سطح افقی می‌لغزد و از دیوار دور می‌شود. انتهای بالایی آن روی دیوار سُر می‌خورد. در لحظه‌ای که میله از دیوار جدا می‌شود، مولفه‌ی افقی سرعت مرکز جرم آن را بیابید.



شکل ۳۹-۱۰

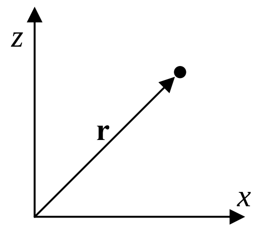
فصل ۱۱ دینامیک چرخش

۱-۱۱ دینامیک چرخشی ۱ ($\hat{\mathbf{L}}$ ثابت)

اینک در شرایطی قرار گرفته‌ایم که می‌توانیم دینامیک حرکت چرخشی را بررسی کنیم و نشان دهیم که آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای و گشتاورد با رابطه‌ی $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ به یکدیگر مربوط اند. این رابطه، مانسته‌ی چرخشی قانون نیوتون $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ است. ایده‌ی اصلی در اینجا سرراست است، با وجود این، دو نکته‌ی ظریف وجود دارد که باید آنها را فهمید. یکی به نیروهای درونی بین مجموعه‌ای از ذرات مربوط است. دیگری به مبداء هایی (نقاطی که نسبت به آنها تکانه‌ی زاویه‌ای محاسبه می‌شود) می‌پردازد که ثابت نیستند. برای ساده کردن و سرراست بودن بحث، سه وضعیت را، به ترتیب از ساده تا پیچیده، بررسی می‌کنیم و سپس قضیه‌ی عمومی را از آنها نتیجه می‌گیریم. اثباتی را که برای $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ در این فصل خواهیم آورد برای حالت عمومی هم برقرار است.

۱-۱-۱۱ جرم نقطه‌ای ، مبداء ثابت

شکل (۱-۱۱) یک جرم نقطه‌ای را در مکان $\mathbf{r}$ نسبت به مبداء ثابت نشان می‌دهد. مشتق نسبت به زمان تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ عبارت است از



شکل ۱-۱۱

$$\dot{\mathbf{L}}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p})+(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt})$$
$$=\mathbf{v}\times(m\mathbf{v})+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0+\mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۱-۱۱)$$

$\mathbf{F}$ نیرویی است که به جرم وارد می‌شود. این همان اثباتی است که برای قضیه‌ی ۱-۷ آوردیم. در اینجا به جای نیروی مرکزی، نیروی را عمومی در نظر گرفتیم. در سطر دوم رابطه‌ی (۱-۱۱) جمله‌ی اول سمت راست صفر است (چون $d\mathbf{r}/dt\times\mathbf{p}=\mathbf{v}\times m\mathbf{v}=0$) و در جمله‌ی دوم $d\mathbf{p}/dt=\mathbf{F}$ است. چون گشتاور با $\mathbf{G}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ تعریف می‌شود ، پس داریم

$$\mathbf{G}=\frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۲-۱۱)$$

این همان قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای است که در فصل ۷ دیدیم. اگر گشتاور کل وارد به یک سامانه صفر باشد، $d\mathbf{L}/dt=0$ و در نتیجه $\mathbf{L}$ ثابت است.

مثال ۱-۱۱ (آونگ مخروطی): برابر شکل (۲-۱۱) جرم M از میله‌ی بدون جرم به طول ℓ آویزان است. میله با خط عمود زاویه‌ی α می‌سازد و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد ؛ در نتیجه، جرم M روی دایره‌ای افقی با شعاع ثابت می گردد .

(الف): زاویه α را حساب کنید. درستی پاسخ را برای $\omega\to\infty$ و $\omega\to 0$ بیازمائید.

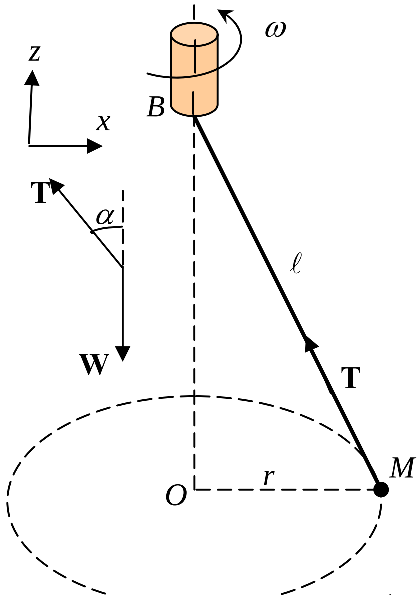
(ب): تکانه‌ی زاویه‌ای جرم M را نسبت به مرکز دایره به دست آورید.

(پ): تکانه‌ی زاویه‌ای جرم M را نسبت به نقطه‌ی آویز B به دست آورید.

(ت): نشان دهید که برای (ب) $d\mathbf{L}/dt=0$ برقرار است.

(ج): آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای، $d\mathbf{L}/dt$ ، را برای حالت (پ) به دست آورید.

حل: **(الف)** نمودار آزاد نیروها را بکشید: T کشش در ریسمان و W وزن جرم M اند. معادله‌ی حرکت در راستای عمودی



شکل ۲-۱۱

عبارت است از

$$F_z = ma_z = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad T\cos\alpha - W = 0 \qquad (۱۱-۳)$$

چون z ثابت است بنابراین ، $\ddot{z} = 0$است.

معادله‌ی حرکت افقی: چون جرم M حرکت دایره‌ای دارد از فصل ۱ می‌دانیم که شتاب‌دار است و شتاب مرکزگرای آن $a_r = -r\omega^2$ و به سوی مرکز دایره است. (علامت منفی به خاطر جهتی است که برای x برگزیدیم؛ شکل (۲-۱۱) را ببینید. پس، با این انتخاب دستگاه مختصات داریم:

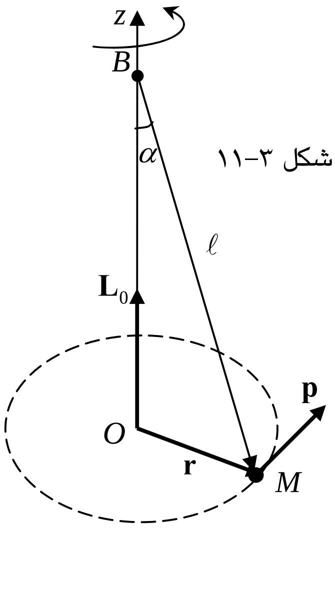
$$-T\sin\alpha = -Mr\,\omega^2 \qquad (۱۱-٤)$$

چون $r = \ell\sin\alpha$ است، پس با ترکیب رابطه‌های (۳-۱۱) و (٤-۱۱) خواهیم داشت

$$T\sin\alpha = M\,\ell\omega^2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = M\,\ell\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad M\,\ell\omega^2\cos\alpha = W = mg \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2} \qquad (۱۱-۵)$$

به نظر می‌رسد که این پاسخ دلخواه است؛ چون برای $\omega \to \infty$ داریم: $\cos\alpha \to 0$ و $\alpha \to \pi/2$ یعنی در سرعت‌های زیاد میله می‌کوشد در حالت افقی قرار بگیرد. اما این پاسخ برای سرعت‌های کم بی معنی است ؛ چون بازای $\omega \to 0$ پیش‌بینی پاسخ این است که $\cos\alpha \to \infty$ و این بی‌معنی است؛ چون همواره $\cos\alpha \le 1$ است. دشواری در کجاست؟ برای $\omega < \sqrt{g/\ell}$ پاسخ ما به نتیجه‌ی $\cos\alpha > 1$ می‌انجامد. اگر $\omega = \sqrt{g/\ell}$ باشد، $\cos\alpha = 1$ و $\sin\alpha = 0$ می شوند؛ یعنی جرم M به طور قائم آویزان است. در واقع، هنگام به دست آوردن $T = M\,\ell\omega^2$ ما دو طرف رابطه‌ی بالا را به $\sin\alpha = 0$ تقسیم کردیم که کار نادرستی بود. ما همچنین پاسخ دیگری را نادیده گرفتیم، یعنی $\sin\alpha = 0$ و $T = W = Mg$ که برای هر مقدار ω درست است ـ پاسخ برای آونگی که به طور قائم آویزان است. از نظر فیزیکی؛ برای $\omega \le \sqrt{g/\ell}$ تنها پاسخ پذیرفتنی $\alpha = 0$ یا $\cos\alpha = 1$ است. برای $\omega > \sqrt{g/\ell}$ دو پاسخ پذیرفتنی وجود دارد: (۱) $\cos\alpha = 1$ و (۲) $\cos\alpha = g/\omega^2\ell$. پاسخ (۱) به آونگی مربوط است که به طور قائم آویخته است و با سرعت زیاد می‌چرخد. پاسخ (۲) مربوط به حالتی است که جرم با راستای عمودی زاویه می‌سازد. برای $\omega > \sqrt{g/\ell}$ پاسخ (۱) ناپایدار است ـ یعنی اگر سامانه در این حالت باشد با کمترین اختلال به سوی بیرون فرار خواهد کرد. چرا؟



شکل ۳-۱۱

(ب): از شکل (۳-۱۱) می بینیم که $\mathbf{L}_O$ در جهت مثبت محور z هاست و اندازه‌ی آن برابر است با

$$|\mathbf{L}_O| = |\mathbf{r}_1||\mathbf{p}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}| = rp \qquad (۱۱-٦)$$

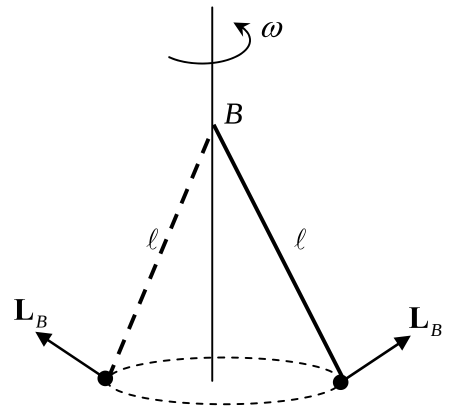
که در آن r شعاع دایره‌ی حرکت است. چون $p = Mv$ و $v = r\omega$ اند، پس $\mathbf{L}_O = Mr^2\omega\hat{\mathbf{z}}$ است. توجه کنید که جهت و اندازه‌ی $\mathbf{L}_0$ ثابت اند.

(پ): اندازه‌ی $\mathbf{L}_B$ عبارت است از:

$$|\mathbf{L}_B| = |\mathbf{l}\times\mathbf{p}| = \ell p = \ell M v = \ell M\,(r\omega) \quad \Rightarrow \quad L_B = M\,\ell r\omega \qquad (۱۱-۷)$$

بنابراین، دیده می‌شود که اندازه‌ی $\mathbf{L}$ بستگی به نقطه‌ای دارد که $\mathbf{L}$ را نسبت به آن نقطه حساب می‌کنیم. برعکس $\mathbf{L}_O$، جهت $\mathbf{L}_B$ ثابت نیست اما اندازه‌ی آن ثابت است. $\mathbf{L}_B$ به ℓ و

$\mathbf{p}$ عمود است. در شکل (۴-۱۱) این نکته نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۱

(ت): نیروهای وارد به گلوله آونگ در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده اند. $\mathbf{T}$ کشش ریسمان است. در حرکت دایره‌ای یکنواخت در راستای عمودی شتاب وجود ندارد. بنابراین $T\cos\alpha - Mg = 0$ است. نیروی کل $\mathbf{F}$ وارد به جرم M شعاعی و به سوی مرکز دایره است

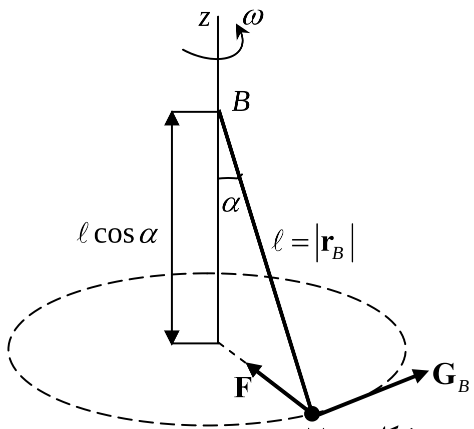
$$\mathbf{F} = -T\sin\alpha\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱۱-۸)$$

گشتاور وارد به جرم M نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از $\mathbf{G}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$؛ چون $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ هر دو در راستای $\hat{\mathbf{r}}$ اند. بنابراین

$$\frac{d\mathbf{L}_\circ}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_\circ = \text{ثابت} \qquad (۱۱-۹)$$

(ج): اگر مبداء را نقطه‌ی B برگزینیم، مسئله کاملاً متفاوت است. گشتاور، $\mathbf{G}_B$، نسبت به نقطه‌ی B برابر است با $\mathbf{G}_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$. بنابراین داریم

$$\left|\mathbf{G}_B\right| = \ell\cos\alpha\, F = (\ell\cos\alpha)(T\sin\alpha) = Mg\,\ell\sin\alpha \qquad (۱۱-۱۰)$$

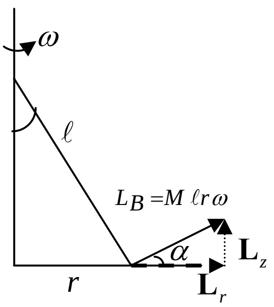


شکل ۵-۱۱

جهت $\mathbf{G}_B$ بر مسیر حرکت M مماس است و در شکل (۵-۱۱) دیده می‌شود.

$$\mathbf{G}_B = Mg\,\ell\sin\alpha\;\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۱۱-۱۱)$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار یکه‌ی مماسی در صفحه‌ی حرکت است. می‌خواهیم نشان دهیم که $G_B = d\mathbf{L}_B/dt$ برقرار است. از قسمت (پ) می‌دانیم که اندازه‌ی $\mathbf{L}_B$ برابر است با $M\,\ell r\omega$. از شکل (۶-۱۱) می‌توان دید که $\mathbf{L}_B$ یک مؤلفه‌ی قائم، $L_z = M\,\ell r\omega\sin\alpha$، در راستای محور zها دارد و مولفه‌ای افقی هم، $L_r = M\,\ell r\omega\cos\alpha$، در راستای شعاع r دارد. اگر $\mathbf{L}_B$ را به صورت $\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_r$ بنویسیم آنگاه می بینیم که همان‌گونه که انتظار داریم L_z ثابت است؛ چون $\mathbf{G}_B$ در راستای عمودی مؤلفه‌ای ندارد. $\mathbf{L}_r$ ثابت نیست بلکه با جابه‌جایی جرم M روی دایره، جهت آن تغییر می کند. اما اندازه‌ی $\mathbf{L}_r$ ثابت است.



شکل ۶-۱۱

وضعیت مشابهی را در فصل ۱ هم دیدیم: تنها راهی که بردار $\mathbf{A}$ با اندازه‌ی ثابت می‌تواند تغییر کند این است که بچرخد؛ یعنی جهت آن تغییر کند. اگر آهنگ چرخش لحظه‌ای آن $d\theta/dt$ باشد، داریم $\left|d\mathbf{A}/dt\right| = A\,(d\theta/dt)$. از این رابطه درمی‌یابیم که

$$\left|\frac{d\mathbf{L}_r}{dt}\right| = L_r\,\omega \qquad (۱۱-۱۲)$$

چون $L_r = M\,\ell r\,\omega\cos\alpha$ است، پس داریم: $dL_r/dt = M\,\ell r\omega^2\cos\alpha$. اما $Mr\omega^2$ نیروی شعاعی $T\sin\alpha$ است و چون $T\cos\alpha = Mg$ است، بنابراین، $dL_r/dt = Mg\,\ell\sin\alpha$ که همان اندازه‌ی G_B در قسمت (ج) است. روش دیگر محاسبه‌ی $d\mathbf{L}_B/dt$ این است که L_B را برداری بنویسیم و از آن مشتق بگیریم:

$$\mathbf{L}_B = (M\,\ell r\omega\sin\alpha)\,\hat{\mathbf{z}} + (M\,\ell r\omega\cos\alpha)\,\hat{\mathbf{r}}$$

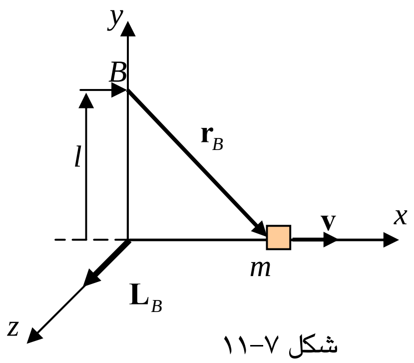
$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = M\,\ell r\omega\cos\alpha\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = M\,\ell r\omega^{۲}\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۱۱-۱۳)$$

در اینجا از $d\hat{\mathbf{r}}/dt = \omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ استفاده کردیم.

رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ را می‌توان به سادگی نمایش داد. در شکل (۷-۱۱) جسمی به جرم m نشان داده شده است که با سرعت $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{i}}$ روی محور x ها می‌لغزد. تکانه‌ی زاویه‌ای جسم نسبت به نقطه‌ی B عبارت است از

$$\mathbf{L}_B = m\mathbf{r}_B \times \mathbf{v} = m\ell v\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-۱٤)$$

اگر بین سطح و جسم اصطکاک نباشد، جسم با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ حرکت خواهد کرد و در نتیجه $\mathbf{L}_B$ هم تغییر نمی کند؛ چون به جسم گشتاور وارد نمی شود. حالا، فرض کنید نیروی اصطکاک $\mathbf{f} = -f\,\hat{\mathbf{i}}$ به جسم وارد می شود وحرکت آن را کند می‌کند. گشتاور نیروی اصطکاک نسبت به نقطه‌ی B عبارت است از

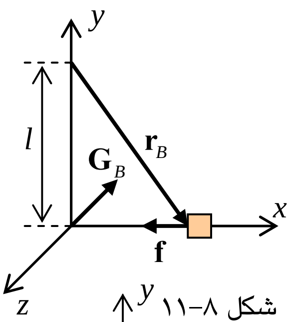


شکل ۷-۱۱

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{f} = -\ell f\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-۱۵)$$

و در شکل (۸-۱۱) نشان داده شده است. از رابطه‌ی (۱۵-۱۱) می بینیم که با آهسته شدن جسم (کاهش v) اندازه‌ی $\mathbf{L}_B$ تغییر می‌کند اما جهت آن همواره در راستای مثبت محور zها باقی می‌ماند. بنابراین، تغییر $\Delta\mathbf{L}_B$ تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}_B$ در جهت منفی محور z هاست و در شکل (۹-۱۱) نشان داده شده است.

جهت $\Delta\mathbf{L}_B$ و جهت G_B یکسان اند. به طور کلی، چون $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ است، بردارهای $\Delta\mathbf{L}$ و $\mathbf{G}$ همواره موازی اند. از رابطه‌ی (۱٤-۱۰) داریم



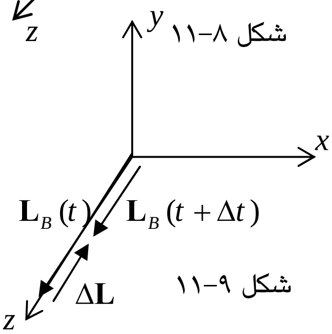
شکل ۸-۱۱

$$\Delta\mathbf{L}_B = m\ell\Delta v\,\hat{\mathbf{z}} \quad , \quad (\Delta v < ۰) \qquad (۱۱-۱٦)$$

که اگر به Δt تقسیم و حدش را به ازای $\Delta t \to ۰$ حساب کنیم خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = m\ell\frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-۱۷)$$

قانون دوم نیوتن می‌گوید: $m\,dv/dt = -f$ و بنابراین رابطه‌ی (۱۷-۱۰) به صورت زیر درمی‌آید.



شکل ۹-۱۱

$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = -\ell f\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{G}_B \qquad (۱۱-۱۸)$$

چیزی که در پی اثبات آن بودیم. در این مثال، فقط اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای جرم تغییر می‌کند و جهت آن بدون تغییر می‌ماند، چون $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ هر دو در یک راستا اند.

نکته: چون $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ به انتخاب مبدا بستگی دارند، وقتی از رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ استفاده می‌شود باید هر دو را نسبت به یک مبدا حساب کرد. ♣

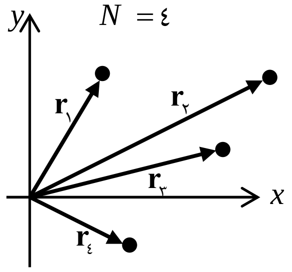
۲-۱-۱۱ جسم با بعد، مبداء ثابت

در بخش ۱-۱-۱۱ رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ را در مورد جرم نقطه‌ای و مبداء ثابت بررسی کردیم. در این بخش به جسم با بُعد

می‌پردازیم. هنوز هم مبدا (نقطه‌ای که $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ نسبت به آن حساب می‌شوند) را ثابت می‌پنداریم.

اگر جسم بُعد داشته باشد، افزون بر نیروهای خارجی که به آن وارد می‌شوند، نیروهای داخلی هم وجود دارند که به بخش‌های مختلف جسم وارد می‌شوند. برای مثال، نیروی خارجی که به اتمی در جسم وارد می شود ممکن است نیروی گرانش باشد، در صورتی که نیروهای داخلی را اتمهای همسایه به آن وارد می‌کنند. با این نیروهای متفاوت چگونه می‌توان کنار آمد؟

در این جا تنها به آن دسته از نیروهای داخلی می‌پردازیم که مرکزی‌اند. بنابراین، نیروی بین دو جسم یا دو نقطه‌ی جسم در راستای خطی است که آن دو را به هم وصل می‌کند. این فرض برای نیروهای رانش و ربایش بین مولکول‌های جسم جامد درست و پذیرفتنی است (اما برای نیروهای الکترو مغناطیسی نادرست است. ما به این نیروها نمی پردازیم). با این فرض، می‌توان قانون سوم نیوتون را به کار برد. برای این که روشن‌تر سخن بگوییم، مجموعه‌ی N ذره‌ی گسسته را در شکل (۱۰-۱۱) در نظر بگیرید. برای حالت پیوسته، فقط علامت جمع در رابطه‌های زیر به علامت انتگرال تبدیل می‌شوند. تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه



شکل ۱۰-۱۱

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i \qquad (۱۱-۱۹)$$

است. نیروهایی که به هر یک از ذره ها وارد می‌شوند $\mathbf{F}_i^{ext}+\mathbf{F}_i^{\text{int}}=d\mathbf{p}_i/dt$ است. پس داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt}&=\frac{d}{dt}\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i\\&=\sum_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\times\mathbf{p}_i+\sum_i\mathbf{r}_i\times\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}\\&=\sum_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\times(m_i\mathbf{v}_i)+\sum_i\mathbf{r}_i\times(\mathbf{F}_i^{ext}+\mathbf{F}_i^{\text{int}})\\&=0+\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{ext}\\&=\sum_i\mathbf{G}_i\end{aligned} \qquad (۱۱-۲۰)$$

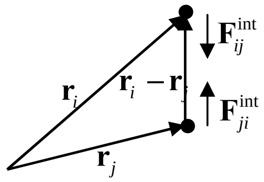
برای رسیدن از سطر دوم به سطر آخر رابطه‌ی (۲۰-۱۱) از $\mathbf{v}_i\times\mathbf{v}_i=0$ و $\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{\text{int}}=0$ استفاده کردیم. نخستین این‌ها روشن است و دومی را در مثال زیر اثبات می‌کنیم. به بیان دیگر، نیروهای داخلی گشتاور تولید نمی‌کنند. این کاملا پذیرفتنی است و می‌گوید که اگر به جسم سخت نیروی خارجی وارد نشود، خود به خود نمی‌چرخد. توجه کنید که سمت راست رابطه‌ی (۲۰-۱۱) شامل گشتاور **کل** نیروهای وارد به جسم است. این گشتاور ممکن است حاصل نیروهایی باشد که به نقاط مختلف جسم وارد می‌شوند. همچنین توجه کنید که در هیچ جا نگفتیم فاصله‌ی ذره‌ها از یکدیگر ثابت است. رابطه‌ی (۲۰-۱۱) برای حالتی هم که ذره‌ها حرکت نسبی دارند، درست است.

مثال ۲-۱۱ نشان دهید که گشتاور کل نیروهای داخلی صفر است.

حل: نیرویی را که ذره‌ی j -ام به ذره‌ی i -ام وارد می‌کند $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$ بنامید. پس

$$\mathbf{F}_i^{\text{int}}=\sum_j\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲۱)$$

گشتاور کل نیروهای داخلی نسبت به مبدا انتخابی در شکل (۱۱-۱۱) عبارت است از



شکل ۱۱-۱۱

$$\mathbf{G}^{\text{int}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} = \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲۲)$$

اگر اندیس‌ها را که دلخواه اند عوض کنیم و از قانون سون نیوتون، $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$، استفاده کنیم به دست می‌آید

$$\mathbf{G}^{\text{int}} = \sum_j \sum_i \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{int}} = -\sum_j \sum_i \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲۳$$

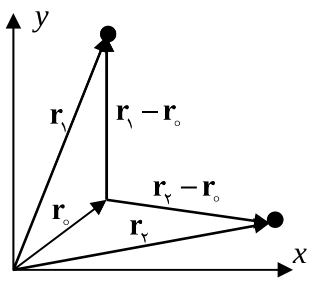
اگر دو رابطه‌ی (۲۲-۱۱) و(۲۳-۱۱) را باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$۲\mathbf{G}^{\text{int}} = \sum_i \sum_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲٤)$$

چون فرض کردیم که نیروهای داخلی مرکزی‌اند، $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$ و $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ موازی و ضرب خارجی‌شان صفر است. بنابراین هر جمله‌ای در جمع بالا صفر است.

این اثبات شاید اندکی پیچیده به نظر بیاید. نکته این است که گشتاورها دو به دو یکدیگر را حذف می‌کنند؛ چون نیروها مساوی و خالف جهت یکدیگراند و بازوی هر دو نسبت به مبداء مساوی است.

۳-۱-۱۱ جسم با بعد، مبداء متحرک



شکل ۱۲-۱۱

اینک آخرین و پیچیده‌ترین وضعیت را برای $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ بررسی می‌کنیم که ممکن است مبداء (نقطه‌ای که نسبت به آن $\mathbf{L}$ و $\mathbf{G}$ حساب می‌شوند) حرکت کند. .نسبت به چارچوب ثابتی، مکان مبداء را با $\mathbf{r}_\circ$ و مکان ذره‌ها را با $\mathbf{r}_i$ نشان دهید. این بردارها در شکل (۱۲-۱۱) نشان داده شده‌اند. تکانه‌ی کل سامانه نسبت به مبداء $\mathbf{r}_\circ$ (که ممکن است حرکت کند) عبارت است از

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_\circ) \qquad (۱۱-۲۵)$$

بنابراین، اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_\circ)\right) \\ &= \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_\circ) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_\circ) + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ) \times m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i - \ddot{\mathbf{r}}_\circ) \qquad (۱۱-۲٦) \\ &= \circ + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ) \times \left(\mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{\text{int}} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_\circ\right)\end{aligned}$$

چون $\mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{\text{int}}$ نیرویی است که به ذره‌ی i- ام وارد می‌شود. یک نتیجه‌ی آنی مثال ۲-۱۱ این است که جمله‌های شامل $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$ حذف می‌شوند (بکوشید آن را اثبات کنید). چون $\sum m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{R}$ است ($M = \sum m_i$ و $\mathbf{R}$ مکان مرکزجرم است) پس داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ) \times \mathbf{F}_i^{ext} - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_\circ) \times \ddot{\mathbf{r}}_\circ \qquad (۱۱-۲۷)$$

جمله‌ی اول گشتاور خارجی نسبت به $\mathbf{r}_\circ$ است. جمله‌ی دوم چیزی است که کاش وجود نمی‌داشت. اگر هر یک از سه شرط زیر برقرار باشد، این جمله صفر می شود.

۱- $\mathbf{R} = \mathbf{r}_\circ$. یعنی مبداء در مرکزجرم باشد.

۲- $\ddot{\mathbf{r}}_\circ = \circ$. یعنی مبداء شتاب نداشته باشد.

۳- $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ موازی $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ باشد.

اگر هر یک از این سه شرط برقرار باشد، می‌توان نوشت

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ) \times \mathbf{F}_i^{ext} \equiv \sum_i \mathbf{G}_i^{ext} \qquad (۱۱-۲۸)$$

به بیان دیگر، گشتاور کل با آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای برابر است. یک نتیجه‌ی آنی این است:

نتیجه: *اگر گشتاور کل وارد به یک سامانه صفر باشد، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه پایسته است. به ویژه، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه‌ی منزوی (سامانه‌ای که به آن نیروی خارجی وارد نمی‌شود) پایسته است.*

گفتار ما تا این لحظه در باره‌ی هر حرکت دلخواه درست است. ذره‌ها می‌توانند نسبت به هم حرکت کنند و $\mathbf{L}_i$ ها ممکن است در هر جهتی باشند. در این فصل ما با حالتی سروکار داریم که $\hat{\mathbf{L}}$ تغییر نمی‌کند (و آن را در جهت محور z فرض می‌کنیم). بنابراین، در این حالت تا حدودی خاص $d\mathbf{L}/dt = d\,(L\hat{\mathbf{L}})/dt = (dL/dt)\hat{\mathbf{L}}$ است. افزون براین، اگر سامانه جسم سختی باشد (یعنی فاصله‌ی نسبی ذره‌ها ثابت باشد) که حرکتش فقط چرخش حول محور ثابتی است، همچنین داریم $L = I\,\omega$ (این رابطه فقط برای مولفه‌ی $\mathbf{L}$ موازی با $\boldsymbol{\omega}$ درست است) و بنابراین، $dL/dt = d\,(I\,\omega)/dt = I\,(d\,\omega/dt) = I\,\dot{\omega} = I\,\alpha$. اگر اندازه‌های دو طرف رابطه‌ی (۲۸-۱۱) را در نظر بگیریم خواهیم داشت

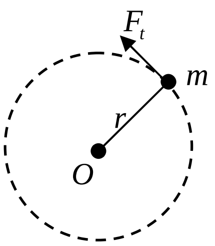
$$G = I\,\alpha \qquad (۱۱-۲۹)$$

تقریبا همیشه گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای را نسبت به نقطه‌ی ثابت یا مرکزجرم حساب خواهیم کرد. برای برقراری رابطه‌ی (۲۸-۱۱) این‌ها نقاط امنی‌اند. تا وقتی که از این نقاط استفاده کنید می‌توانید از رابطه‌ی (۲۸-۱۱) استفاده کنید و چندان نگران اثباتش هم نباشید. البته روشن است که امن بودن این نقاط یعنی این که شرط‌های ۱ و ۲ پس از رابطه‌ی (۲۷-۱۱) دراین نقاط برقراراند. به احتما ل زیاد، با وضعیتی روبرو نخواید شد که ناگزیر از اعمال شرط ۳ باشید. این شرط را در چارچوب‌های شتاب‌دار (فصل ۱۲) می‌توان آسان‌تر فهمید. با این وجود، دلیل آن را می‌توان به صورت زیر فهمید. فرض کنید $\mathbf{r}_\circ$ مبداء مختصات مرجع است که با شتاب $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ حرکت می‌کند. در این چارچوب همه‌ی اجسام وجود یک نیروی "پنداری" را حس می‌کنند. برای مثال، فرض کنید در قطاری ایستاده‌اید و قطار با شتاب a به راست حرکت می‌کند. شما احساس می‌کنید که نیرویی به اندازه‌ی ma و به سوی چپ به شما وارد می‌شود. اگر این نیرو را با نیروی دیگری حذف نکنید (مثلا دسته‌ی صندلی را نگیرید یا به میله‌ای در قطار نچسبید) خواهید افتاد. نیروی پنداری درست مانند نیروی گرانش عمل می‌کند. بنابراین، اساسا به مرکز جرم وارد می‌شود و گشتاور $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)\times(M\ddot{\mathbf{r}}_\circ)$ تولید می‌کند که جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (۲۷-۱۱) است. وقتی این جمله صفر است که مرکزجرم درست در "بالای" مبداء باشد. به بیان دیگر، $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ با $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ موازی باشد.

نکته : یک وضعیت عمومی که شرط ۳ برقرار باشد، غلتش بدون لغزش است. جسمی مانند چرخ، کره یا استوانه را در نظر بگیرید که بدون سُر خوردن بر روی زمین می‌غلتد. نقطه‌ای را در لبه‌ی چرخ نشان کنید. در لحظه‌ای که آن نقطه با زمین در تماس است، می‌توان آن را مبداء در نظر گرفت و فرض کرد که جسم حول محور گذرنده از این نقطه می‌چرخد (این محور را محور لحظه‌ای چرخش می‌گویند). ما در جای خود در همین فصل به حرکت غلتشی خواهیم پرداخت. مسیر نقطه‌ی روی لبه‌ی چرخ یک سیکلویید است. تاجایی که به شرط ۳ مربوط می‌شود، در لحظه‌ای که نقطه با زمین تماس پیدا می‌کند $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ در راستای عمودی است. $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ هم عمودی است (چون درست پیش از رسیدن نقطه به زمین در راستای قائم و رو به پایین حرکت می‌کرد و درست پس از ترک کردن زمین در راستای قائم و رو به بالا حرکت می‌کند). پس، $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ و $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ موازی اند.

۱۱-۲ رابطه‌ی بین گشتاور و شتاب زاویه‌ای

رابطه‌ی (۲۹-۱۱) همارز قانون دوم نیوتون در حرکت چرخشی است. این رابطه می‌گوید که شتاب زاویه‌ای جسم سختی که حول محور ثابتی می‌چرخد با برآیند گشتاورهای وارد به جسم (نسبت به محور چرخش) متناسب است. ضریب تناسب، گشتاور لختی جسم است. مثال‌های این بخش برای فهمیدن این رابطه و استفاده کردن از آن طراحی شده‌اند. پیش از پرداختن به چرخش جسم سخت، به حرکت یک جرم نقطه‌ای توجه کنید. فرض کنید جرم نقطه‌ای m روی دایره‌ای به شعاع r می‌چرخد و برابر شکل (۱۳-۱۱) به آن نیروی مماسی F_t وارد می‌شود. نیروی مماسی، به جرم m شتاب مماسی a_t می‌دهد: $F_t = ma_t$. گشتاور نیروی F_t نسبت به مرکز دایره $G_o = F_t r = (ma_t)r$ است. از فصل ۱ می‌دانیم که شتاب مماسی و شتاب زاویه‌ای با رابطه‌ی $a_t = r\alpha$ به یکدیگر مربوط اند. پس، گشتاور G_o را می‌توان به صورت زیر نوشت

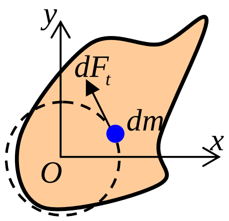


شکل ۱۳-۱۱

$$G_o = (mr\alpha)r = (mr^۲)\alpha = I\alpha \qquad (۱۱\text{-}۳۰)$$

یعنی **گشتاور وارد به ذره با شتاب زاویه‌ای متناسب است**. ضریب تناسب **گشتاور لختی** است.

رابطه (۳۰-۱۱) قانون دوم نیوتون برای حرکت چرخشی است. این آموزه را می توان به جسم سخت با شکل دلخواه تعمیم داد که حول محور ثابتی می چرخد. جسم سخت را می توان همانند شکل (۱۴-۱۱) مجموعه‌ی بزرگی از جزء جرم‌های dm در نظر گرفت. هر جزء جرم حول محوری که از O می‌گذرد، در مسیر دایره می‌چرخد. شتاب مماسی هر جزء جرم $\mathbf{a}_t$ است که نیروی مماسی $d\mathbf{F}_t$ ایجاد می‌کند. برای هر جزء dm از قانون دوم نیوتون داریم $dF_t = (dm)a_t$. گشتاور نیروی $d\mathbf{F}_t$ نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از $dG = rdF_t = (rdm)a_t$. و چون $a_t = r\alpha$ است پس



شکل ۱۴-۱۱

$$dG = (rdm)r\alpha = (r^۲dm)\alpha \qquad (۱۱\text{-}۳۱)$$

توجه کنید که اگرچه شتاب مماسی a_t در هر نقطه‌ی جسم سخت ممکن است فرق داشته باشد اما شتاب زاویه‌ای α همه‌ی اجزاء جرمی برابراند. با این یادآوری می‌توان از رابطه‌ی (۳۱-۱۱) انتگرال گرفت و گشتاور کل را به دست آورد.

$$G_{tot} = \int (r^۲dm)\alpha = \alpha\int r^۲dm \quad \Rightarrow \quad G_{tot} = I\alpha \qquad (۱۱\text{-}۳۲)$$

اگر نیرهای وارد به جزء جرم، علاوه بر مؤلفه‌ی مماسی، مؤلفه‌ی شعاعی هم داشته باشد، هنوز هم رابطه‌ی (۳۲-۱۱) درست است؛ چون راستای مؤلفه‌ی شعاعی نیرو از نقطه‌ی O می‌گذرد و در نتیجه، گشتاورش حول نقطه‌ی O صفر است. به نقاط مختلف جسم سختی که حول محوری ثابت می‌چرخد ممکن است نیروی یکسان وارد نشود و این نقاط شتاب و یا سرعت خطی متفاوت داشته باشند؛ اما شتاب و سرعت زاویه‌ای همه‌ی نقاط جسم سخت در هر لحظه یکسان‌اند. بنابراین، حالت جسم سخت چرخنده در هرلحظه، با مقادیر معین شتاب زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و گشتاور خالص وارد بر آن مشخص می شود.

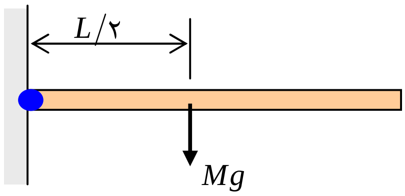
مثال ۳-۱۱ طول میله‌ی همگن شکل (۱۵-۱۱) L و جرم آن M است. یک انتهای میله به دیوار عمودی لولا شده است. لولا اصطکاک ندارد. میله می‌تواند حول این انتهای خود بچرخد. وقتی میله افقی است، آن را از حالت سکون رها می‌کنیم .

(الف): شتاب زاویه‌ای انتهای سمت راست میله را درست پس از رها شدن حساب کنید.

(ب): شتاب خطی انتهای سمت راست میله را درست پس از رها شدن حساب کنید.

حل: **(الف)** نیروی Mg به مرکز هندسی میله وارد می‌شود. گشتاور این نیرو حول محوری که از پیوند گاه می‌گذرد $G=MgL/۲$ است. نیروی دیگری هم در پیوندگاه به میله وارد می‌شود اما گشتاورش نسبت به پیوندگاه صفر است، چون طول بازوی آن صفر است. گشتاور لختی میله‌ی همگن حول انتها $ML^۲/۳$ است. پس، $G=I\alpha=\left(ML^۲/۳\right)\alpha$ و در نتیجه

$$\frac{MgL}{۲}=\frac{۱}{۳}ML^۲\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{۳g}{۲L} \qquad (۱۱-۳۳)$$



شکل ۱۱-۱۵

همه‌ی نقاط میله با این شتاب زاویه‌ای حرکت می‌کنند.

(ب): برای یافتن شتاب خطی انتهای سمت راست میله از رابطه‌ی میان شتاب مماسی و شتاب زاویه‌ای استفاده می‌کنیم. داریم $a_t=L\alpha=۳g/۲$. این نتیجه چشمگیر است زیرا $a_t>g$! یعنی شتاب انتهای سمت راست میله **بزرگتر** از شتاب گرانش بنابراین اگر سکه‌ای را در انتهای میله قرار دهیم، انتهای میله تند از سکه سقوط می‌کند.

مثال ۴-۱۱ صفحه‌ی دایره‌ای شکل با سرعت ۱۲۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد. برای اینکه صفحه را در ۳ دقیقه از حرکت باز بداریم چه گشتاوری باید به آن وارد شود؟

حل: اگر کند شدن حرکت صفحه یکنواخت باشد شتاب زاویه‌ای آن مقدار ثابتی است: $\alpha=$ ثابت و داریم

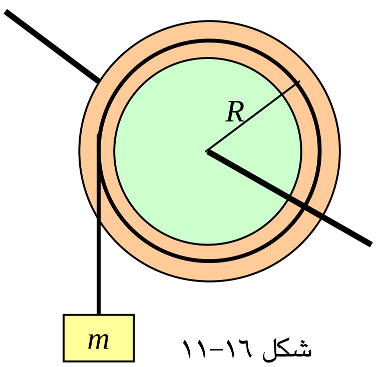
$$\alpha=d\omega/dt \;\Rightarrow\; d\omega=\alpha dt\int_{\omega_۰}^{\omega}d\omega=\int_{t=۰}^{t=t}\alpha dt \;\Rightarrow\; \omega-\omega_۰=at$$

سرعت زاویه‌ای اولیه $\omega_۰=(۱۲۰۰\,rev/\min)(۱\min/۶۰s)=۲۰\,rev/s$ است. چون یک دور ۲π رادیان است. پس، $\omega_۰=۴۰\pi\,rad/s$است. همچنین $t=۳\min=۱۸۰s$ است . در نتیجه، برای این‌که صفحه بایستد یعنی $\omega=۰$ باشد داریم:

$$\omega-\omega_۰=\alpha t \Rightarrow ۰-۴۰\pi\,rad/s=\alpha(۱۸۰s) \;\Rightarrow\; \alpha=-\frac{۴۰\pi}{۱۸۰}\frac{rad}{s^۲}$$

$$\Rightarrow G=I\alpha=\left(\frac{۱}{۲}MR\right)^۲\left(-\frac{۴۰\pi}{۱۸۰}\right)=-\frac{\pi MR^۲}{۹}$$

مثال ۵-۱۱ چرخ چاهی به شعاع R و جرم M و گشتاور لختی I روی محور افقی بدون اصطکاک سوار است. برابر شکل (۱۱-۱۶) از ریسمان بدون جرم چرخ جسمی به جرم m آویزان است. شتاب خطی جرم m، شتاب زاویه‌ای چرخ و کشش ریسمان را حساب کنید



شکل ۱۱-۱۶

حل: گشتاور وارد به چرخ نسبت به محور چرخش آن $G=TR$ است. وزن چرخ و نیروی عمودی که محور به آن وارد می‌کند هر دو از محور چرخش می‌گذرند و گشتاور تولید نمی‌کنند. پس داریم $G=I\alpha=TR\Rightarrow\alpha=TR/I$. از $F=ma$ برای جرم m استفاده کنید. نیروهای عمودی وارد به جرم m عبارت‌اند از کشش T ریسمان که رو به بالا است و نیروی وزن، mg ، که به سوی پائین است. پس

$$T-mg=-ma \;\Rightarrow\; a=\frac{mg-T}{m} \qquad (۱۱-۳۴)$$

این شتاب خطی جرم آویزان، با شتاب مماسی نقطه‌ای در لبه‌ی چرخ برابر است. پس شتاب زاویه‌ای چرخ و شتاب خطی لبه‌ی آن با رابطه‌ی $a=R\alpha$ به یکدیگر مربوط اند

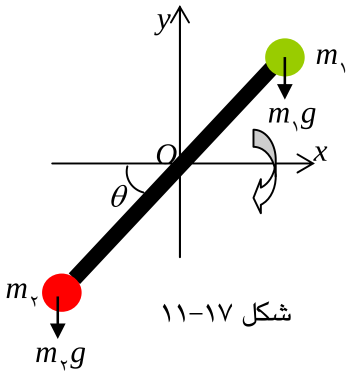
$$a = R\alpha \Rightarrow \frac{mg - T}{m} = R\,(TR/I) \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + mR^2/I}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g}{1 + \dfrac{I}{mR^2}} \quad , \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + \dfrac{I}{mR}} \qquad (۱۱-۳۵)$$

مثال ۱۱-۶ میله‌ی همگنی به جرم M و طول ℓ در صفحه‌ی عمودی حول محوری می‌چرخد که از مرکز جرم آن می‌گذرد. جرم‌های m_1 و m_2 برابر شکل (۱۱-۱۷) به دو انتهای میله وصل‌اند.

(الف): هنگامی که سرعت زاویه‌ای سامانه ω است تکانه‌ی زاویه‌ای آن را حساب کنید.

(ب): شتاب زاویه‌ای سامانه را هنگامی که میله با افق زاویه‌ی θ می‌سازد، بیابید.



شکل ۱۱-۱۷

حل: **(الف)** گشتاور لختی مجموع گشتاورهای لختی میله، جرم m_1 و جرم m_2 است. گشتاور لختی میله حول محوری که از مرکزجرمش می‌گذرد $M\ell^2/12$ است. بنابراین

$$I_{tot} = \frac{1}{12}M\ell^2 + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right) \qquad (۱۱-۳۶)$$

پس، وقتی سرعت زاویه‌ای ω است، تکانه‌ی زاویه‌ای $L = I\omega = \left(\ell^2/4\right)(m_1 + m_2 + M/3)\omega$ است.

(ب) گشتاور نیروی m_1g نسبت به محور چرخش $G_1 = m_1 g\,(\ell/2)\cos\theta$ و به سوی درون صفحه است. گشتاور نیروی m_2g نسبت به محور چرخش $G_2 = m_2 g\,(\ell/2)\cos\theta$ و به سوی بیرون از صفحه است. پس، گشتاور برآیند برابر است با $G = G_1 + G_2 = (1/2)(m_1 - m_2)g\,\ell\cos\theta$. توجه کنید که اگر $m_1 > m_2$ باشد جهت G به سوی درون صفحه است و اگر $m_1 < m_2$ باشد به سوی بیرون از صفحه است برای یافتن α از رابطه‌ی $G = I\alpha$ استفاده کنید.

$$\alpha = \frac{G}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{\ell\left(\dfrac{M}{3} + m_1 + m_2\right)} \qquad (۱۱-۳۷)$$

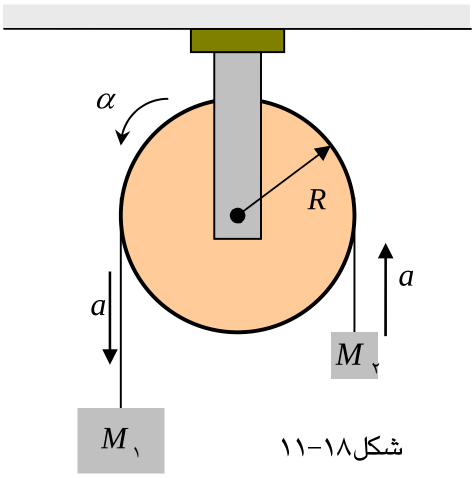
توجه: به ازای $\theta = \pi/2$ و $\theta = -\pi/2$ (وضعیت عمودی میله) α صفر است. بیشینه مقدار α به ازای $\theta = 0, \pi$ (وضعیت افقی) است. سرعت زاویه‌ای سامانه هم تغییر می‌کند، چون α با زمان تغییر می‌کند.

مثال ۱۱-۷ ماشین آتوود قرقره‌ای برابر شکل (۱۱-۱۸) حول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌تواند بچرخد. وزنه‌های M_1 و M_2 با ریسمانی که به دور قرقره پیچیده است به هم وصل اند. اگر گشتاور لختی قرقره I باشد، شتاب این آرایه را بیابید.

حل: برای هر سه جسم نمودار نیروها در شکل (۱۱-۱۹) نشان داده شده است. نقطه‌های اثر نیروها هم نشان داده شده‌اند که برای محاسبه‌ی گشتاور لازم است. محور چرخش، محور قرقره است. معادله‌های حرکت عبارتند از:

برای M_1: $\quad M_1 g - T_1 = M_1 a$

برای M_2: $\quad T_2 - M_2 g = M_2 a$



شکل ۱۸-۱۱

برای قرقره :

$$G = T_1 R - T_2 R = I\alpha$$

$$N - T_1 - T_2 - W_P = 0$$

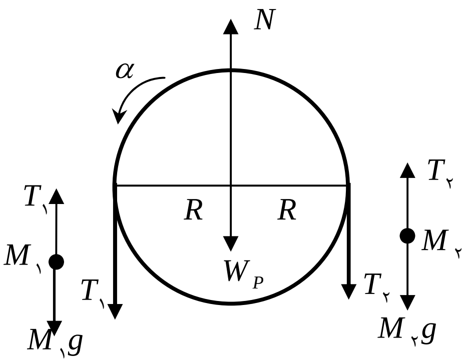
N نیروی محور و W_P وزن قرقره است. رابطه‌ی آخری بدین معنی است که قرقره سقوط نمی کند. با فرض اینکه ریسمان سُر نمی خورد، رابطه‌ی $a = R\alpha$ بین شتاب a و شتاب زاویه ای α برقرار است، یعنی سرعت ریسمان با سرعت یک نقطه در لبه‌ی قرقره برابر است : $v = R\omega$. از رابطه های بالا می‌توان T_1، T_2 و α را حذف کرد.

$$M_1 g - M_2 g - (T_1 - T_2) = (M_1 + M_2)a$$

$$T_1 - T_2 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2}$$

$$M_1 g - M_2 g - \frac{Ia}{R^2} = (M_1 + M_2)\, a$$

$$a = \frac{(M_1 - M_2)\, g}{M_1 + M_2 + \dfrac{I}{R^2}}$$

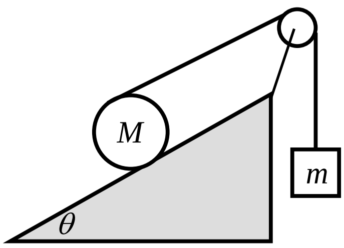


شکل ۱۹-۱۱

اگر قرقره، یک قرص ساده به جرم M باشد، داریم $I = MR^2/2$ و

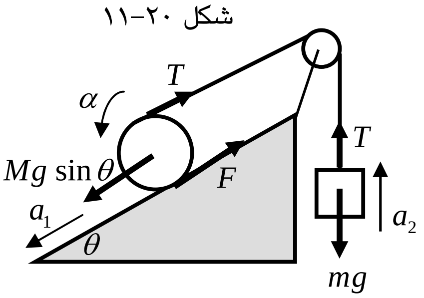
$$a = \frac{(M_1 - M_2)\, g}{(M_1 + M_2 + M/2)} \qquad (۱۱-۳۸)$$

مثال ۸-۱۱ ریسمانی به دور استوانه‌ی همگنی به جرم M پیچیده است. استوانه بر روی سطح شیب‌دار ثابتی قرار دارد. برابر شکل (۲۰-۱۱) ریسمان از روی قرقره‌ی بدون جرم می‌گذرد و از انتهای دیگرش جرم m آویزان است. فرض کنید استوانه بدون لغزش روی سطح می‌غلتد و ریسمان هم همواره با سطح موازی می‌ماند. شتاب جرم m را به دست آورید. کمینه مقدار M/m برای این که استوانه روی سطح به سوی پایین شتاب پیدا کند، چیست ؟



شکل ۲۰-۱۱

حل: نیروهای اصطکاک، کشش و گرانش در شکل (۲۱-۱۱) نشان داده شده‌اند. a_1، a_2 و α را برابر شکل تعریف کنید. این سه شتاب و کشش T و نیروی اصطکاک F پنج مجهول مسئله‌اند. بنابراین، به پنج معادله نیاز داریم که عبارت اند از



شکل ۲۱-۱۱

(۱) از $F = ma$ برای m $\Leftarrow$ $T - mg = ma_2$

(۲) از $F = ma$ برای M $\Leftarrow$ $Mg\sin\theta - T - F = Ma_1$

(۳) از $G = I\alpha$ برای M حول مرکزجرم $\Leftarrow$ $FR - TR = \left(MR^{۲}/۲\right)\alpha$

(٤) شرط نلغزیدن $\Leftarrow$ $\alpha = a_{۱}/R$

(٥) پایستگی طول ریسمان $\Leftarrow$ $a_{۲} = ۲a_{۱}$

به روش‌های مختلف می‌توان این معادله‌ها را حل کرد و مجهول‌ها را به دست آورد. از (۳) و (٤) داریم $F - T = Ma_{۱}/۲$ که اگر با (۲) جمع کنیم خواهیم داشت $Mg\sin\theta - ۲T = ۳Ma_{۱}/۲$. از (۱) برای حذف T و از (٥) برای نوشتن $a_{۱}$ برحسب $a_{۲}$ استفاده کنید. نتیجه :

$$Mg\sin\theta - ۲(mg + ma_{۲}) = \frac{۳Ma_{۲}}{٤} \quad\Rightarrow\quad a_{۲} = \frac{(M\sin\theta - ۲m)g}{\frac{۳}{٤}M + ۲m} \qquad (۱۱-۳۹)$$

البته $a_{۱} = a_{۲}/۲$ است. پس، اگر $M/m > ۲/\sin\theta$ باشد، $a_{۱}$ مثبت می‌شود و استوانه در روی سطح بالا می‌رود.

نکته: در استفاده از $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ می‌توانستیم به جای مرکزجرم، نقطه‌ی ثابتی را برای مبداء برگزینیم. پذیرفتنی‌ترین نقطه، جایی در روی سطح است. در این صورت، نیروی $Mg\sin\theta$ گشتاور تولید می‌کند، اما گشتاور نیروی اصطکاک صفر می‌شود. تکانه‌ی زاویه‌ای استوانه نسبت به نقطه‌ای در روی سطح $I\omega + MvR$ است. بنابراین، $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ به $(Mg\sin\theta)R - T(۲R) = I\omega + Ma_{۱}R$ تبدیل می‌شود که جمع رابطه‌ی (۳) و R برابر رابطه‌ی (۲) است. پس، باز هم به همان نتیجه می‌رسیم.♣

مثال ۹-۱۱ آونگ فیزیکی

جسم سختی را در نظر بگیرید که شکلش دلخواه است و حول محوری می‌چرخد. یک چنین جسمی در شکل (۲۲-۱۱) نشان داده شده است. جرم جسم M و فاصله‌ی مرکزجرم از محور چرخش ℓ است. محور چرخش را در راستای محور x ها فرض کنید. گشتاور لختی جسم نسبت به محورچرخش I_x است. بسامد زاویه‌ای این سامانه نوسان را حساب کنید.

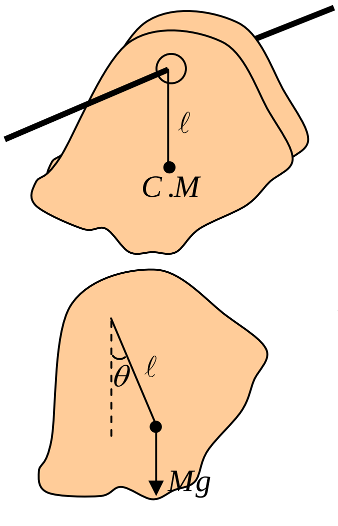
حل: حرکت جسم فقط حرکت چرخشی است. نیروی گرانش تنها نیرویی است که گشتاورش نسبت به محور چرخش غیر صفر است. پس داریم: $-\ell Mg\sin\theta = I_x\alpha = I_x\ddot{\theta}$.

اگر θکوچک باشد $\sin\theta \approx \theta$ است و در نتیجه $I_x\ddot{\theta} + Mg\ell\theta = ۰$ است که همان معادله‌ی حرکت آونگ ساده است و پاسخ آن را می‌شناسیم :

$$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (۱۱-٤۰)$$

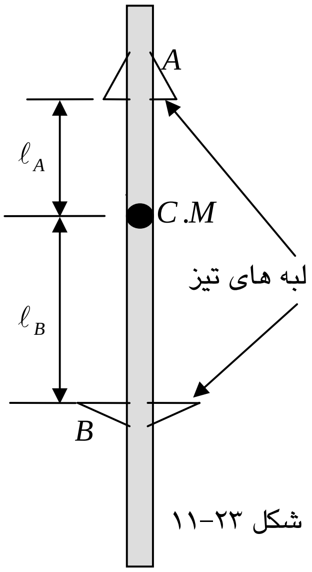
و $\omega = \sqrt{Mg\ell/I_x}$. اگر **شعاع چرخش** را به صورت زیر تعریف کنیم، این نتیجه را ساده تر هم می توان نوشت.

اگر گشتاور لختی یک جسم را نسبت به مرکز جرمش $I_{۰}$ بنامیم، **شعاع چرخش** k عبارت است از $I_{۰} = Mk^{۲}$ یا $k \equiv \sqrt{I_{۰}/M}$. برای نمونه، شعاع چرخش حلقه $k = R$ و یک قرص $k = \sqrt{۱/۲}\,R$ و برای کره‌ی توپر $k = \sqrt{۲/٥}\,R$ اند. با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی می‌توان نوشت $I_x = I_{۰} + M\ell^{۲} = M(k^{۲} + \ell^{۲})$. بنابراین $\omega = \sqrt{g\ell/(k^{۲} + \ell^{۲})}$.



شکل ۲۲-۱۱

مثال ۱۰-۱۱ آونگ کاتر در فاصله‌ی سده‌های شانزده و هفده، دقیق‌ترین اندازه‌گیری‌های g با آونگ انجام می‌گرفت. این شیوه جالب است زیرا تنها کمیت‌های لازم دوره‌ی و ابعاد آونگ است. دقت اندازه‌گیری به دقت در یافتن مرکزجرم و شعاع چرخش بستگی دارد. هنری کاتر، مهندس فیزیک پیشه‌ی انگلیسی با اختراع آونگ کاتر دشواری اندازه‌گیری مرکز جرم و شعاع چرخش را از میان برداشت. آونگ کاتر دو لبه‌ی تیزدارد که درشکل (۲۳-۱۱) دیده می‌شود. آونگ را می‌توان از هر یک از این لبه‌ها آویخت. فرض کنید فاصله‌ی لبه‌های تیز از مرکزجرم به ترتیب ℓ_A و ℓ_B اند. در مثال ۹-۱۱ دیدیم که بسامد زاویه‌ای برای هریک از لبه‌های تیز $\omega=\sqrt{g\ell/(k^۲+\ell^۲)}$ است. در نتیجه؛ دوره‌ی آونگ کاتر برای نوسان حول نقطه‌ی A و نقطه‌ی B عبارت ست از:



شکل ۲۳-۱۱

$$T_A=۲\pi\left(\frac{k^۲+\ell_A^۲}{g\ell_A}\right)^{۱/۲},\ T_B=۲\pi\left(\frac{k^۲+\ell_B^۲}{g\ell_B}\right)^{۱/۲} \qquad (۱۱-٤۱)$$

با تغییر دادن ℓ_A و ℓ_B می‌توان وضعیتی را فراهم کرد که این دو دوره یکسان بشوند: $T_A=T_B=T$ و با حذف T از رابطه‌ی(٤۱-۱۱) آنگاه k^2 را به دست آورد.

$$k^۲=\frac{\ell_A\ell_B^۲-\ell_B\ell_A^۲}{\ell_B-\ell_A}=\ell_A\ell_B \qquad (۱۱-٤۲)$$

و داریم

$$T=۲\pi\left(\frac{\ell_A\ell_B+\ell_A^۲}{g\ell_A}\right)^{۱/۲}=۲\pi\left(\frac{\ell_A+\ell_B}{g}\right)^{۱/۲}\Rightarrow g=٤\pi^۲\left(\frac{\ell_A+\ell_B}{T^۲}\right) \qquad (۱۱-٤۳)$$

زیبایی این ابزار در این است که فقط به اندازه‌گیری فاصله‌ی بین دو لبه نیاز است. می‌توان آن را با دقت اندازه گرفت و نیازی به یافتن مکان مرکزجرم نیست.

۳-۱۱ پایستگی تکانه زاویه ای

در بخش ۱-۲-۱۱ نشان دادیم که اگر گشتاور خالص وارد به یک سامانه‌ی ذرات صفر باشد، تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه ثابت است. این را به صورت نتیجه‌ی رابطه‌ی (۲۸-۱۱) بیان کردیم. در فصل ۷ هم گفتیم که ثابت بودن تکانه‌ی زاویه‌ای یعنی هم اندازه و هم جهت بردار تکانه‌ی زاویه‌ای بدون تغییر می‌مانند. اگر گشتاور کل وارد به سامانه صفر باشد، آنگاه رابطه (۲۸-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\sum\mathbf{G}_i^{ext}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}=۰ \qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{L}=\text{ثابت} \qquad (۱۱-٤٤)$$

برای مجموعه‌ای از ذرات، این قانون پایستگی را به صورت $\sum\mathbf{L}_i=$ ثابت می‌نویسیم. اگر توزیع جرم سامانه تغییر کند، گشتاور لختی آن هم تغییر خواهد کرد. می‌توان قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{L}_i=\mathbf{L}_f=\text{ثابت} \qquad (۱۱-٤٥)$$

که در آن $\mathbf{L}_i$ تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه پیش از تغییر توزیع جرم و، $\mathbf{L}_f$ تکانه‌ی زاویه‌ای پس از تغییر توزیع جرم است. تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه‌ای که حول **محور ثابتی** مانند محور z می‌چرخد، $L_z=I\omega$ است. L_z مؤلفه‌ی $\mathbf{L}$ در راستای محور چرخش و I گشتاور لختی جسم نسبت به این محور است. تحت این شرایط رابطه‌ی (٤٥-۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

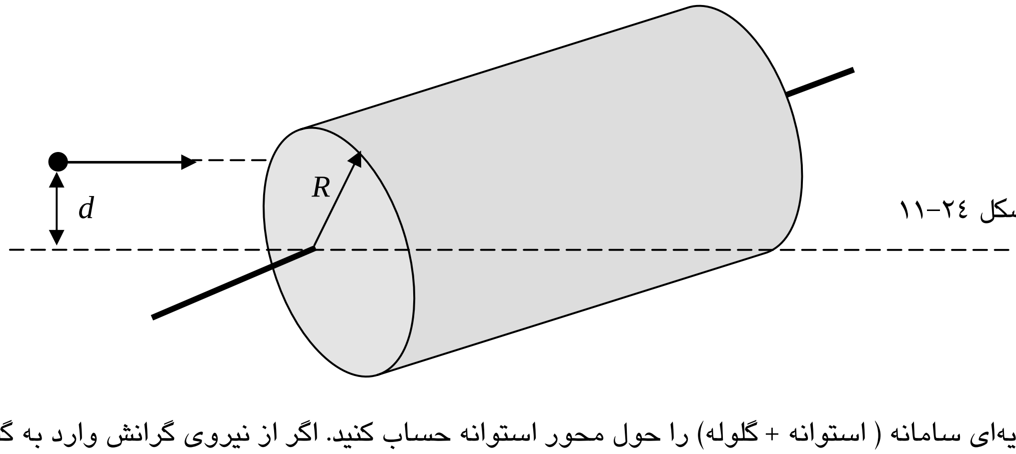
$$I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f = \text{ثابت} \qquad (۱۱-٤٦)$$

رابطه‌ی (٤٦-۱۱) هنگامی درست است که چرخش حول محور ثابتی باشد و یا حول محوری باشد که از مرکزجرم سامانه می‌گذرد و همواره موازی خود باقی می‌ماند. در هر دو حالت، لازم است که گشتاور کل وارد به سامانه صفر باشد. در بخش ۱۱-۱ قضیه‌ی مهمی را در باره‌ی پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مرکزجرم ثابت کردیم که می‌گوید

بدون اینکه نگران حرکت مرکزجرم باشیم؛ گشتاور کل وارد به یک جسم نسبت به مرکز جرم جسم همواره با آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای برابر است.

و گفتیم که حتی اگر مرکزجرم سامانه شتاب هم داشته باشد این قضیه درست است به شرطی که $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ هر دو نسبت به مرکزجرم حساب شوند. مثال‌های زیادی برای نمایش پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای وجود دارد که با برخی از آنها آشنا هستید. بازوهایتان را از هم باز کنید و بر دو پاشنه‌ی پای خود بچرخید. در حالی که می‌چرخید بازوهایتان را جمع کنید؛ خواهید دید که سرعت چرخش شما افزایش می‌یابد. اگر این کار را روی یخ انجام دهید؛ اثر چشمگیرتر خواهد بود. در وضعیت نخست اگر سرعت زاویه‌ای شما ω_i باشد، با جمع کردن بازوهایتان؛ توزیع جرم را تغییر می‌دهید و در نتیجه گشتاور لختی کاهش پیدا می‌کند، برای اینکه تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته بماند؛ سرعت چرخش شما افزایش پیدا می‌کند و به ω_f می‌رسد. با این کار، می‌کوشید رابطه‌ی $I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f$ را برقرار نگه دارید. شناگرهایی که از سکوی پرش به استخر می‌پرند؛ برای این که بتوانند در هوا دور خود بچرخند بدن خود را جمع می‌کنند، با این کار آنها می‌کوشند از گشتاور لختی خود کاسته و به سرعت زاویه‌ای شان بیفزایند. این کار شدنی است زیرا تکانه‌ی زاویه‌ای آنان پایسته است (شناگر را یک سامانه‌ی منزوی می‌پنداریم.)

مثال ۱۱-۱۱ گلوله‌ای به جرم m را با سرعت $v_\circ$ به سوی استوانه‌ی توپری با جرم M و شعاع R شلیک می‌کنیم. استوانه برابر شکل (٢٤-۱۱) روی محور افقی بدون اصطکاک سوار است که از مرکز جرم آن می‌گذرد. راستای حرکت گلوله به محور استوانه عمود است و فاصله‌ی عمودی آن با محور $d < R$ است. گلوله با استوانه برخورد می‌کند و به سطح آن می‌چسبد. سرعت زاویه‌ای سامانه (گلوله + استوانه) را پس از برخورد به دست آورید.



شکل ٢٤-۱۱

حل: تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه (استوانه + گلوله) را حول محور استوانه حساب کنید. اگر از نیروی گرانش وارد به گلوله چشم پوشی کنیم، برآیند گشتاور نیروهای خارجی نسبت به این نقطه در روی محور صفر است. در نتیجه، تکانه‌ی زاویه‌ای پیش از برخورد و پس از آن برابر است. پیش از برخورد فقط گلوله نسبت به محور استوانه تکانه‌ی زاویه‌ای دارد. اندازه‌ی این تکانه‌ی زاویه‌ای $mv_\circ d$ و جهت آن در راستای محور و به سوی صفحه کاغذ است. پس از برخورد، تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه $I\,\omega$ است. I گشتاور لختی کل سامانه (استوانه + گلوله) است و برابر $I = (۱/۲)MR^۲ + mR^۲$ است. چون تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته

است، پس، داریم

$$mv_{\circ}d = I\omega = (\frac{۱}{۲}MR^{۲} + mR^{۲})\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mv_{\circ}d}{\frac{۱}{۲}MR^{۲} + mR^{۲}} \qquad (۱۱-۴۷)$$

که روشی برای اندازه‌گیری سرعت گلوله است!

مثال ۱۲-۱۱ صفحه‌ی گرامافونی به جرم M و شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω_a حول محور بدون اصطکاک خود می‌چرخد. عنکبوتی به جرم m از سقف جدا شده و به طور قائم بر لبه‌ی صفحه می‌افتد. سرعت زاویه‌ای جدید ω_b صفحه چقدر است؟ عنکبوت سپس آهسته به سوی مرکز صفحه حرکت می‌کند. هنگامی که عنکبوت به فاصله‌ی r از مرکز صفحه می‌رسد، سرعت زاویه‌ای ω_c چقدر است.

حل: سامانه را مجموعه‌ی صفحه و عنکبوت در نظر بگیرید. چون محور بدون اصطکاک است و از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی شده است، پس گشتاور خارجی وارد به سامانه صفر و در نتیجه تکانه‌ی زاویه‌ای همواره یکسان و پایسته است. درست پیش از آنکه عنکبوت بر لبه‌ی صفحه سقوط کند، نسبت به محور چرخش (محورصفحه) تکانه‌ی زاویه‌ای ندارد و تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه فقط مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای صفحه است. صفحه قرصی است که گشتاور لختی آن نسبت به محور گذرنده از مرکز $I_t = MR^{۲}/۲$ است. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه برابر است با: $L = I_t\omega_a = (MR^{۲}/۲)\omega_a$. وقتی عنکبوت در لبه‌ی صفحه قرار گرفت، همراه صفحه وبا سرعت زاویه‌ای ω_b می‌چرخند. گشتاور لختی سامانه این بار $I_b = (MR^{۲}/۲) + mR^{۲}$ است . پس، تکانه‌ی زاویه‌ای عبارت ست از $L = I_b\omega_b = (1/2)(M + 2m)R^2\omega_b$. حال با استفاده از قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای داریم

$$\begin{aligned} L_i &= L_f = I_t\omega_a = I_b\omega_b \\ &= \frac{۱}{۲}MR^{۲}\omega_a = \frac{۱}{۲}(M + ۲m)R^{۲}\omega_b \quad \Rightarrow \quad \omega_b = \frac{M}{M + ۲m}\omega_a \end{aligned} \qquad (۱۱-۴۸)$$

وقتی عنکبوت در فاصله‌ی r از مرکز قرار دارد، گشتاور لختی سامانه $I_C = (۱/۲)MR^{۲} + mr^{۲}$ و تکانه‌ی زاویه‌ای $L = I_C\omega_C = (\frac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_C$ اند. پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای می‌گوید

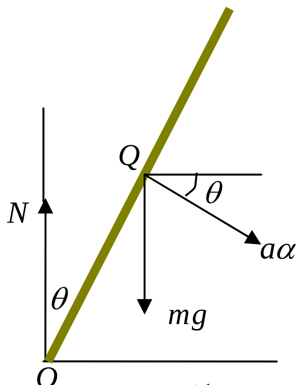
$$\frac{۱}{۲}(MR^{۲} + mr^{۲})\omega_c = \frac{۱}{۲}MR^{۲}\omega_a \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{MR^{۲}/۲}{(\frac{۱}{۲}MR^{۲} + mr^{۲})}\omega_a = \frac{\omega_a}{۱ + \frac{۲mr^{۲}}{MR^{۲}}} \qquad (۱۱-۴۹)$$

مثال ۱۳-۱۱ (**الف**) میله‌ی یکنواخت نازکی به جرم m و طول $۲a$ برابر شکل (۲۵-۱۱) به طور عمودی روی سطح ناهموار ایستاده است. میله می‌تواند، بدون این که انتهای آن در روی زمین بلغزد، سقوط کند. هنگامی که میله با خط قائم زاویه‌ی θ می-سازد، نشان دهید که سرعت زاویه‌ای آن عبارت است از:

$$\omega^{۲} = \frac{۳g}{۲a}(۱ - \cos\theta) \qquad (۱۱-۵۰)$$

(**ب**) نیروی عمودی که سطح در این وضعیت به میله وارد می‌کند چقدر است؟

(**پ**) اگر در $\theta = ۳۰^{\circ}$ انتهای میله در روی زمین شروع به لغزیدن کند؛ ضریب اصطکاک را بیابید.



شکل ۲۵-۱۱

حل: (**الف**) نیروهای وارد به میله عبارتند از وزن mg ، نیروی عمودی N و نیروی اصطکاک $f=\mu N$. نیروهای N و f در نقطه‌ی O به انتهای میله وارد می‌شوند. برای یافتن ω، گشتاور وارد به میله، G، و شتاب زاویه‌ای را در نظر بگیرید که به هم مربوط اند: $G=I\alpha$. اگر گشتاور را نسبت به نقطه‌ی O حساب کنیم، فقط نیروی mg گشتاور ایجاد می‌کند که برابر است با $G_o=mga\sin\theta=I_o\alpha=(4/3)ma^2\alpha$. گشتاور لختی میله نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از $I_o=m\ell^2/3=m(2a)^2/3=4ma^2/3$. داریم

$$\alpha\equiv\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\;\Rightarrow\;\omega\frac{d\omega}{d\theta}=\alpha=\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta \qquad (۱۱-۵۱)$$

در نتیجه داریم

$$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta d\theta\;\Rightarrow\;\frac{1}{2}\omega^2\Big|_0^{\omega}=\left[-\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\theta\right]_0^{\theta}\;\Rightarrow\;\omega^2=\frac{3g}{2a}(1-\cos\theta). \qquad (۱۱-۵۲)$$

(**ب**): مرکزجرم میله، نقطه‌ی Q ، نسبت به نقطه‌ی O دارای شتاب زاویه‌ای α است و بنابراین، شتاب خطی آن $a\alpha$ است. این شتاب به میله عمود است. آن را به دو مؤلفه‌ی افقی $a\alpha\cos\theta$ ، و عمودی $a\alpha\sin\alpha$ می‌توان تجزیه کرد. مؤلفه‌ی عمودی رو به پائین و مؤلفه افقی به سوی راست است. شتاب افقی مرکزجرم را نیروی μN به وجود می‌آورد و شتاب عمودی آن بر اثر برآیند نیروهای mg و N است. پس با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

$$\begin{aligned} mg-N&=ma\alpha\sin\theta=\frac{3}{4}mg\sin^2\theta \\ f=\mu N&=ma\alpha\cos\theta=\frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad (۱۱-۵۳)$$

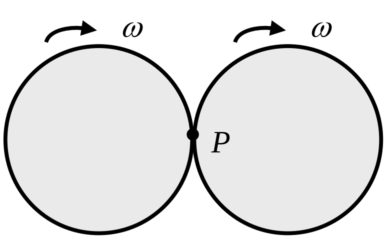
از این دو رابطه خواهیم داشت

$$N=mg-\frac{3}{4}mg\sin^2\theta=\frac{mg}{4}(4-3\sin^2\theta) \qquad (۱۱-۵۴)$$

(**پ**): در $\theta=30^\circ$، لغزش آغاز می‌شود. در این زاویه f مقدار حدی یا بیشینه مقدار خود را دارد. پس

$$\mu_s=\frac{f}{N}=\frac{\frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta}{\frac{mg}{4}(4-3\sin^2\theta)}=\frac{3\sin\theta\cos\theta}{(4-3\sin^2\theta)}=\frac{3(1/2)(\sqrt{3}/2)}{4-3/4}=\frac{3\sqrt{3}}{13}=0{,}4 \qquad (۱۱-۵۵)$$

مثال ۱۴-۱۱ دو سکه با فاصله‌ی بسیار اندکی از هم قرار دارند وبا سرعت زاویه‌ای ω برابر شکل (۲۶-۱۱) می‌چرخند. سکه‌ها را به هم می‌چسبانیم، حرکت آنها را پس از به هم چسبیدن توصیف کنید.



شکل ۲۶-۱۱

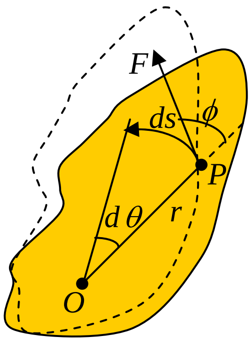
حل: پیش از به هم چسبیدن سکه‌ها مرکزجرم در حال سکون است. بنابراین، همواره در حال سکون باقی خواهد ماند؛ چون سامانه را منزوی پنداشته‌ایم ، فقط (حداکثر) حرکت چرخشی حول نقطه‌ی P می‌تواند وجود داشته باشد. از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

استفاده کنید. $\mathbf{L}$ هر یک از سکه‌ها نسبت به نقطه‌ی P بنا به رابطه‌ی (۴۲-۱۰) عبارت است از $\mathbf{L}_P = \mathbf{L}' + M\mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM}$) قضیه‌ی ۱-۱۰). جمله‌ی دوم صفر است، چون $\mathbf{V}_{CM} = 0$ است. پس، $\mathbf{L}_P = \mathbf{L}' = I\omega = (mR^2/2)\omega$. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای کل حول نقطه‌ی P دو برابر این مقدار و برابر $mR^2\omega$ است. پس از به هم چسبیدن سکه‌ها باید داشته باشیم $mR^2\omega = I'\omega'$. در اینجا I' گشتاور لختی سامانه حول نقطه‌ی P است. هر یک از سکه‌ها حول P می‌چرخد. بنا به قضیه‌ی محورهای موازی $I' = 2(mR^2 + mR^2/2) = 3mR^2$ است. پس: $mR^2\omega = (3mR^2)\omega' \Rightarrow \omega' = \omega/3$. سامانه با ۱/۳ سرعت زاویه‌ای اولیه حول نقطه‌ی P ساعتگرد می‌چرخد.

۴-۱۱ کار و انرژی در حرکت چرخشی

۱-۴-۱۱ کار در حرکت چرخشی

در این بخش به انرژی جنبشی چرخشی جسم سخت می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه تغییر این انرژی به کار نیروهای خارجی وارد به جسم سخت مربوط است. در اینجا هم خود را به چرخش جسم سخت حول محور ثابت محدود می‌کنیم. همچنین نشان خواهیم داد که رابطه‌ی $G = I\alpha$ را می‌توان از آهنگ تغییر انرژی هم به دست آورد. در شکل (۲۷-۱۱) جسم سختی نشان داده شده است که حول محور ثابتی می‌چرخد که از نقطه‌ی O می‌گذرد. فرض کنید نیروی خارجی $\mathbf{F}$ در نقطه‌ی P به جسم وارد می‌شود. کار این نیرو برای جابه‌جایی $ds = r\,d\theta$ برابر است با:



شکل ۲۷-۱۱

$$dW = \mathbf{F}.\mathbf{ds} = (F\sin\phi)r\,d\theta \qquad (۱۱\text{-}۵۶)$$

$F\sin\phi$ مؤلفه‌ی نیروی F در امتداد جابه‌جایی است. توجه کنید که مؤلفه‌ی شعاعی F کار انجام نمی‌دهد؛ چون این مولفه بر جابه‌جایی عمود است. اندازه‌ی گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول محوری که از O می‌گذرد $rF\sin\phi$ است. پس، می‌توان رابطه‌ی (۵۶-۱۱) را به صورت زیر نوشت

$$dW = G\,d\theta \qquad (۱۱\text{-}۵۷)$$

آهنگ انجام کار نیروی $\mathbf{F}$ برای چرخاندن جسم حول محور ثابت برابر است

$$\frac{dW}{dt} = G\frac{d\theta}{dt} \qquad (۱۱\text{-}۵۸)$$

کمیت dW/dt بنا به تعریف، توان لحظه‌ای، P، است که نیروی $\mathbf{F}$ به جسم منتقل می‌کند. چون $d\theta/dt = \omega$ است پس، رابطه (۵۷-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = G\omega \qquad (۱۱\text{-}۵۹)$$

که همانند رابطه‌ی $P = Fv$ در حرکت خطی است. $dW = G\,d\theta$ همانند چرخشی $dW = F_x dx$ است.

۲-۴-۱۱ قضیه ی کار ـ انرژی در حرکت چرخشی:

در حرکت خطی، دیدیم که مفهوم انرژی و به ویژه قضیه‌ی کار ـ انرژی تا چه اندازه برای توصیف حرکت یک سامانه سودمند بود. در بررسی حرکت چرخشی هم مفهوم انرژی به همان اندازه سودمند است. از آموخته‌هایمان در حرکت خطی انتظار داریم که برای حرکت چرخشی جسم متقارن (مانند یک چرخ) حول محور ثابت، کار نیروهای خارجی با تغییر در انرژی جنبشی حرکت چرخشی برابر باشد. اینک می‌خواهیم این قضیه را ثابت کنیم. برای این کار از رابطه‌ی $G = I\alpha$ آغاز می کنیم.

$$G = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega \qquad (۱۱-۶۰)$$

اگر رابطه‌ی بالا را بازنویسی کنیم و توجه داشته باشیم که $G\,d\theta = dW$ خواهیم داشت

$$G\,d\theta = dW = I\,\omega d\omega \qquad (۱۱-۶۱)$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه و با توجه به این که I مقدار ثابتی است، داریم

$$W = \int_{\theta_۰}^{\theta} G\,d\theta = \int_{\omega_۰}^{\omega} I\,\omega d\omega = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ - \frac{۱}{۲}I\omega_۰^۲ \qquad (۱۱-۶۲)$$

رابطه‌ی (۶۲-۱۱) بیان قضیه‌ی کار- انرژی در حرکت چرخشی جسم سخت است. در جابه‌جایی زاویه‌ای از $\theta_۰$ تا θ، سرعت زاویه‌ای از $\omega_۰$ به ω تغییر می‌کند. این رابطه همانند رابطه‌ی قضیه‌ی کار- انرژی در حرکت خطی است که به‌جای m اینک I و به جای سرعت خطی v، اینک سرعت زاویه‌ای ω قرار دارند. پس

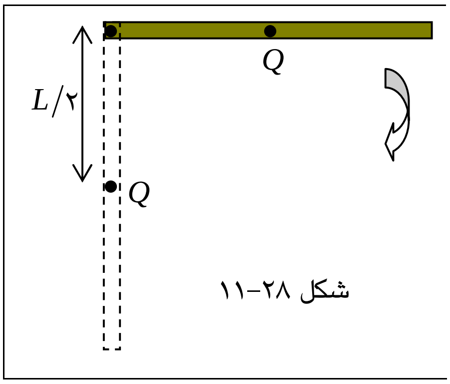
کار کل نیروهای خارجی در چرخش جسم سخت متقارن حول محور ثابت با تغییر انرژی جنبشی چرخشی جسم برابر است.

مثال ۱۴-۱۱ میله‌ی همگن شکل (۲۸-۱۱) با طول L و جرم M می‌تواند حول محوری که از یک انتهایش می‌گذرد بچرخد. پیوندگاه اصطکاک ندارد. میله را در وضعیت افقی از حالت سکون رها می کنیم.

(الف): سرعت زاویه‌ای میله را هنگامی که در وضعیت عمودی قرار می‌گیرد به دست آورید.

ب. سرعت خطی مرکز جرم و سرعت خطی پائین ترین نقطه‌ی میله را در وضعیت عمودی حساب کنید.

حل: (**الف**) انرژی مکانیکی سامانه را در نظر بگیرید. وقتی میله در وضعیت افقی قرار دارد انرژی جنبشی آن صفر و انرژی پتانسیل مرکزجرم آن (نقطه‌ی Q) $MgL/۲$ است. وقتی میله به وضعیت عمودی می‌رسد همه‌ی انرژی آن جنبشی و برابر $(۱/۲)I\omega^۲$ می‌شود. میله حول انتهایش می‌چرخد و گشتاور لختی آن نسبت به این نقطه $I = ML^۲/۳$ است. چون انرژی مکانیکی پایسته است، پس داریم



شکل ۲۸-۱۱

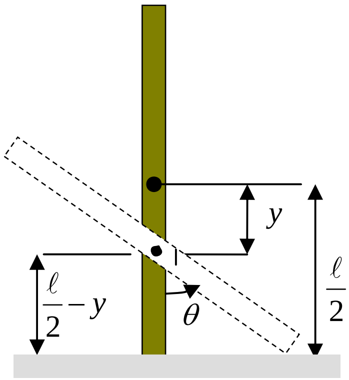
$$\frac{۱}{۲}MgL = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}ML^۲\right)\omega^۲ \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{۳g/L} \qquad (۱۱-۶۳)$$

(ب) : سرعت خطی مرکزجرم $V_Q = r\omega = (L/2)\omega = (1/2)\sqrt{3gL}$ است و

سرعت خطی پائین‌ترین نقطه‌ی میله $۲V_Q = \sqrt{۳gL}$ است

مثال ۱۵-۱۱ میله‌ی شکل (۲۹-۱۱) به طول ℓ و جرم M به طور قائم روی سطح بدون اصطکاک میزی قرار دارد. میله سقوط می‌کند. سرعت مرکزجرم میله را به صورت تابعی از مکان به دست آورید.

حل: نکته در این است که چون نیروی افقی وجود ندارد پس، مرکزجرم باید در امتداد عمودی سقوط کند. چون می‌خواهیم سرعت را به صورت تابعی از مکان به دست آوریم از روش انرژی برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم. شکل (۲۹-۱۱) وضعیت را در هنگامی نشان می‌دهد که میله به اندازه‌ی زاویه‌ی θ چرخیده است. در این وضعیت مرکزجرم به اندازه‌ی y فرو می‌افتد. انرژی اولیه $E = T_۰ + V_۰ = ۰ + mg\ell/۲$ است. در زمانی دیرتر که میله به اندازه‌ی θ سقوط می‌کند، انرژی جنبشی $T = (۱/۲)I_۰\dot{\theta}^۲ + (۱/۲)M\dot{y}^۲$ است.



شکل ۲۹-۱۱

در این وضعیت انرژی پتانسیل $V=Mg\,(\ell/۲-y)$ است. چون اصطکاک وجود ندارد انرژی مکانیکی پایسته است و بنابراین، داریم

$$T+U=T_{\circ}+V_{\circ}=Mg\,\frac{\ell}{۲}$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}M\dot{y}^{۲}+\frac{۱}{۲}I_{\circ}\dot{\theta}^{۲}+Mg\left(\frac{\ell}{۲}-y\right)=Mg\,\frac{\ell}{۲} \qquad (۱۱\text{-}٦٤)$$

از شکل (۲۹-۱۱) پیداست که $y=(۱-\cos\theta)\,\ell/۲$ و بنابراین،

$$\dot{y}=\frac{\ell}{۲}\sin\theta\,\dot{\theta}\quad\Rightarrow\quad\dot{\theta}=\frac{۲}{\ell\sin\theta}\dot{y} \qquad (۱۱\text{-}٦٥)$$

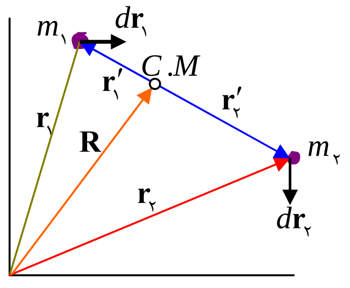
چون $I_{\circ}=M\,\ell^{۲}/۱۲$ ، پس نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۱}{۲}M\dot{y}^{۲}+\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱۲}Ml^{۲}\left(\frac{۲}{\ell\sin\theta}\right)^{۲}\dot{y}^{۲}+Mg\left(\frac{\ell}{۲}-y\right)=\frac{۱}{۲}Mg\,\ell$$

$$\Rightarrow\ \dot{y}^{۲}=\frac{۲gy}{۱+\dfrac{۱}{۳\sin^{۲}\theta}}\quad\Rightarrow\quad\dot{y}=\left[\frac{٦gy\sin^{۲}\theta}{۳\sin^{۲}\theta+۱}\right]^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۱۱\text{-}٦٦)$$

۵-۱۱ غلتش

وقتی جسمی مانند چرخ گاری در امتداد مسیر راست‌خط جابه‌جا می‌شود حرکت مرکزجرم آن یک حرکت انتقالی رو به جلو و راست‌خط است. مرکزجرم مثل یک جرم نقطه‌ای حرکت می‌کند که تحت تأثیر برآیند نیروهای خارجی است. اگر به جای مرکز جرم به نقطه‌ی دیگری در روی چرخ نگاه کنید و مسیر آن را پی گیری کنید خواهید دید که این مسیر پیچیده‌تر است: خمی سهمی‌گون که رو به پائین گشوده شده است و با جابه‌جایی گاری، خود را تکرار می‌کند. این مشاهده‌ی ساده نشان می‌دهد که غلتش یک جسم آمیزه‌ای از حرکت انتقالی و حرکت چرخشی است. مؤلفه‌ی انتقالی حرکت غلتشی به خاطر این است که محور چرخش ثابت نیست، بلکه جابه‌جا می‌شود. بررسی حرکت عمومی جسم سخت، هنگامی که محور چرخش ثابت نیست، کار پیچیده‌ای است. پیش‌تر دیدیم که حرکت عمومی سامانه‌ی ذرات را می‌توان ترکیبی از حرکت انتقالی مرکزجرم بعلاوه‌ی یک حرکت چرخشی حول مرکزجرم دانست. بار دیگر به چرخ گاری برگردیم. همان‌گونه که گفتیم، از دید ناظری در روی زمین مرکزجرم چرخ گاری با سرعت خطی V_{cm} رو به جلو حرکت می‌کند و هر نقطه‌ی دیگر حول مرکز چرخ می‌چرخد و به همراه مرکز جرم جابه‌جا می‌شود. ناظری که در گاری نشسته است اگر به چرخ نگاه کند خواهد گفت: همه‌ی نقاط چرخ، فقط حول محوری می‌چرخند که از مرکز چرخ می‌گذرد. یعنی، چرخ فقط با سرعت زاویه‌ای ω حول این محور می‌چرخد و حرکت انتقالی هم ندارد. این جاده است که با سرعت V_{cm} به سوی او حرکت می‌کند. از دید این ناظر نیز می‌توان حرکت را آمیزه‌ای از حرکت چرخشی و انتقالی دانست. قضیه شَله (ChaslesTheorem) نشان می‌دهد که همواره می‌توان حرکت عمومی جسم سخت را ترکیبی از حرکت انتقالی مرکزجرم بعلاوه چرخش حول مرکزجرم دانست. اثبات قضیه در حالت عمومی از پیچیدگی‌های ریاضی برخوردار است و فهمیدن جزئیات آن برای پیگیری موضوع ضروری نیست؛ اما نتیجه‌ی آن جالب است و اثبات آن تمرین زیبایی برای جبر بردارها است. برای دوری از پیچیدگی‌های جبری، جسم سخت ساده‌ی شکل (۳۰-۱۱) را در نظر می‌گیریم که از دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ تشکیل شده است که با میله‌ای به هم وصل اند.



شکل ۳۰-۱۱

اثبات قضیه ی شَلَه: بردارهای مکان جرم‌های m_1 و m_2 را به ترتیب $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و مکان مرکز جرم را $\mathbf{R}$ بنامید. بردارهای $\mathbf{r}'_1$ و $\mathbf{r}'_2$ مکان جرم‌های m_1 و m_2 نسبت به مرکزجرم اند. در یک جابه‌جایی دلخواه سامانه، جرم m_1 به اندازه‌ی $d\mathbf{r}_1$ و جرم m_2 به اندازه‌ی $d\mathbf{r}_2$ جابه‌جا می‌شوند. چون جسم، سخت است $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ مستقل از یکدیگر نیستند. بررسی خود را با یافتن رابطه‌ی میان $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ آغاز می‌کنیم. فاصله‌ی میان m_1 و m_2 مقدار ثابت ℓ است. بنابراین: $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \ell$ یا

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \ell^2 \qquad (۱۱-۶۷)$$

اگر از این رابطه مشتق بگیریم و به یاد داشته باشیم که $d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}\cdot d\mathbf{A}$ است ،خواهیم داشت

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) = 0 \qquad (۱۱-۶۸)$$

این رابطه، شرط سخت بودن جسم است که در پی آن بودیم. رابطه‌ی بالا به دو شیوه می‌تواند برقرار باشد: (الف) $d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_2$ باشد. (ب) $(d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2)$ به $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ عمود باشد. اینک به حرکت انتقالی مرکزجرم توجه کنید. بنا به تعریف، رابطه (۲-۸)، داریم

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (۱۱-۶۹)$$

بنابراین، جابه‌جایی جزیی مرکزجرم، $d\mathbf{R}$ ، عبارت است از

$$d\mathbf{R} = \frac{m_1 d\mathbf{r}_1 + m_2 d\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (۱۱-۷۰)$$

حال اگر این جابه‌جایی انتقالی مرکزجرم را از $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ کم کنیم، **جا به جایی‌های باقیمانده** $d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{R}$ و $d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{R}$ باید فقط به چرخش حول مرکزجرم حسم مربوط باشد. پیش از بررسی این نکته، توجه کنید که چون $\mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}'_2$ و $\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}'_1$ اند، بنابراین، داریم

$$d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{R} = d\mathbf{r}'_1 \quad \text{و} \quad d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{R} = d\mathbf{r}'_2 \qquad (۱۱-۷۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۱-۷۰) و (۱۱-۷۱) خواهیم داشت

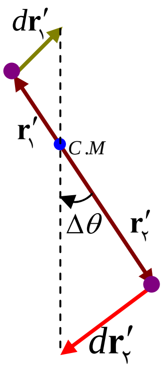
$$d\mathbf{r}'_1 = d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{R} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)(d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) \qquad (۱۱-۷۲)$$

$$d\mathbf{r}'_2 = d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{R} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)(d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) \qquad (۱۱-۷۳)$$

توجه کنید که اگر $d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_2$ باشد، یعنی شرط اول برای برقراری رابطه‌ی (۱۱-۶۸)، آنگاه جابه‌جایی‌های باقیمانده $d\mathbf{r}'_1$ و $d\mathbf{r}'_2$ صفر می‌شوند و حرکت جسم سخت، انتقالی بدون چرخش خواهد بود. ما باید نشان دهیم که جابه‌جایی‌های باقیمانده حرکت چرخشی خالص حول مرکز جرم است. شکل (۱۱-۳۱) نمایشی از چرخش خالص است. پس، باید نشان دهیم که شرط (ب) برقرار و نمایش حرکت چرخشی است. آیا $d\mathbf{r}'_1$ و $d\mathbf{r}'_2$ بر خط $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ عمود است؟ با استفاده از رابطه های (۱۱-۷۲) و (۷۳-۱۱) داریم

$$d\mathbf{r}'_1\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) = d\mathbf{r}'_1\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)(d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0 \qquad (۱۱-۷۴)$$

و به همین ترتیب می توان نشان داد $d\mathbf{r}'_2\cdot(\mathbf{r}'_1 - r'_2) = 0$ است. سرانجام، باید نشان دهیم جابه‌جایی‌های باقیمانده با چرخش‌های یکسان به اندازه‌ی $\Delta\theta$ متناظراند.



شکل ۳۱-۱۱

این شرط با رابطه‌ی برداری زیر هم‌ارز است

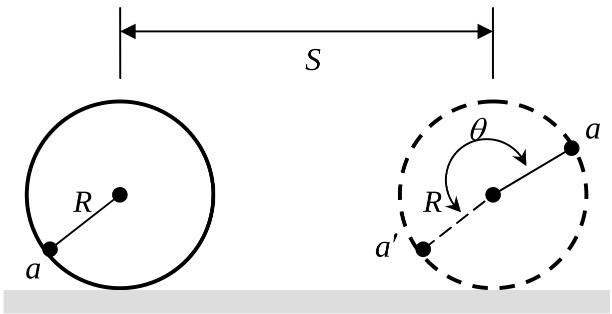
$$\frac{d\mathbf{r}'_1}{r'_1}=-\frac{d\mathbf{r}'_2}{r'_2} \qquad (۱۱-۷۵)$$

با استفاده از رابطه های (۷۲-۱۱) و (۷۳-۱۱) و با توجه به این که $r'_1/r'_2=m_2/m_1$ (بنا به تعریف مرکزجرم) داریم

$$\frac{d\mathbf{r}'_1}{r'_1}=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2}{r'_1}\right)=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2}{r'_2}\right)=-\frac{d\mathbf{r}'_2}{r'_2} \qquad (۱۱-۷۶)$$

که این اثبات قضیه را کامل می کند. ■

همان‌گونه که پیشتر گفتیم، بررسی حرکت عمومی جسم سخت دشوار است. در اینجا به حالت خاصی می‌پردازیم. فرض میکنیم که جسم سخت همگن و از تقارن بالایی برخوردار است؛ مانند استوانه، کره و یا حلقه. افزون بر این، فرض می‌کنیم که غلتش در صفحه انجام بگیرد و در هر لحظه محور چرخش با محور چرخش در لحظه‌ی پیشین موازی باشد. منظور از غلتش چیست؟ بهتر است آن را تعریف کنیم. استوانه همگنی را در نظر بگیرید که شعاع آن R است و بر روی سطح افقی هموار می‌غلتد. اگر نقطه‌ی تماس با زمین به طور لحظه‌ای نسبت به سطح ساکن باشد، آنگاه گوئیم استوانه حرکت غلتشی بدون لغزش دارد. برای این که نقطه‌ی تماس در لحظه‌ی تماس با زمین نلغزد (یعنی جابه‌جایی انتقالی نداشته باشد) باید نیروی اصطکاک میان سطح و استوانه به اندازه‌ی بسنده بزرگ باشد. البته جسم ممکن است غلتش همراه با لغزش داشته باشد. ما این حالت را در پایان این بخش بررسی خواهیم کرد. غلتش همراه با لغزش هنگامی روی می‌دهد که اصطکاک به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد و نتواند از لغزش جسم جلوگیری کند.



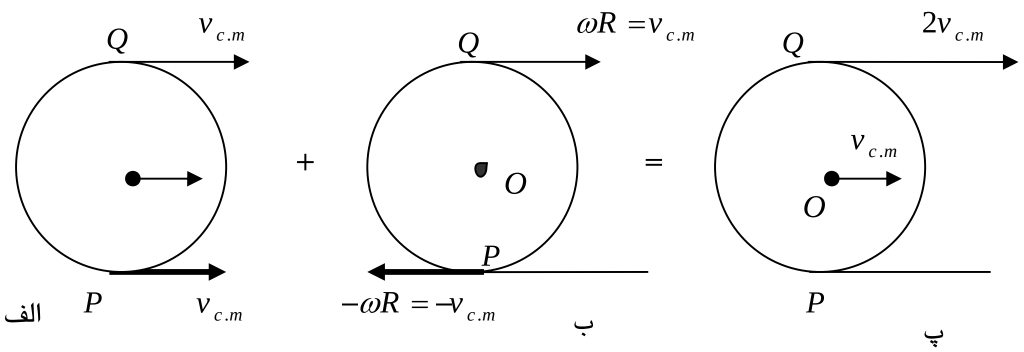
شکل ۳۲-۱۱

در شکل (۳۲-۱۱) استوانه‌ای نشان داده شده است که به اندازه‌ی زاویه‌ی θ چرخیده و مرکزجرم آن به اندازه‌ی S جابه‌جا شده است. اگر این حرکت بدون لغزش باشد آنگاه طول کمان $a'a$ باید با طول S برابر باشد. یعنی $S=R\theta$ باشد. از اینجا می‌توان سرعت و شتاب مرکزجرم را برای حرکت **غلتشی بدون لغزش** را حساب کرد.

$$\begin{aligned} v_{CM} &= \frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(R\theta)=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega \\ a_{CM} &= \frac{dv_{CM}}{dt}=\frac{d}{dt}(R\omega)=R\frac{d\omega}{dt}=R\alpha \end{aligned} \qquad (۱۱-۷۷)$$

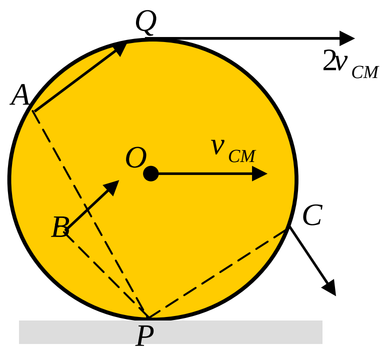
رابطه‌های بالا شرط غلتش بدون لغزش‌اند. اگر استوانه فقط بلغزید، ω صفر است اما اندازه‌ی v_{CM} غیر صفر است و رابطه‌ی (۷۷-۱۱) نمی تواند برقرار باشد.

شکل (۳۳-۱۱) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان حرکت استوانه‌ی غلتنده را به دو مؤلفه‌ی انتقالی و چرخشی تقسیم کرد. در شکل (۳۳- ۱۱ الف) مؤلفه‌ی انتقالی نشان داده شده است. در این شکل همه‌ی نقاط استوانه با سرعت v_{CM} جابه‌جا می‌شوند. شکل (۳۳- ۱۱ب) مؤلفه‌ی چرخشی خالص را نشان می‌دهد که همه‌ی نقاط استوانه با سرعت زاویه‌ای یکسان ω حول محور استوانه می‌چرخند. سرعت خطی نقطه‌های روی سطح همگی یکسان وبرابر $v_{CM}=R\omega$ است. اگر شکل‌های (الف) و(ب) را جمع



شکل ۳۳-۱۱

کنیم شکل (۳۳- ۱۱پ) به دست می‌آید و حرکت برآیند را نشان می‌دهد. سرعت نقطه‌ی Q در شکل (۳۳- ۱۱پ) $2v_{C.M}$ است ، در حالی که نقطه‌ی P، نقطه‌ی تماس با زمین، ساکن است. از نگاه ناظری که در P نشسته است، نقاط دیگر استوانه حول نقطه‌ی P می‌چرخند. محوری که از **P** می‌گذرد، **محور لحظه‌ای چرخش** است. در شکل (۳٤-۱۱) سرعت نقاط دیگر استوانه‌ی غلتان نشان داده شده است. توجه کنید که سرعت خطی هر نقطه‌ای بر خطی که آن را به نقطه‌ی تماس با زمین، P، وصل می‌کند، عمود است. در هر لحظه‌ای از زمان نقطه‌ی تماس با زمین، نسبت به سطح زمین در حالت سکون است؛ چون لغزش وجود ندارد. به این خاطر است که محور گذرنده از P و عمود بر صفحه‌ی شکل را **محور لحظه‌ای چرخش** می‌گویند.



شکل ۳٤-۱۱

سرعت نقطه‌ای مانند B یا A، هم مؤلفه‌ی افقی و هم مؤلفه‌ی عمودی دارد اما نقاط P و Q و O نقاط خاص و یگانه‌اند. مرکزجرم، O ، با سرعت $v_{CM} = R\omega$ حرکت می‌کند. سرعت نقطه‌ی تماس P صفر است و سرعت نقطه‌ی Q برابر $۲v_{CM} = ۲R\omega$ است. چون سرعت زاویه‌ای همه‌ی نقاط استوانه یکسان و برابر ω است می‌توانیم انرژی جنبشی کل استوانه‌ی غلتان را با

$$T = \frac{۱}{۲} I_P \omega^۲ \qquad (۱۱\text{-}۷۸)$$

نشان دهیم که I_P گشتاور لختی استوانه نسبت به محور گذرنده از P است. با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی، می‌دانیم $I_P = I_{CM} + MR^۲$ است و رابطه ی (۷۸-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T = \frac{۱}{۲} I_{CM} \omega^۲ + \frac{۱}{۲} MR^۲ \omega^۲ \qquad (۱۱\text{-}۷۹)$$

و چون $v_{CM} = R\omega$ پس :

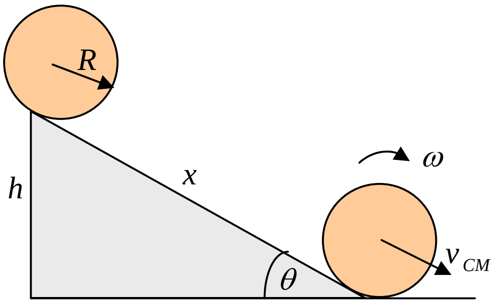
$$T = \frac{۱}{۲} I_{CM} \omega^۲ + \frac{۱}{۲} M v_{CM}^۲ \qquad (۱۱\text{-}۸۰)$$

در رابطه‌ی (۸۰-۱۱) جمله‌ی نخست سمت راست، $(۱/۲) I_{CM} \omega^۲$، انرژی جنبشی چرخش حول مرکزجرم است و جمله‌ی دوم ، $(۱/۲) M v_{CM}^۲$ انرژی جنبشی انتقالی استوانه است. پس:

انرژی جنبشی کل جسمی که حرکت غلتش بدون لغزش دارد با جمع انرژی جنبشی چرخشی حول مرکزجرم و انرژی جنبشی انتقالی مرکزجرم برابر است.

از انرژی برای حل گروهی از مسئله‌های حرکت غلتشی می‌توان استفاده کرد. مثال‌های زیر این روش را نشان می‌دهند. در بالا گفتیم حرکت غلتشی هنگامی شدنی است که نیروی اصطکاک وجود داشته باشد و نسبت به مرکزجرم گشتاور ایجاد کند. با وجود این، اگر حرکت غلتشی بدون لغزش باشد نیروی اصطکاک کار انجام نمی‌دهد و انرژی مکانیکی تلف نمی‌شود. چون در هر لحظه، نقطه‌ی تماس جسم و سطح، نسبت به سطح در حال سکون است. اگر جسم می‌لغزید، انرژی مکانیکی جسم هم تلف می‌شد.

مثال ۱۶-۱۱ جسم سختی، کره، استوانه، حلقه ... به جرم M از بالای سطح شیب‌داری با شیب θ و ارتفاع h از حالت سکون رها می شود و برابر شکل (۳۵-۱۱) بدون لغزش به سوی پائین سطح می‌غلتد. سرعت مرکزجرم را در انتهای سطح شیب‌دار به دست آورید



شکل ۳۵-۱۱

حل ۱ روش انرژی: حرکت غلتشی بدون لغزش است. شرط چنین حرکتی با $v_{CM}=R\omega$ بیان می‌شود. می‌توان رابطه‌ی (۸۰-۱۱) را به صورت زیر نوشت:

$$T=\frac{۱}{۲}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}Mv_{CM}^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{I_{CM}}{R^{۲}}+M\right)v_{CM}^{۲} \qquad (۱۱-۶۱)$$

وقتی جسم به پائین‌ترین نقطه‌ی سطح شیب‌دار می‌رسد، انرژی پتانسیل Mgh را از دست داده است، h ارتفاع سطح شیب‌دار است. چون در بالای سطح شیب‌دار جسم از حالت سکون حرکت خود را آغاز می‌کند، پس انرژی جنبشی جسم در پائین سطح، رابطه‌ی (۸۰-۱۱)، باید با انرژی پتانسیل در بالای سطح برابر باشد. پس، ، سرعت مرکزجرم در انتهای سطح شیب‌دار

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{I_{CM}}{R^{۲}}+M\right)v_{CM}^{۲}=Mgh \quad\Rightarrow\quad v_{CM}=\left(\frac{۲gh}{۱+I_{CM}/MR^{۲}}\right)^{۱/۲} \qquad (۱۱-۸۲)$$

است. اگر جسم سخت شکل (۳۵-۱۱) کره‌ی توپری باشد، سرعت مرکزجرم در انتهای سطح شیب‌دار وشتاب خطی مرکزجرم را به دست آورید. برای کره‌ی توپر $I_{CM}=(۲/۵)MR^{۲}$. بنابراین از رابطه‌ی (۸۲-۱۱) خواهیم داشت:

$$v_{cm}=\left(\frac{۲gh}{۱+۲MR^{۲}/۵MR^{۲}}\right)^{۱/۲}=\left(\frac{۱۰}{۷}gh\right)^{۱/۲} \qquad (۱۱-۸۳)$$

جابه‌جایی عمودی h و جابه‌جایی روی سطح، x ، با $h=x\sin\theta$ به یکدیگر مربوط اند. پس اگر دو طرف رابطه‌ی بالا را به توان دو برسانیم و به جای h مقدارش را برحسب x و θ قرار دهیم، خواهیم داشت $v_{CM}^{۲}=(۱۰/۷)gx\sin\theta$. شتاب مرکز جرم را با مشتق گرفتن از این رابطه می‌توان حساب کرد.

$$۲v_{CM}\dot{v}_{CM}=(۱۰/۷)gv_{CM}\sin\theta \quad\Rightarrow\quad a_{CM}=(۵/۷)g\sin\theta \qquad (۱۱-۸۴)$$

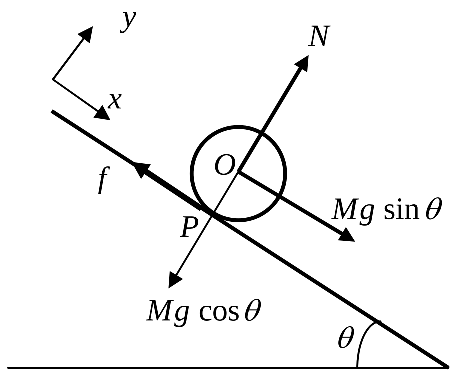
این نتیجه چشمگیر است! سرعت و شتاب مرکزجرم به شعاع و جرم کره وابسته نیستند! در روی سطح شیب‌دار سرعت و شتاب مرکزجرم همه‌ی کره‌های همگن توپر برابرند. در مورد کره‌ی توخالی، استوانه و یا حلقه هم همین طور است. ضریب‌های ثابت ۱۰/۷ و ۵/۷ که در سرعت و شتاب مرکزجرم نمایان می‌شوند به گشتاور لختی جسم نسبت به مرکز جرم آن بستگی دارند و برای اجسام مختلف فرق دارند. اما در همه‌ی حالت‌ها، شتاب مرکزجرم **کمتر** از $g\sin\theta$ است. $g\sin\theta$ شتاب مرکز

جرم روی سطح شیب‌دار است. اگر سطح هموار بود و اصطکاک وجود نداشت ، غلتش هم در کار نبود.

حل ۲: بگذارید این مثال را دوباره و با استفاده از روش دینامیکی حل کنیم و قانون‌های نیوتون را به کار ببریم. نمودار آزاد نیروها در شکل (۳٦–۱۱) نشان داده شده اند. محور مختصات را در امتداد سطح و عمود برآن انتخاب کنید و قانون دوم نیوتون را برای حرکت مرکزجرم بنوسید

$$\sum F_x = Mg\sin\theta - f = Ma_{CM} \qquad (۱۱–۸۵)$$

$$\sum F_y = N - Mg\cos\theta = ۰ \qquad (۱۱–۸٦)$$

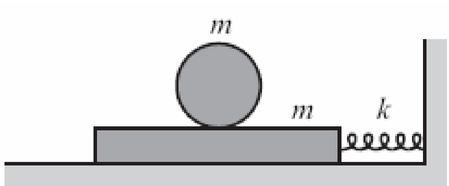


شکل ۳٦–۱۱

x در امتداد سطح شیب‌دار و رو به پائین است. حال گشتاور وارد به کره را حساب کنید. بهتر است گشتاورها را نسبت به محوری که از مرکز کره می‌گذرد و بر صفحه شکل عمود است حساب کنیم. چون در این صورت نیروهای N و $Mg\sin\theta$ نسبت به آن گشتاور ندارند. فقط گشتاور نیروی اصطکاک f نسبت به این محور غیر صفر وبرابر $G_{CM} = fR = I_{CM}\alpha$ است. چون $a_{CM} = R\alpha$ و $I_{CM} = (۲/۵)MR^۲$اند، پس داریم

$$f = \frac{I_{CM}\alpha}{R} = \left(\frac{(۲/۵)MR^۲}{R}\right)\frac{a_{CM}}{R} = \frac{۲}{۵}Ma_{CM} \qquad (۱۱–۸۷)$$

اگر این مقدار را در (۸٦–۱۱) قرار دهیم خواهیم داشت $a_{CM} = (۵/۷)g\sin\theta$ که همان نتیجه‌ی قبلی است .



شکل ۳۷–۱۱

مثال۱۷–۱۱ برابر شکل (۳۷–۱۱) یک قطعه تخته به جرم m در روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد و آزادانه می‌تواند بر روی آن بلغزد. تخته با فنری با ثابت k به دیوار عمودی وصل است. بر روی تخته استوانه‌ای به جرم m (و گشتاور لختی $I = mR^۲/۲$) ساکن قرار دارد و می‌تواند بدون لغزش، برروی تخته بغلتد. اگر تخته واستوانه را به سمت چپ بکشیم و سپس آنها رااز حالت سکون رها کنیم، بسامد حرکت سامانه را به دست آورید.

حل: جهت مثبت x را برای تخته به سوی راست و زاویه‌ی مثبت چرخش را برای استوانه ساعتگرد فرض کنید. شتاب تخته را a_b ، شتاب استوانه را a_c و شتاب زاویه‌ای آن را α بنامید. جهت‌های مثبت این سه در شکل (۳۸–۱۱) نشان داده شده‌اند. نیروی اصطکاک بین تخته و استوانه را F بنامید. از $F = ma$ برای تخته داریم

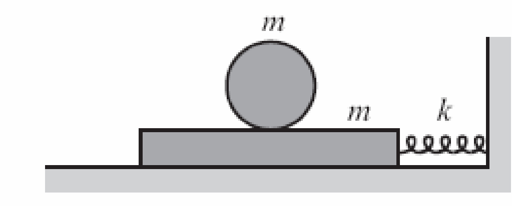
$$F - kx = ma_b \qquad (۱۱–۸۸)$$

از $F = ma$ برای استوانه داریم

$$-F = ma_c \qquad (۱۱–۸۹)$$

از گشتاور وارد به استوانه ($G = I\alpha$) داریم

$$FR = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\alpha \qquad (۱۱–۹۰)$$



شکل ۳۸-۱۱

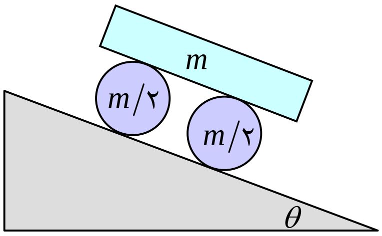
شرط نلغزیدن استوانه (شرط غلتش خالص) می‌گوید:

$$a_c = R\alpha + a_b \qquad (۱۱-۹۱)$$

چون، اگر بر روی تخته بایستید می‌بینید که استوانه با شتاب $a = R\alpha$ به جلو می‌رود. به این باید a_b را هم اضافه کنید که شتاب خود تخته است. F را از رابطه‌ی (۸۹-۱۱) به دست آورید و در (۹۰-۱۱) قرار دهید. خواهیم داشت $(-ma_c)R = (۱/۲)mR^۲\alpha \;\Rightarrow\; -۲a_c = R\alpha$ که اگر در رابطه‌ی (۹۱-۱۱) جایگزین کنید به دست می‌آید: $a_c = a_b - ۲a_c \Rightarrow a_c = a_b/۳$. با جا گذاری این مقدار a_c در (۸۹-۱۱) خواهیم داشت $F = -ma_b/۳$ که اگر در رابطه‌ی (۸۸-۱۱) به کارش ببریم داریم، به دست می‌آید: $-kx = (4/3)ma_b$. چون $a_b \equiv \ddot{x}$ است، پس می‌بینیم که

$$-kx = \frac{۴}{۳}m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -(\frac{۳}{۴}\frac{k}{m})x \qquad (۱۱-۹۲)$$

و این معادله‌ی آشنای نوسانگر هماهنگ است و بسامد آن $\sqrt{۳k/۴m}$ است .



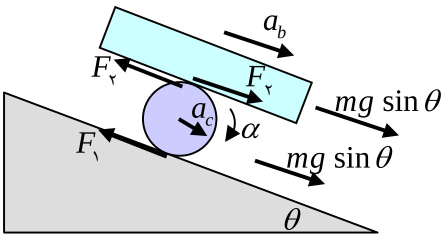
شکل ۳۹-۱۱

مثال ۱۸-۱۱ دو استوانه‌ی توپر ($I = MR^۲/۲$) یکسان به جرم‌های $m/۲$ برابر شکل (۳۹-۱۱) بر روی سطح شیب‌داری با شیب θ قرار دارند. قطعه تخته‌ای به جرم m روی استوانه‌ها قرار دارد. هیچ یک از سطح‌ها نسبت به دیگری نمی لغزد. شتاب تخته را به دو روش حساب کنید

(الف): با استفاده از نیرو و گشتاور.

(ب): با استفاده از پایستگی انرژی.

حل ۱: هر دو استوانه به یک صورت حرکت می‌کنند. پس، می‌توان آن‌ها را یک استوانه با جرم m به حساب آورد. در شکل (۴۰-۱۱) نیروها نشان داده شده اند. فرض کنید نیروی اصطکاک بین استوانه و تخته چنان است که استوانه تخته را به پایین هل می‌دهد و تخته استوانه را به بالا می‌راند. یعنی جهت نیروی $F_۲$ برابر شکل(۴۰-۱۱) است. اگر پس از محاسبه دیدیم که $F_۲$ منفی شد، مهم نیست. رابطه های $F = ma$ و $G = I\alpha$ عبارتند از:



شکل ۴۰-۱۱

- استوانه: $F_c = ma_c \Rightarrow mg\sin\theta - F_۱ - F_۲ = ma_c$
- تخته: $F_b = ma_b \Rightarrow mg\sin\theta + F_۲ = ma_b$
- استوانه:

$$G_c = I\alpha_c \;\Rightarrow F_۱R - F_۲R = (mR^۲/۲)\alpha$$

$$\Rightarrow (F_۱ - F_۲)R = (mR^۲/۲)(a_c/R) \qquad (\text{شرط نلغزیدن: } \alpha = a_c/R)$$

$$\Rightarrow F_۱ - F_۲ = (ma_c/۲)$$

چهار مجهول ($F_۱, F_۲, a_c, a_b$) داریم با سه معادله. به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز داریم. این رابطه عبارت است از $a_b = ۲a_c$.

این شرط را در شکل (۳۳-۱۱) توضیح دادیم. با این وجود، به یادآوریش می‌ارزد: سرعت بالاترین نقطه‌ی استوانه دو برابر سرعت مرکز آن است؛ چون شتاب نقطه‌ای در لبه‌ی استوانه نسبت به مرکز αR است. بنابراین، داریم $a_b = a_c + \alpha R = a_c + a_c = 2a_c$. سه معادله‌ی نخست به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} (۱):&\quad mg\sin\theta - F_۱ - F_۲ = ma_c \\ (۲):&\quad mg\sin\theta + F_۲ = ۲ma_c \\ (۳):&\quad F_۱ - F_۲ = \frac{۱}{۲}ma_c \end{aligned} \qquad (۱۱-۹۳)$$

و از این رابطه‌ها به دست می‌آید

$$\begin{aligned} (۱)+(۲) &\quad\Rightarrow\quad ۲mg\sin\theta - F_۱ = ۳ma_c \\ (۲)+(۳) &\quad\Rightarrow\quad mg\sin\theta + F_۱ = \frac{۵}{۲}ma_c \end{aligned} \qquad (۱۱-۹۴)$$

از جمع دو رابطه‌ی بالا خواهیم داشت

$$۳mg\sin\theta = \frac{۱۱}{۲}ma_c \;\Rightarrow a_c = \frac{۶}{۱۱}g\sin\theta \quad\Rightarrow\quad a_b = ۲a_c = \frac{۱۲}{۱۱}g\sin\theta \qquad (۱۱-۹۵)$$

شتاب تخته، a_b ، بزرگ‌تر از $g\sin\theta$ است. یعنی استوانه، شتاب تخته را در سراشیبی افزایش می‌دهد و این یعنی $F_۲ > ۰$ است.

حل ۲ : این مسئله را با استفاده از پایستگی انرژی هم می‌توان حل کرد. مانند بالا، داریم $a_b = ۲a_c$. بنابراین، اگر سرعت تخته را v و مسافتی را که تخته در سراشیبی سطح می‌پیماید x بنامیم، آنگاه $v/۲$ و $x/۲$ به ترتیب سرعت و مسافت استوانه اند. بنابراین، از پایستگی انرژی می‌توان نوشت

$$mg\left(\frac{x}{۲}\sin\theta\right) + mg\left(x\sin\theta\right) = \left[\frac{۱}{۲}m\left(v/۲\right)^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲\right] + \frac{۱}{۲}mv^۲ \qquad (۱۱-۹۶)$$

جمله‌ی اول سمت چپ انرژی پتانسیل استوانه و جمله‌ی دوم سمت چپ انرژی پتانسیل تخته اند. جمله‌ی اول سمت راست انرژی جنبشی استوانه است که شامل انرژی‌های جنبشی انتقالی و چرخشی است. جمله‌ی دوم سمت راست، انرژی جنبشی تخته است. از شرط نلغزیدن استفاده کنید و به جای ω قرار دهید $\omega = v/۲R$. برای گشتاور لختی استوانه هم داریم $I = mR^۲/۲$. با این جاگذاری‌ها از رابطه‌ی (۹۰-۱۱) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} &\frac{۳}{۲}mgx\sin\theta = mv^۲\left(\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲}\right) = mv^۲\left(\frac{۱۱}{۱۶}\right) \\ &\Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲۴}{۱۱}gx\sin\theta} = \sqrt{۲\left(\frac{۱۲}{۱۱}g\sin\theta\right)x} \end{aligned} \qquad (۱۱-۹۷)$$

اما برای حرکت با شتاب ثابت، داریم $v = \sqrt{۲ax}$ که اکر در رابطه‌ی بالا قرار دهیم ، خواهیم داشت $a = (12/11)g\sin\theta$.

۶-۱۱ غلتش همراه با لغزش

اگر اصطکاک سطح تماس جسم سخت با زمین به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد، افزون بر غلتیدن، جسم در روی سطح خواهد لغزید. شکل (۴۱-۱۱) کره‌ای به جرم M را نشان می‌دهد که بر روی سطح شیب‌دار با شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح μ است و جسم علاوه بر غلتیدن، بر روی سطح سُر می‌خورد. یعنی هر دو حرکت را با هم انجام می‌دهد. به جسم نیروی اصطکاک $\mathbf{f}$ وارد می‌شود که اندازه‌اش $f = f_{\max} = \mu Mg\cos\theta$ است. معادله‌ی حرکت انتقالی جسم در امتداد سطح به

صورت زیر است

$$Mg\sin\theta - Mg\mu\cos\theta = Ma_{CM} \qquad (۱۱-۹۸)$$

چون جسم حرکت چرخشی هم دارد، معادله‌ی حرکت چرخشی را حالا می‌توان به صورت زیر نوشت

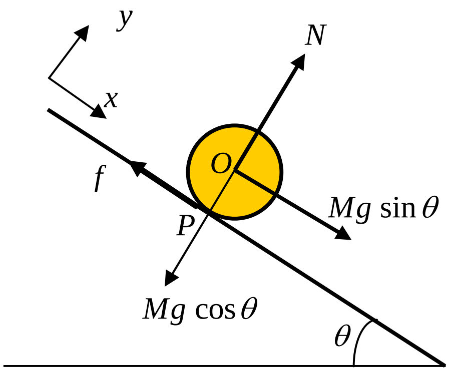
$$I_{CM}\alpha = \mu MgR\cos\theta \qquad (۱۱-۹۹)$$

شتاب مرکز جرم از رابطه‌ی (۹۸-۱۱) به دست می‌آید و دیده می‌شود که مقدارش ثابت است

$$a_{CM} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad (۱۱-۱۰۰)$$

شتاب زاویه‌ای نیز مقدار ثابتی است و از رابطه‌ی (۹۹-۱۱) داریم

$$\dot{\omega} \equiv \alpha = \frac{\mu MgR\cos\theta}{I_{CM}} \qquad (۱۱-۱۰۱)$$



شکل ۴۱-۱۱

فرض کنید جسم در زمان $t=۰$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، یعنی در زمان $t=۰$ داریم $v_{CM}=۰$ و $\omega=\dot{\phi}=۰$. ϕ زاویه‌ای است که کره حول محوری که از مرکزش می‌گذرد، چرخیده است. اگر از رابطه‌های (۱۰۰-۱۱) و (۱۰۱-۱۱) نسبت به زمان انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$v_{CM} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$$

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{g\,\mu RM\cos\theta}{I_{CM}}t \qquad (۱۱-۱۰۲)$$

بنابراین، نسبت سرعت خطی مرکزجرم و سرعت زاویه‌ای مقدار ثابتی است. آن را γ بنامید.

$$\frac{v_{CM}}{\omega} = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\frac{\mu MR\cos\theta}{I_{CM}}} \equiv \gamma = \frac{I_{CM}}{MR}\left(\frac{\tan\theta}{\mu} - 1\right) \qquad (۱۱-۱۰۳)$$

اگر کمیت β را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\beta \equiv \frac{I_{CM}}{MR^{۲}}\left(\frac{\tan\theta}{\mu} - ۱\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \beta R \qquad (۱۱-۱۰۴)$$

رابطه‌ی (۱۰۴-۱۱) را می‌توان به صورت

$$v_{cm} = \beta R\omega \qquad (۱۱-۱۰۵)$$

نوشت. چون $R\omega$ نمی تواند از v_{cm} بزرگتر باشد (چرا؟) بنابراین β نمی تواند کمتر از یک باشد.

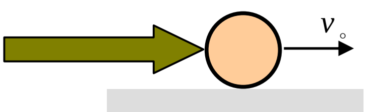
در حالت حدی که حرکت، غلتش خالص ـ بدون لغزش ـ است، داریم $v_{cm}=R\omega$ و $\beta=۱$. اگر معادله‌ی (۱۰۴-۱۱) را برای $\beta=۱$ حل کنیم، دیده می‌شود که مقدار بحرانی μ عبارت است از

$$\mu_C \equiv \frac{\tan\theta}{۱+\frac{MR_{۲}}{I_{CM}}} \qquad (۱۱-۱۰۶)$$

هرگاه μ از این مقدار حدی، μ_C، بزرگتر باشد، اصطکاک به اندازه‌ی کافی بزرگ است که از لغزش جلوگیری کند و حرکت، غلتشی بدون لغزش باشد. برای نمونه فرض کنید زاویه‌ی شیب ۴۵ درجه است. برای این که کره در روی سطح نلغزد باید ضریب اصطکاک سطح بیش از ۲/۷ باشد:

$$\mu \ge \frac{\tan ٤٥^\circ}{١+\frac{MR^٢}{٢MR^٢/٥}} = \frac{١}{١+٠/٢} = \frac{٢}{٧} \qquad (١١-١٠٧)$$

مثال ۱۹-۱۱ گلوله‌ی همگن شکل (٤٢-۱۱) به جرم M و به شعاع R (یک تیله‌ی بزرگ) روی سطح افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. ضربه‌ای افقی در راستایی که از مرکز گلوله می‌گذرد، به گلوله وارد می‌شود و گلوله با سرعت $v_٠$ شروع به حرکت می‌کند. روشن است که این حرکت در آغاز فقط انتقالی است؛ چون راستای ضربه از مرکز آن می‌گذرد که مرکزجرمش است وگشتاور نیروی ضربه نسبت به آن صفر است.



شکل ٤٢-۱۱

(الف): گلوله پیش از آنکه از لغزش بماند و شروع به غلتیدن بدون لغزش کند، چه مسافتی را می‌پیماید؟

(ب): در لحظه‌ای که حرکت به غلتش بدون لغزش تبدیل می‌شود، سرعت زاویه‌ای گلوله چقدر است؟

حل: **(الف)** در فاصله‌ی زمانی بین ضربه و آغاز حرکت غلتشی خالص، اصطکاک دو پدیده به وجود می‌آورد : (۱) گلوله را به طور خطی واشتابیده می‌کند. (۲) هم‌زمان به گلوله گشتاوری نسبت به مرکزجرم وارد می‌کند. گشتاور سبب می‌شود که گلوله شتاب زاویه‌ای پیدا کند. سرعت خطی گلوله کاهش و سرعت زاویه‌ای آن افزایش پیدا می‌کند تا این که شرط حرکت غلتش خالص، $v = R\omega$ ، برقرار شود. نیروی اصطکاک وارد به گلوله، بنا به تعریف، $f = \mu N = \mu Mg$ است. این نیرو در خلاف جهت $v_٠$ است. شتاب خطی مرکزجرم گلوله از $F = ma$ به دست می‌آید:

$$F = Ma_{CM} \;\Rightarrow\; a_{CM} = \frac{f}{M} = -\mu g \qquad (١١-١٠٨)$$

بنابراین، در زمان t سرعت خطی گلوله عبارت است از:

$$v = \int a dt = \int (-\mu g) dt = v_0 - \mu g t \qquad (١١-١٠٩)$$

گشتاور وارد به گلوله

$$G = fR = \mu Mg R \qquad (١١-١١٠)$$

است و نیز داریم $G = I\alpha$. برای گلوله‌ی توپر $I = ٢MR^٢/٥$ است. پس می‌توان شتاب زاویه‌ای حرکت چرخشی را حساب کرد

$$G = \mu MgR = I\alpha \;\Rightarrow\; \mu MgR = \frac{٢}{٥}MR^٢\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{٥}{٢}\frac{\mu g}{R} \qquad (١١-١١١)$$

سرعت زاویه‌ای گلوله در زمان t عبارت است از:

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + \omega_0 \qquad (١١-١١٢)$$

چون گلوله در آغاز چرخش نداشت پس $\omega_٠ = ٠$ و

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{٥}{٢}\frac{\mu g}{R} t \qquad (١١-١١٣)$$

برای این که مسافت پیموده شده‌ی پیش از آغاز حرکت غلتشی خالص را حساب کنیم؛ نخست باید زمان این پیمایش را حساب کنیم. این کار ساده‌ای است. کافی است ببینیم در چه زمانی شرط غلتش برقرار می‌شود. یعنی به ازای چه زمان t رابطه‌ی $V(t) = R\omega(t)$ برقرار است. از رابطه‌های (۱۰۹-۱۱) و(۱۱۳-۱۱) داریم

$$V(t)=R\omega(t)\ \Rightarrow\ v_\circ-\mu gt=R\left[\frac{۵}{۲}\frac{\mu g}{R}\right]t=\frac{۵}{۲}\mu gt\ \Rightarrow\ \frac{۷}{۲}\mu gt=v_\circ\ \Rightarrow\ t=\frac{۲}{۷}\frac{v_\circ}{\mu g} \qquad (۱۱-۱۱۴)$$

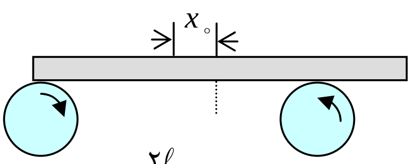
بنابراین، ،فاصله‌ای که در زمان $t=۲v_\circ/۷\mu g$ پیموده شده است ، عبارت است از

$$S=v_\circ t+\frac{۱}{۲}at^۲=v_\circ t-\frac{۱}{۲}\mu gt^۲\ \Rightarrow\ S=v_\circ\left(\frac{۲}{۷}\frac{v_\circ}{\mu g}\right)-\frac{۱}{۲}\mu g\left(\frac{۲}{۷}\frac{v_\circ}{\mu g}\right)^۲=\frac{۱۲}{۴۹}\frac{v_\circ^۲}{\mu g} \qquad (۱۱-۱۱۵)$$

(ب): سرعت زاویه‌ای گلوله در این زمان برابر است با

$$\omega(t)=\omega_\circ+\alpha t$$
$$=\circ+\alpha t=\left(\frac{۵}{۲}\frac{\mu g}{R}\right)\left(\frac{۲}{۷}\frac{v_\circ}{\mu g}\right)=\frac{۵}{۷}\frac{v_\circ}{R} \qquad (۱۱-۱۱۶)$$

مثال ۲۰-۱۱ دو غلتک یکسان شکل (۴۳-۱۱) با سرعت زاویه‌ای زیاد در خلاف جهت هم حول مرکزشان می‌چرخند. غلتک‌ها بر روی محورهای ثابت سوارند. فاصله‌ی مرکز غلتک‌ها از یکدیگر ۲ℓ است. تخته‌ی سنگینی به جرم M را روی غلتک ها طوری قرار می‌دهیم که وسط آن در فاصله‌ی $x_\circ$ از وسط غلتک‌ها قرار گیرد. ضریب اصطکاک بین تخته و غلتک‌ها مقدار ثابت μ و مستقل از سرعت نسبی بین سطح‌هاست. تخته را با دست در این وضعیت ساکن نگاه می‌داریم و در زمان $t=\circ$ آن را رها می‌کنیم. تخته چه حرکتی انجام می‌دهد ؟



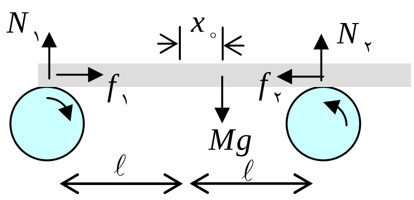
شکل ۴۳-۱۱

حل: نیروهای وارد به تخته در شکل (۴۴-۱۱) نشان داده شده اند. مجموع نیروهای عمودی وارد به آن باید با وزن تخته برابر باشد. بنابراین $N_۱+N_۲=Mg$ است. گشتاور این نیروها نسبت به مرکزجرم تخته باید یکدیگر را حذف کنند. در غیر این صورت، تخته می چرخد.

$$G_۱+G_۲=N_۱(\ell+x_\circ)-N_۲(\ell-x_\circ)=\circ \qquad (۱۱-۱۱۷)$$

از حل هم زمان این دو معادله خواهیم داشت

از حل هم زمان این دو معادله خواهیم داشت



شکل ۴۵-۱۱

$$N_۱=\frac{Mg}{۲}\left(۱-\frac{x_\circ}{\ell}\right)\quad,\quad N_۲=\frac{Mg}{۲}\left(۱+\frac{x_\circ}{\ell}\right) \qquad (۱۱-۱۱۸)$$

نیروی افقی کل وارد به تخته $F=f_۱-f_۲$است. $f_۱=\mu N_۱$ و $f_۲=\mu N_۲$ نیروهای اصطکاک اند. پس داریم

$$F=\mu(N_۱-N_۲)=-\frac{\mu Mg}{\ell}x_\circ \qquad (۱۱-۱۱۹)$$

این نیروی نوسانگر هماهنگ $F=-kx$ است که در آن $k\equiv\mu Mg/\ell$ است. بنابراین، تخته حرکت نوسانی خواهد داشت.

$$x(t)=x_\circ\cos\omega t\quad,\quad \omega=\sqrt{\mu g/\ell} \qquad (۱۱-۱۲۰)$$

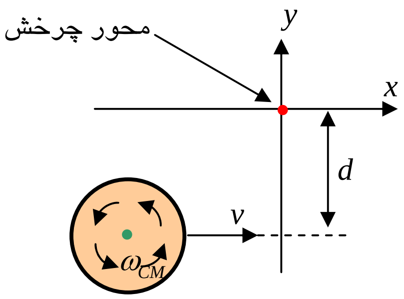
۷-۱۱ برخورد و ضربه

۱-۷-۱۱ برخورد

در فصل ۸ برخورد بین دو جسم نقطه‌ای (به بیان دیگر دو جسمی که نمی‌چرخند) را بررسی کردیم. برای حل مسئله‌های برخورد از پایستگی تکانه و پایستگی انرژی (اگر برخورد کشسان باشد) استفاده کردیم. اینک پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را هم می‌شناسیم که اجازه می‌دهد تا مسئله‌های برخورد را به اجسام چرخنده تعمیم داد. پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای درجه‌ی آزادی اضافی حاصل از چرخش را جبران می‌کند و تعداد مجهول‌ها با تعداد معادله‌ها برابر می‌شود.

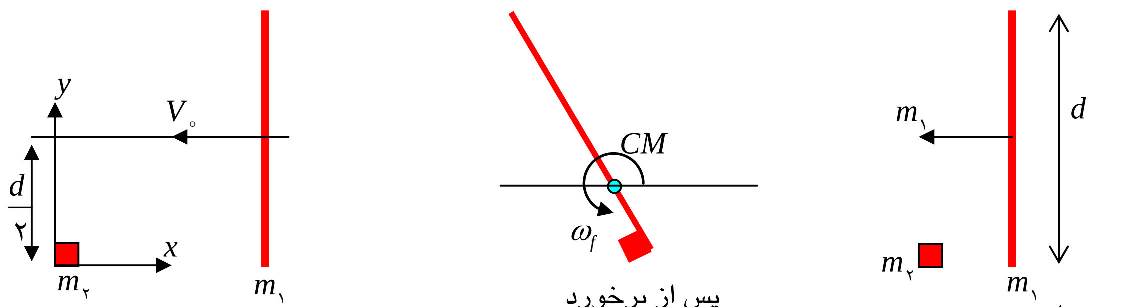
در یک سامانه‌ی منزوی وقتی می‌توان از پایستگی انرژی استفاده کرد که برخورد کشسان باشد. اما از پایستگی تکانه و پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای همیشه می‌توان استفاده کرد. با وجود این، پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای اندکی با پایستگی تکانه فرق دارد؛ چون نخست باید مبدائی را برای محاسبه‌ی L انتخاب کنیم. با توجه به سه شرطی که برای برقراری نتیجه‌ی بعد از رابطه‌ی (۲۸-۱۱) لازم است، مبداء انتخابی باید یک نقطه‌ی ثابت یا مرکزجرم باشد (شرط سوم را در نظر نمی‌گیریم، چون به ندرت از آن استفاده می‌شود). اگر نقطه‌ی دیگری غیر از این دو را انتخاب کنیم، $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ برقرار نیست و نمی‌توان گفت که چون گشتاور و در نتیجه، $d\mathbf{L}/dt$ هم صفر است. البته، از میان نقاط ثابت مجاز و مرکزجرم، یکی را برمی‌گزینیم. معمولا برخی از این گزینه‌ها بهتر از دیگری است و محاسبه را آسان‌تر می‌کند. باید آموخت که از این آزادی سود برد.

در فصل ۱۰ قضیه‌ی مهمی را اثبات کردیم، قضیه‌ی ۱-۱۰، که عمومی‌ترین توصیف برای تکانه‌ی زاویه‌ای کل یک سامانه بود. این قضیه می‌گوید تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه حول محور داده شده‌ای برابر است با جمع تکانه‌ی زاویه‌ای جرم نقطه‌های جایگزیده در مرکزجرم نسبت به این محور و تکانه‌ی زاویه‌ای جسم حول محوری که از مرکزجرم می‌گذرد. می‌توان آن را به صورت $\mathbf{L}=\mathbf{L}_{CM}+\mathbf{L}'$ نوشت و با شکل (۴۵-۱۱) تجسم کرد. $\mathbf{L}'=I\,\omega_{CM}\,\hat{\mathbf{z}}$ (به سبب چرخش حول مرکزجرم) و $\mathbf{L}_{CM}=mvd\,\hat{\mathbf{z}}$ (به سبب چرخش مرکزجرم حول محور چرخش اصلی). این قضیه برای حل برخی مسئله‌های برخورد سودمند است.



شکل ۴۵-۱۱

مثال ۲۱-۱۱ میله‌ای به طول d و جرم m_1 در روی سطح افقی میز بدون اصطکاک برابر شکل (۴۷-۱۱) با سرعت V_0 حرکت می‌کند و با جرم ساکن m_2 برخورد می‌کند. جرم m_2 به انتهای میله می‌چسبد و با آن حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای نهایی سامانه‌ی میله + جرم را بیابید.



شکل ۴٦-۱۱ پ: پیش از برخورد

پس از برخورد
شکل ۴٦-۱۱ ب

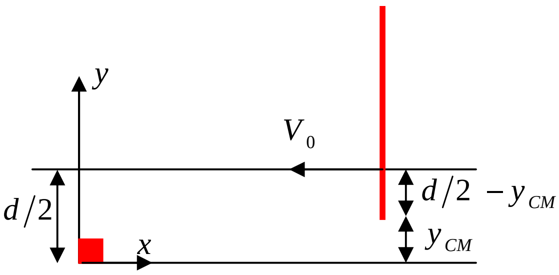
پیش از برخورد
شکل ۴٦-۱۱ الف

حل: وضعیت پیش از برخورد و پس از آن در شکل (۴٦- ۱۱ الف و ۴٦-۱۱ ب) نشان داده شده اند. مبداء مختصات را مکان جرم m_2 پیش از برخورد آن فرض کنید. (شکل ۴٦-۱۱ پ را ببینید.) می‌توانیم y_{CM} را حساب کنیم.

$$y_{CM} = \frac{d}{۲}\left(\frac{m_۱}{m_۱ + m_۲}\right) \qquad (۱۱-۱۲۱)$$

پیش از برخورد، میله هنوز نمی‌چرخد و بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه در اثر حرکت مرکزجرم میله به وجود می‌آید. همان طور که از شکل (۱۱-۴۷) پیداست، داریم

$$L_i = m_۱\left(\frac{d}{۲} - y_{CM}\right)V_\circ \qquad (۱۱-۱۲۲)$$



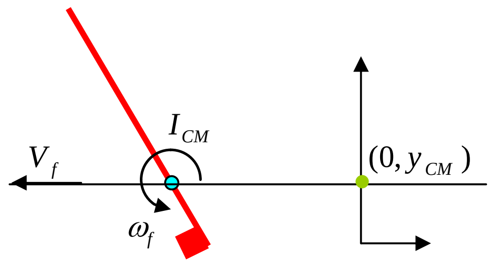
شکل ۱۱-۴۷

پس از برخورد و چسبیدن جرم $m_۲$ به میله، تکانه‌ی زاویه‌ای میله + جرم نسبت به مرکزجرم (نقطه‌ی $(\circ, y_{CM})$) در اثر چرخش میله+ جرم به وجود می‌آید و با توجه به شکل (۱۱-۴۸) برابر است با

$$L_f = L'_f + \cancel{L_f^{CM}} = I_{CM}\,\omega_f \qquad (۱۱-۱۲۳)$$

حال باید گشتاور لختی سامانه را نسبت به مرکز، I_{CM} ، به دست بیاوریم که مجموع گشتاورهای لختی میله و جرم است. گشتاور لختی میله نسبت به مرکزجرم با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی به دست می آید و برابر است با

$$I_{m_۱} = \frac{۱}{۱۲}m_۱ d^۲ + m_۱\left(\frac{d}{۲} - y_{CM}\right)^۲ \qquad (۱۱-۱۲۴)$$



شکل ۱۱-۴۸ (پس از برخورد)

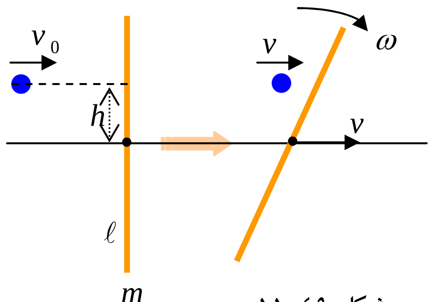
گشتاور لختی جرم m_2 نسبت به مکان مرکز جرم $m_2 y_{CM}^2$ است. پس،

$$I_{CM} = I_{m_۱} + I_{m_۲} = \frac{۱}{۱۲}m_۱ d^۲ + m_۱\left(\frac{d}{۲} - y_{CM}\right)^۲ + m_۲ y_{CM}^۲ \qquad (۱۱-۱۲۵)$$

با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای داریم

$$L_f = L_i \;\Rightarrow\; I_{CM}\,\omega_f = m_۱ V_\circ\left(\frac{d}{۲} - y_{CM}\right) \;\Rightarrow\; \omega_f = \frac{m_۱ V_\circ d}{۲ I_{CM}}\left(۱ - \frac{m_۱}{m_۱ + m_۲}\right) \qquad (۱۱-۱۲۶)$$

مثال ۱۱-۲۲ (برخورد کشسان): جرم m با سرعت $v_\circ$ در راستای عمود بر میله‌ی ساکنی به جرم m و طول ℓ حرکت می‌کند و برابر شکل (۱۱-۴۹) با آن به طور کشسان برخورد می‌کند. جرم m در چه فاصله‌ی h از وسط میله با آن برخورد کند تا پس از برخورد مرکزجرم میله و جرم m با سرعت‌های مساوی حرکت کنند؟



شکل ۱۱-۴۹

حل: در این مسئله سه مجهول وجود دارد: فاصله‌ی h نقطه‌ی برخورد از وسط میله، سرعت‌های نهایی و مساوی v، میله و جرم و سرانجام سرعت زاویه‌ای نهایی، ω، میله. این سه مجهول را از سه قانون پایستگی می‌توان به دست آورد.

- پایستگی تکانه ی p: $\quad mv_\circ = mv + mv \;\Rightarrow v = v_\circ/۲$
- پایستگی انرژی E: $\quad \frac{mv_\circ^۲}{۲} = \frac{m}{۲}\left(\frac{v_\circ}{۲}\right)^۲ + \left[\frac{m}{۲}\left(\frac{v_\circ}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{m\ell^۲}{۱۲}\right)\omega^۲\right] \;\Rightarrow\; \omega = \frac{\sqrt{۶}v_\circ}{\ell} \qquad (۱۱-۱۲۷)$

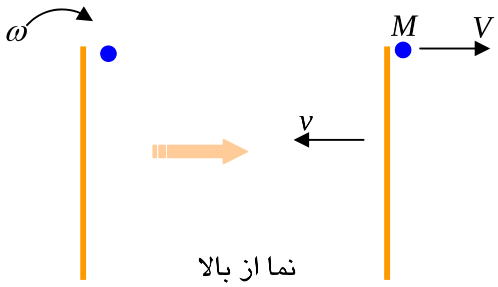
• پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای L: حالا باید مبدایی هم انتخاب و L را نسبت به آن حساب کنیم . مبداء را نقطه‌ی ثابتی در نظر بگیرید که مرکز میله پیش از برخورد در آن جا بود. از پایستگی L داریم

(۱۱-۱۲۸)
$$mv_\circ h = m\left(\frac{v_\circ}{۲}\right)h + \left[\left(\frac{m\ell^۲}{۱۲}\right)\omega + \circ\right]$$

صفر در درون کروشه از آنجا ناشی می‌شود که پس از برخورد، مرکز جرم میله در امتداد خطی که از مبدا می‌گذرد، از آن دور می‌شود و در نتیجه، جمله‌ی اول قضیه‌ی ۱۰-۱ سهمی در L ندارد. اگر ω را از رابطه‌ی (۱۱-۱۲۷) در رابطه‌ی (۱۱-۱۲۸) قرار دهیم ، خواهیم داشت

(۱۱-۱۲۹)
$$\frac{۱}{۲}mv_\circ h = \left(\frac{m\ell^۲}{۱۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۶}v_\circ}{\ell}\right) \Rightarrow h = \frac{\ell}{\sqrt{۶}}$$

مثال ۲۳-۱۱ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ بدون این که مرکزش جابه‌جا شود، در روی میز بدون اصطکاک می‌چرخد و انتهای آن با جرم M که در روی میز ساکن است، برخورد می‌کند (شکل ۵۰-۱۱). جرم M چه قدر باید باشد تا پس از برخورد، میله نچرخد و فقط حرکت انتقالی داشته باشد؟



شکل ۵۰-۱۱

حل: در اینجا هم سه مجهول داریم که عبارتند از سرعت v میله ، سرعت گلوله V، و جرم M گلوله. سه معادله‌ی پایستگی هم داریم که با استفاده از آنها می‌توان سه مجهول را به دست آورد.

پایستگی E:
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱۲}m\ell^۲\right)\omega^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}MV^۲$$

پایستگی p: (۱۱-۱۳۰)
$$\circ = MV - mv$$

پایستگی L: نسبت به مکان پیش از برخورد وسط میله
$$\left(\frac{۱}{۱۲}m\ell^۲\right)\omega = \circ + MV\frac{\ell}{۲}$$

شاید بهترین راه برای حل همزمان این سه معادله استفاده از $p = mv = MV$ باشد. داریم

(۱۱-۱۳۱)

از پایستگی E:
$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{p^۲}{۲m} + \frac{p^۲}{۲M}$$

از پایستگی L:
$$I\omega = p\left(\frac{\ell}{۲}\right) \Rightarrow p = \frac{۲I\omega}{\ell}$$

بنابراین، اگر به جای p در معادله‌ی اول رابطه‌ی (۱۱-۱۳۱) مقدارش را از معادله‌ی دوم قرار دهیم خواهیم داشت

(۱۱-۱۳۲)
$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \left(\frac{۲I\omega}{\ell}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲m} + \frac{۱}{۲M}\right) \Rightarrow ۱ = \frac{۴I}{\ell^۲}\left(\frac{۱}{m} + \frac{۱}{M}\right)$$
$$\Rightarrow ۱ = \frac{۴\left(m\ell^۲/۱۲\right)}{\ell^۲}\left(\frac{۱}{m} + \frac{۱}{M}\right) \Rightarrow ۳ = ۱ + \frac{m}{M}$$
$$\Rightarrow M = m/۲$$

۲-۷-۱۱ ضربه چرخشی

در فصل ۱-٤-٥ ضربه $\mathcal{I}$ را انتگرال زمانی نیروی وارد به جسم تعریف کردیم که با تغییر کل در تکانه جسم برابر است. به بیان دیگر

$$\mathcal{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \Delta \mathbf{P} \qquad (11\text{-}133)$$

حالا ضربه‌ی چرخشی، $\mathcal{I}_\theta$، را انتگرال زمانی گشتاور وارد به جسم تعریف می‌کنیم که با تغییر کل در تکانه‌ی زاویه‌ای جسم برابر است:

$$\mathcal{I}_\theta \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{G}(t)\,dt = \Delta \mathbf{L} \qquad (11\text{-}134)$$

این‌ها تعریف اند و هیچ اندرونه‌ی فیزیکی ندارند. فیزیک به صورت زیر وارد داستان می‌شود. وضعیتی را تجسم کنید که به نقطه‌ای از جسم همیشه نیروی $\mathbf{F}(t)$ وارد می‌شود. فاصله‌ی این نقطه از مبدایی که می‌خواهیم $\mathbf{G}(t)$ را نسبت به آن حساب کنیم ثابت است است. این فاصله را $\mathbf{R}$ بنامید. در این صورت داریم $\mathbf{G}(t) = \mathbf{R}\times\mathbf{F}(t)$ است. آن را در رابطه‌ی (۱۳٤-۱۱) قرار دهید و ثابت $\mathbf{R}$ را بیرون انتکرال نگه دارید. خواهیم داشت $\mathcal{I}_\theta = \mathbf{R}\times\mathbf{I}$. یعنی وقتی $\mathbf{F}(t)$ به یک نقطه اثر کند، داریم

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{R}\times(\Delta\mathbf{P}) \qquad (11\text{-}135)$$

این رابطه نتیجه‌ی سودمندی است و به تغییر کل در $\mathbf{L}$ و $\mathbf{P}$ مربوط است و نه به تغییر آنها در لحظه‌ی معینی از زمان. حتی اگر $\mathbf{F}$ با زمان تغییر کند و ندانیم این تغییر چگونه است (و بنابراین، هیچ آگاهی از این که $\Delta\mathbf{L}$ و $\Delta\mathbf{P}$ چیستند نداشته باشیم)، هنوز هم می‌دانیم که $\Delta\mathbf{L}$ و $\Delta\mathbf{P}$ با رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) به هم مربوط اند. خیلی وقت ها لازم نیست که نگران ضرب خارجی در رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) باشیم، چون بازوی $\mathbf{R}$ بر تغییر تکانه‌ی $\Delta\mathbf{P}$ عمود است. در چنین وضعیت‌ها $|\Delta L| = R\,|\Delta p|$ است. همچنین در خیلی حالت‌ها جسم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیازی به استفاده از Δ ها هم نیست. مثال زیر، نمونه‌ی کلاسیک ضربه‌ی چرخشی و کاربرد رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) است.

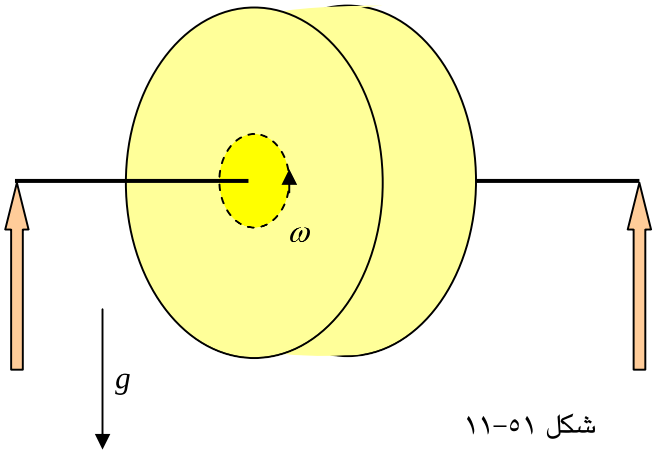
مثال ۲٤-۱۱ میله‌ای به طول ℓ و به جرم m روی زمین در حال سکون است. با پتکی به یک انتهای آن ضربه‌ای عمودی وارد می‌کنیم. فرض کنید ضربه سریع است و میله در طول تماس پتک تکان نمی‌خورد. اگر مرکزجرم میله با سرعت v حرکت کند، پس از ضربه، سرعت‌های دو انتهای میله چقدر است؟

حل: ما نمی‌دانیم نیروی $F(t)$ چگونه است و یا به چه مدت به میله اثر می‌کند. اما از رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) می‌دانیم که $\Delta L = (\ell/2)\Delta p$ است. L را نسبت به مرکزجرم میله حساب کردیم و بنابراین، بازوی نیرو $(\ell/2)$ است. پس داریم $(m\ell^2/12)\omega = (\ell/2)mv$. در نتیجه، سرعت‌های نهایی v و ω با رابطه‌ی $\omega = 6v/\ell$ به هم مربوط اند.

سرعت‌های دو انتها از جمع (یا تفریق) حرکت چرخشی و حرکت انتقالی مرکزجرم به دست می‌آیند. سرعت‌های زاویه‌ای دو انتها (سرعت‌های دو نقطه در دو انتهای میله) عبارتند از $\pm\omega(\ell/2) = \pm(6v/\ell)(\ell/2) = \pm 3v$. پس، انتهایی که ضربه به آن وارد می‌شود با سرعت $v + 3v = 4v$ حرکت می‌کند و انتهای دیگر با سرعت $v - 3v = -2v$ حرکت می‌کند (به عقب می‌رود).

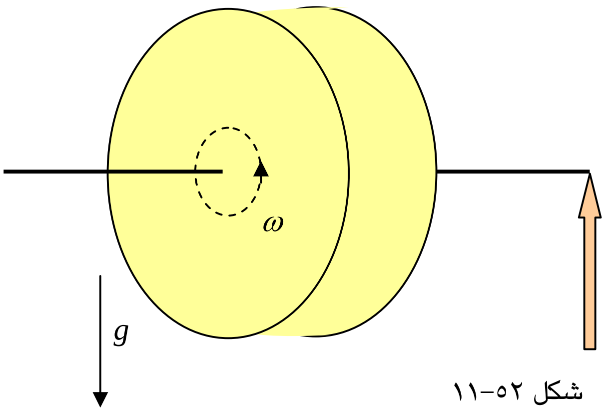
۸-۱۱ ژیروسکوپ

در این بخش به رفتار چرخی می‌پردازیم که حول محورش می‌چرخد. محور چرخ بر روی تکیه گاهی قرار دارد که اجازه می‌دهد جهت محور چرخش تغییر کند. در شکل (۵۱-۱۱) چرخی نشان داده شده است که محورش بر روی دو پایه قرار دارد و

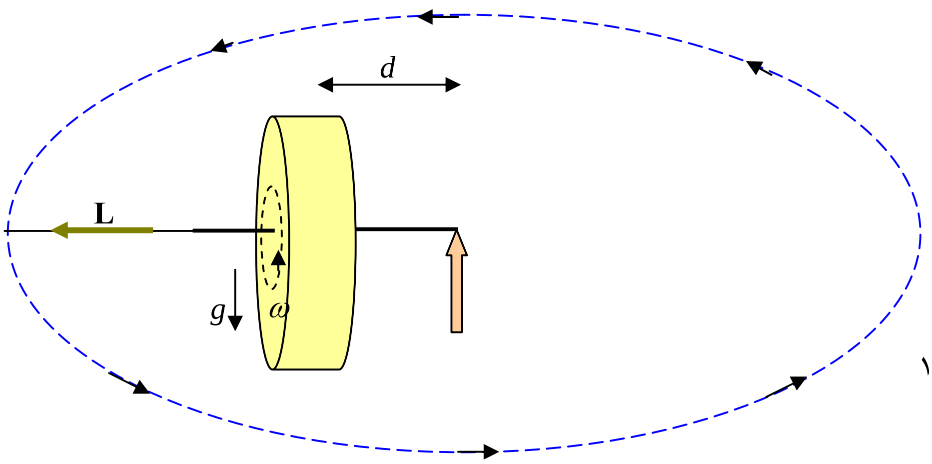


شکل ۵۱-۱۱

با سرعت زاویه‌ای ω حول محور می‌چرخد. اگر یکی از پایه‌ها را برداریم چه پیش می‌آید؟ در شکل (۵۲-۱۱) ساده‌ترین ژیروسکوپ نشان داده شده است و برای منظور ما کفایت می‌کند. بررسی عمومی حرکت یک چنین سامانه‌ای در چارچوب این کتاب نمی‌گنجد. اگر ژیروسکوپ در حالی که یک انتهای محورش روی پایه قرار دارد از حالت افقی رها شود، **سقوط نمی کند**؛ بلکه، نخست اندکی لرزش افقی می‌کند و سپس به طور یکنواخت حول پایه می‌گردد. این چرخش در شکل (۵۳-۱۱) نشان داده شده است. این رفتار شگفت انگیز را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ فهمید. اندازه‌ی گشتاور حول پایه mgd است. و جهت آن برای لحظه‌ای که در شکل (۵٤-۱۱) نشان داده شده است، به سمت بیرون از صفحه است (با استفاده از قاعده‌ی دست راست). بنابراین، تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای هم برای لحظه‌ای که نشان داده شده است، باید بیرون



شکل ۵۲-۱۱



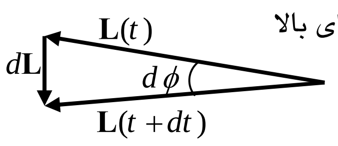
شکل ۵۳-۱۱

از صفحه باشد. فرض کنید از بالا به سامانه نگاه می‌کنید. تغییر در اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای در زمان dt برابر $L\,d\phi$ است. این را می‌توان با نگاه کردن به شکل (۵٤-۱۱) فهمید. $d\phi$ زاویه‌ای است که محور ژیروسکوپ در زمان dt چرخیده است. بنابراین داریم

$$\frac{dL}{dt} = L\frac{d\phi}{dt} \equiv L\Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{G}{L} \qquad (۱۱-۱۳٦)$$

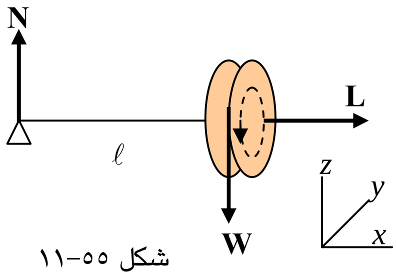
Ω بسامد حرکت **تقدیمی** نامیده می شود.

نخستین پرسشی که به ذهن می‌رسد این است که چرا ژیروسکوپ نمی‌افتد؟ یک پاسخ ممکن به این پرسش این است که نمودار آزاد نیروها را در شکل (۵۵-۱۱) وارسی کنیم. نیروهایی که به سامانه وارد می‌شوند، وزن ژیروسکوپ W و نیروی عمودی N است که پایه به محور وارد می‌کند. برآیند این دو نیروی عمودی $N-W$ است. اگر $N=W$ باشد، مرکزجرم نمی‌تواند سقوط کند. گرچه این توصیف درست است اما راضی کننده نیست. پرسش درست این است: چرا ژیروسگوپ مانند آونگ حول پایه تاب نمی‌خورد. واقع، اگر چرخ ژیروسکوپ نچرخد و آن را از حالت افقی رها کنیم، درست همانند آونگ رفتار می‌کند و به جای این که حرکت تقدیمی افقی انجام دهد،در صفحه‌ی عمودی تاب می‌خورد. فقط وقتی که چرخ ژیروسکوپ به سرعت بچرخد، حرکت تقدیمی افقی خواهد داشت. در این حالت تکانه‌ی زاویه‌ای آن دینامیک سامانه را اداره می‌کند.



شکل ٥٤-١١

تکانه‌ی زاویه‌ای ژیروسکوپ در راستای محورش است (با حرکت تقدیمی حول محور z یک تکانه‌ی زاویه‌ای در جهت محور z هم به وجود می‌آید. اما برای حرکت تقدیمی یکنواخت، اندازه‌ی این تکانه‌ی زاویه‌ای ثابت و در مقایسه با تکانه‌ی زاویه‌ای حاصل از چرخش کوچک است و در دینامیک مسئله نقشی ندارد.) با حرکت تقدیمی ، جهت تکانه‌ی زاویه‌ای حاصل از چرخش ژیروسکوپ هم تغییر می‌کند. پس باید گشتاوری وجود داشته باشد که سبب این تغییر در تکانه‌ی زاویه‌ای می‌شود. منشاء این گشتاور را از نمودار آزاد نیروها می‌توان دریافت. اگر تکیه گاه را مبداء انتخاب کنیم، نیروی وزن چرخ نسبت به آن گشتاوری تولید می‌کند که اندازه‌اش $G=\ell W$ است. $\mathbf{G}$ در جهت y و موازی $d\mathbf{L}/dt$ است. از رابطه‌ی

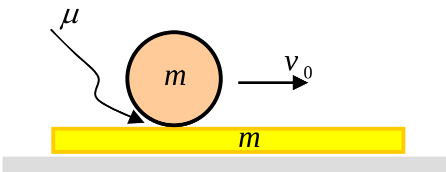


شکل ٥٥-١١

$|d\mathbf{L}/dt| = G = \ell W$ و از رابطه‌ی (۱۳٦-۱۱) دیده می‌شود که $\Omega = \ell W / I_o\omega$ است. از این نتیجه دیده می شود که با آهسته شدن چرخش چرخ، Ω افزایش پیدا می‌کند. روشن است که این افزایش برای همیشه نمی‌تواند ادامه یابد و سرانجام حرکت تقدیمی یکنواخت به حرکتی نامنظم تبدیل می‌شود.

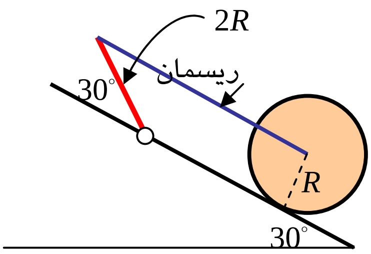
مثال‌های تکمیلی

ت-۱ استوانه‌ای به جرم m و شعاع r (و $I = mr^۲/۲$) برابر شکل (۵۶-۱۱) روی تخته‌ی درازی به جرم m قرار دارد. تخته در روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و می‌تواند بر روی آن آزادانه بلغزد، اما بین تخته و استوانه اصطکاک وجود دارد و ضریب اصطکاک جنبشی μ است . اگر تخته در آغاز در حال سکون باشد و استوانه با سرعت اولیه‌ی $v_۰$ (اما **بدون** حرکت چرخشی اولیه) شروع به حرکت به سوی راست کند، سرعت استوانه (نسبت به زمین) در هنگامی که سرانجام حرکتش غلتشی بدون لغزش می‌شود، چقدر است؟



شکل ۵۶-۱۱

ت-۲ استوانه‌ای به جرم m و به شعاع R (و $I = mR^۲/۲$ نسبت به مرکزش) روی سطح شیب‌داری با شیب ۳۰° درجه قرار دارد. میله‌ی همگنی به جرم m و طول $۲R$ (و $I = (۱/۳)m(۲R)^۲$ نسبت به یک انتها) از یک سر برابر شکل (۵۷-۱۱) به سطح شیب‌دار لولا شده است و با سطح زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد. ریسمانی بدون جرم انتهای بالایی میله را به مرکز استوانه وصل می‌کند و ریسمان با سطح شیب‌دار موازی است (فرض کنید ریسمان به اندازه‌ی کافی دراز است که حتی اگر سامانه حرکت کند، ریسمان همواره موازی سطح باقی می‌ماند). سامانه از حالت سکون رها می‌شود و استوانه نسبت به سطح شیب‌دار **نمی‌لغزد**. هدف مسئله یافتن شتاب خطی استوانه، a_c، بر روی سطح شیب‌دار است. با برداشتن گام‌های زیر شتاب خطی استوانه را بیابید



شکل ۵۷-۱۱

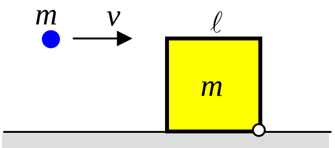
(الف) نمودار آزاد نیروهای وارد به استوانه و میله را رسم کنید.

(ب) مجموعه‌ی معادله‌هایی را که برای یافتن a_c لازم دارید بنویسید، به هر کدام شماره‌ای نسبت دهید ودور هر یک کادری بکشید. (توجه کنید که به دست آوردن رابطه‌ی بین دوتا از شتاب‌ها اندکی پیچیده است اگر نتوانستید آن را به دست آورید. فرض کنید $a_c = R\alpha_s$ است که در آن α_s شتاب زاویه‌ای میله است)

(پ) همه‌ی نیروها و شتاب‌های مجهول معادله‌هایتان را نام ببرید.

(ت) a_c را درست پس از رها شدن سامانه حساب کنید (لازم نیست همه‌ی مجهول‌ها را حساب کنید.

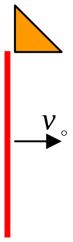
ت-۳ قطعه‌ای به شکل مکعب با جرم m و طول ضلع ℓ برابر شکل (۵۸-۱۱) روی میزی قرار دارد و گوشه‌ی پایین سمت راست آن به میز لولا شده است. توپی با سرعت v به سوی راست حرکت می‌کند و پس از برخورد با قطعه به گوشه‌ی بالایی سمت چپ قطعه می‌چسبد. گشتاور لختی قطعه نسبت به مرکز آن $m\ell^۲/۶$ است.



شکل ۵۸-۱۱

(الف): سرعت زاویه‌ای مجموعه‌ی قطعه + توپ را درست پس از برخورد حساب کنید.

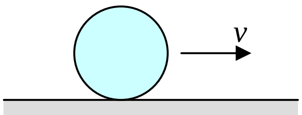
(ب): بیشینه مقدار v که هنوز قطعه واژگون نشود چیست؟ (یعنی اگر سرعت بیش از این مقدار باشد، قطعه با سطح سمت راست بر روی میز واژگون می‌شود.)



شکل ۵۹-۱۱

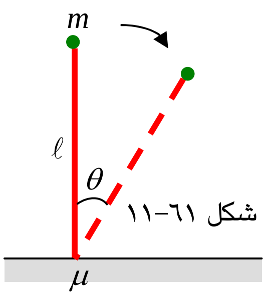
ت-۴ میله‌ای به طول ℓ، جرم m (با $I = m\ell^{2}/12$ نسبت به مرکز آن) روی میز افقی بدون اسطکاک سُر می‌خورد. سرعت زاویه‌ای میله صفر و سرعت خطی آن در راستای عمود بر میله و برابر $v_\circ$ است. در روی میز جسم ثابت مثلث شکلی برابر شکل (۵۹-۱۱) قرار دارد و میله با گوشه‌ی آن به طور کشسان برخورد می‌کند. سرعت انتهای دیگر میله درست پس از برخورد چقدر است؟ سرعت انتهایی که با مانع برخورد می‌کند، درست پس از برخورد چیست؟

ت-۵ سکه‌ای برای شکل (۶۱-۱۱) در روی میز ناهمواری بر روی لبه‌اش به طور قائم قرار ایستاده است. جرم سکه M و شعاع آن R است. به سکه ضربه‌ای وارد می‌کنیم و آن را با سرعت v و سرعت زاویه‌ای صفر به جلو می‌رانیم. هنگام که سرانجام حرکت سکه به غلتش بدون لغزش تبدیل می‌شود، سرعت افقی سکه را بیابید.



شکل ۶۰-۱۱

ت-۶ میله‌ای بدون جرم به طول ℓ برابر شکل (۶۱-۱۱) روی میزی به طور قائم استاده است. بر بالای میله ذره‌ای به جرم m وصل است. ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و سطح میز μ است. به جرم m تلنگر کوچکی می‌زنیم و سامانه‌ی میله و جرم از حالت قائم منحرف و سقوط می‌کند. در چه زاویه‌ای از خط قائم، میله در روی میز شروع به لغزیدن می‌کند؟

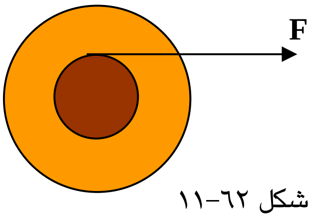


شکل ۶۱-۱۱

ت-۷ کره‌ی توپری به جرم M و شعاع R (و $I = (2/5)MR^{2}$) روی یک صفحه‌ی کاغذ بر روی میز زمین قرار دارد. صفحه‌ی کاغذ را با شتاب a موازی سطح زمین به سمت راست می‌کشیم. شتاب مرکز کره را به دست آورید. فرض کنید کره نسبت به صفه‌ی کاغذ نمی‌لغزد.

مسئله ها:

۱۱-۱ چرخی بر روی محور ثابتی سوار است و مجموعه‌ی چرخ و محور می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک بچرخد. برای اینکه گشتاور لختی چرخ + محور را اندازه بگیریم برابر شکل (۶۲۳-۱۱) ریسمان بدون جرمی را دور محور می‌پیچیم وبا نیروی افقی ثابت و معلوم F می کشیم. هنگامی‌که ریسمان به اندازه‌ی طول L کشیده شده باشد؛ مجموعه با سرعت زاویه‌ای $\omega_{\circ}$ می‌چرخد. گشتاور لختی سامانه را حول مرکز حساب کنید



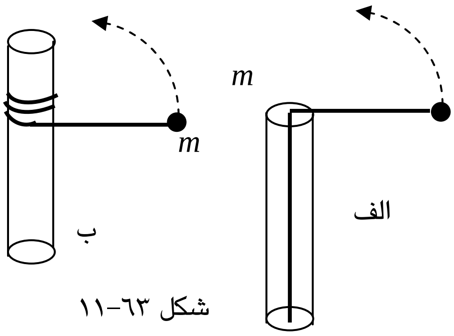
شکل ۶۲-۱۱

۱۱-۲ جرم m باریسمانی به میله‌ای به شعاع R وصل شده است در آغاز، فاصله‌ی جرم m از مرکز میله r است و جرم با سرعت $V_{\circ}$ به طور مماسی می‌چرخد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

(الف): ریسمان در بالای میله از سوراخی در وسط آن می‌گذرد. با کشیدن ریسمان از درون سوراخ، (شکل۶۳-۱۱ الف) طول آن را به تدریج کوتاه می‌کنیم.

(ب): ریسمان مانند (شکل۶۳-۱۱ ب) به دور میله می‌پیچد. در هر یک از این حالت ها چه کمیت هایی پایسته است؟

در هر یک از این حالت ها سرعت نهایی جرم را در هنگام برخورد با میله حساب کنید.



شکل ۶۳-۱۱

۱۱-۳ میله‌ی یکنواختی به وزن W به طور افقی بر روی دو پایه قرار دارد. در زمان $t=\circ$ یکی از پایه‌ها را برابر شکل (۶۴-۱۱) به طور سریع از زیر میله خارج می‌کنیم. درست پس از این کار چه نیرویی به پایه‌ی دیگر وارد می‌شود؟


شکل ۶۴-۱۱

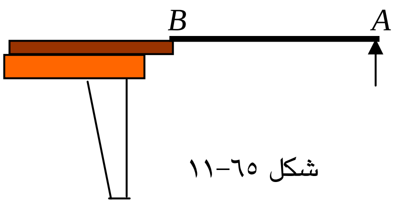
۱۱-۴ یک سر میله‌ی همگنی به جرم M و طول ℓ در نقطه‌ی B بر لبه‌ی میزی قرار دارد و انتهای دیگر آن را برابر شکل (۶۵-۱۱) با دست گرفته‌ایم (نقطه‌ی A) تا میله افقی قرار گیرد. نقطه‌ی A را ناگهان رها می‌کنیم.

(الف): گشتاور را نسبت به نقطه‌ی B حساب کنید.

(ب): شتاب زاویه‌ای حول نقطه‌ی B چقدر است؟

(پ): شتاب خطی مرکزجرم میله چقدر است؟

(ت): نیروی عمودی وارد به میله رادر نقطه‌ی B به دست آورید.



شکل ۶۵-۱۱

۱۱-۵ قرصی به جرم M و شعاع R را در نظر بگیرید. دور این قرص نواری پیچیده شده است. برابر شکل (۶۶-۱۱) نوار از روی قرقره‌ی بدون اصطکاک می‌گذرد. از انتهای دیگر نوار وزنه‌ی m آویزان است. قرص را رها می‌کنیم تا سقوط کند. فرض کنید که قرص به طور عمودی سقوط می‌کند

(الف): شتاب a_1 جرم m و شتاب a_2 قرص M چه رابطه‌هایی با شتاب زاویه‌ای قرص دارند؟

(ب): شتاب های a_1 و a_2 و شتاب زاویه‌ای قرص را به دست آورید.

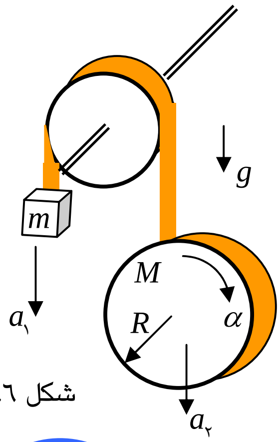
۱۱-۶ ماهواره‌ای به جرم m در مداری بیضی شکل دور زمین می‌چرخد. زمین در یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد. سرعت ماهواره در نقطه‌ی اوج بیشتر است یا در نزدیک‌ترین نقطه به زمین ؟

۱۱-۷ حلقه‌ای به جرم M و شعاع R روی سطح میز بدون اصطکاک خوابیده است و نقطه‌ای در روی لبه‌ی آن به میز وصل

است. حلقه می‌تواند حول محور گذرنده از این نقطه‌ی لبه بچرخد. حشره‌ای به جرم m با سرعت V روی حلقه راه می‌رود. اگر حشره از نقطه‌ی اتصال آغاز به حرکت کند، سرعت زاویه‌ای حلقه را وقتی که

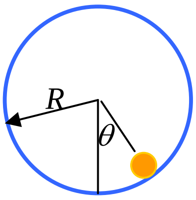
(الف) حشره نیمی از پیرامون حلقه را پیموده باشد.

(ب) به نقطه‌ی اتصال رسیده باشد، به دست آورید.



شکل ۱۱-۶۶

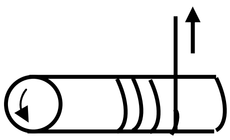
۱۱-۸ توپ کوچک همگنی به شعاع r در درون استوانه‌ی ثابتی به شعاع R ($r \ll R$) برابر شکل (۱۱-۶۷) بدون لغزیدن، می‌غلتد. بسامد نوسان‌های کوچک را بیابید.



شکل ۱۱-۶۷

۱۱-۹ استوانه‌ی توخالی به جرم M_1 و شعاع R_1 در درون استوانه‌ی توخالی دیگری به جرم M_2 و به شعاع R_2 بدون لغزش، می‌غلتد. محور هر دو استوانه افقی و $R_1 \ll R_2$ است. استوانه‌ی بزرگ آزاد است تا حول محورش بچرخد. بسامد نوسان‌های کوچک را حساب کنید.

۱۱-۱۰ ریسمانی روی استوانه‌ی توپری به جرم M و شعاع R پیچیده شده است. ریسمان از انتهای آزاد به طور عمودی به بالا کشیده می‌شود (شکل ۱۱-۶۸) تا با واپیچیده شدن ریسمان از سقوط مرکزجرم استوانه جلوگیری شود.

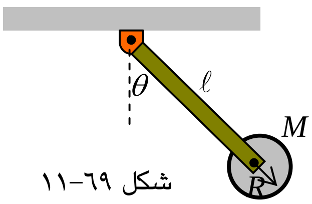

شکل ۱۱-۶۸

(الف): کشش ریسمان چقدر است.

(ب): برای اینکه سرعت زاویه‌ای استوانه به مقدار ω برسد چقدر کار انجام گرفته است؟

(پ): در این هنگام چه طولی از ریسمان باز شده است.

۱۱-۱۱ آونگی برابر شکل (۱۱-۶۹) از یک قرص به جرم M و شعاع R و میله‌ای به طول ℓ و جرم m تشکیل شده است. قرص با بلبرینگ به میله وصل است.

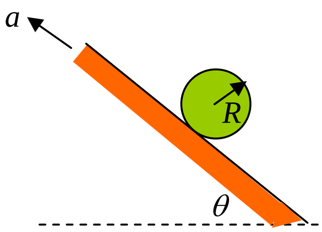


شکل ۱۱-۶۹

(الف) : دوره‌ی آونگ را برای نوسان‌های کوچک حساب کنید.

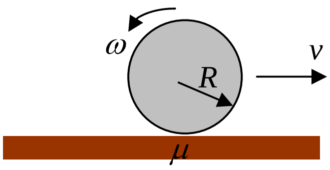
(ب): اگر قرص با بلبرینگ بدون اصطکاک به میله وصل شود، دوره‌ی آونگ چیست؟

۱۱-۱۲ گلوله‌ای با $I = (۲/۵)MR^۲$ روی سطح شیب‌داری به شیب θ قرار دارد. سطح برابر شکل (۱۱-۷۰) با شتاب a رو به بالا (در امتداد سطح) حرکت می‌کند. به ازای چه مقدار a، گلوله نسبت به چارچوب آزمایشگاه بی حرکت می‌ماند. (فرض می‌کنیم اصطکاک بین سطح و گلوله به اندازه‌ی کافی بزرگ است که از لغزش گلوله نسبت به سطح جلوگیری کند.)



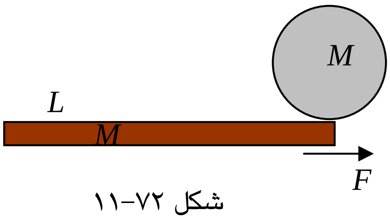
شکل ۱۱-۷۰

۱۱-۱۳ سکه‌ای به شعاع R ($I = (۱/۲)MR^۲$) را برابر شکل (۱۱-۷۱) از لبه‌اش بر روی میز قرار داده‌ایم. سکه را با سرعت خطی v و سرعت زاویه‌ای (واگرد) ω به جلو می‌رانیم. ضریب اصطکاک بین سکه و میز μ است. به ازای چه مقدارهای v و ω سکه پس از پیمودن مسافت d از جایگاه اولیه‌اش هم از نظر انتقالی و هم از نظر چرخشی به حال سکون در می‌آید؟



شکل ۱۱-۷۱

۱۱-۱۴ سکه‌ای به جرم M و شعاع R (و $I = (۱/۲)MR^۲$) برابر شکل (۱۱-۷۲) در انتهای سمت راست تخته‌ای به جرم M



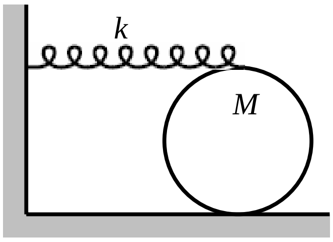
شکل ۷۲-۱۱

و طول L بر روی لبه‌اش ایستاده است. با نیروی ثابت F تخته را به سمت راست می‌کشیم. فرض کنید سکه نسبت به تخته نمی لغزد. یعنی بین تخته و سکه اصطکاک کافی وجود دارد که از لغزش جلو گیری کند.

(الف): شتاب های تخته و سکه را بیابید.

(ب): در زمانی که انتهای سمت چپ تخته به سکه می‌رسد، سکه چه مقدار جابه‌جا شده است؟

۱۵-۱۱ استوانه‌ی توپری به جرم M و شعاع R و $I = MR^2/2$ برابر شکل (۷۳-۱۱) به فنری با ثابت k وصل است. اگر استوانه بدون لغزش بغلتد، بسامد نوسان‌های کوچک را بیابید. (توجه: قسمت بالای استوانه بیش از مرکز آن جابه جا می‌شود.

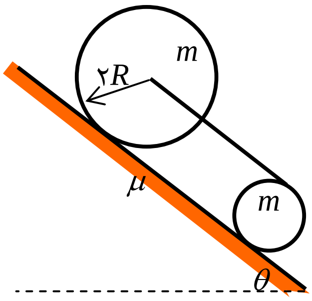


شکل ۷۳-۱۱

۱۶-۱۱ دو استوانه‌ی توپر هر یک به جرم m برابر شکل (۷٤-۱۱) روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ قرار دارند. شعاع یکی از استوانه‌ها R و شعاع دیگری $۲R$ است. محور استوانه‌ی بزرگ با ریسمانی به بدنه‌ی استوانه‌ی کوچک وصل است. استوانه‌ها را از حالت سکون رها می‌کنیم تا بدون لغزش در روی سطح به پایین بغلتند.

(الف) : شتاب استوانه ها را بیابید.

(ب): اگر ضریب اصطکاک بین سطح و استوانه‌ها $\mu = 1$ باشد، بیشینه مقداری را که θ می‌تواند داشته باشد و هنوز هم هیچ یک از استوانه‌ها در روی سطح نلغزد، چقدر است؟



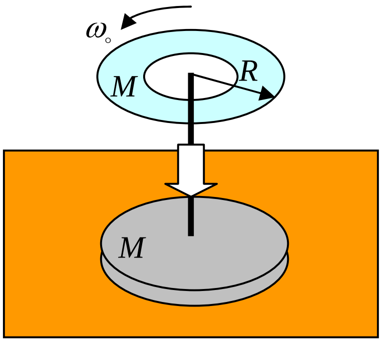
شکل ۷٤-۱۱

۱۷-۱۱ کره‌ای به شعاع r حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. محور چرخش افقی است. کره را روی سطحی قرار می‌دهیم که ضریب اصطکاک آن μ است. کره نخست می‌لغزد و سپس بدون لغزش می‌غلتد.

(الف): سرعت خطی نهایی مرکزجرم کره را بیابید.

(ب): چه مسافتی را کره می‌پیماید تا به این سرعت نهایی برسد؟

(پ): برای وضعیتی که μ به اندازه‌ی کافی بزرگ است و لغزش روی نمی‌دهد، قسمت (الف) را دوباره حل کنید.



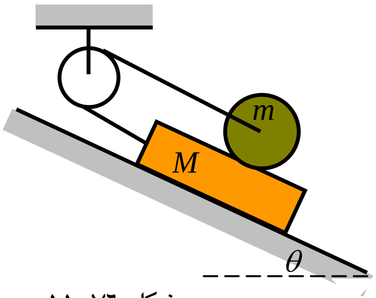
شکل ۷۵-۱۱

۱۸-۱۱ حلقه‌ای به جرم M، شعاع بیرونی R و شعاع درونی $R/۲$ با سرعت زاویه‌ای ω_0 خول محورش می‌چرخد. برابر شکل (۷۵-۱۱) این حلقه را روی قرصی به جرم M و شعاع R که در روی میز بدون اصطکاک ساکن است، قرار می دهیم. مرکزجرم حلقه و قرص بر هم منطبق اند. ضریب اصطکاک بین سطح حلقه و قرص μ است و شتاب گرانش به پایین است.

(الف): گشتاور اولیه که به قرص وارد می‌شود نسبت به مرکز جرم آن چقدر است؟ گشتاور اولیه‌ی وارد به حلقه نسبت به مرکز جرم آن چقدر است؟

(ب) : به خاطر وجود اصطکاک بین حلقه و قرص، سرانجام هر دو با یک سرعت زاویه‌ای خواهند چرخید. این سرعت زاویه‌ای مشترک را بیابید

(پ): چه مدت طول می‌کشد تا حلقه و قرص به این سرعت زاویه‌ای مشترک دست پیدا کنند؟



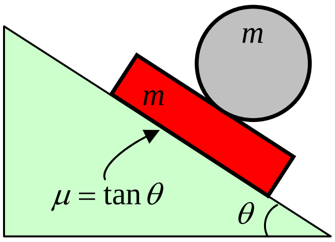
شکل ۱۱-۷٦

۱۱-۱۹ چرخی به جرم m (و $I = mR^2/2$) برابر شکل (۱۱-۷٦) روی تختهای به جرم M قرار دارد (میتوانید فرض کنید: $M > m$). تخته بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک با شیب θ قرار دارد. یک انتهای ریسمان بدون جرمی به محور چرخ گره خورده است و پس از گذشتن از روی قرقرهی بدون جرمی به تخته وصل شده است. فرض کنید که چرخ بدون لغزیدن بر روی تخته میغلتد. دو بخش ریسمان همواره با سطح موازی قرار دارد.

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به تخته و چرخ را بکشید

(ب): شتاب تخته را حساب کنید.

۱۱-۲۰ استوانهی توپری به جرم m (و $I = mR^2/2$) روی تخته ای به جرم m قرار دارد. تخته برابر شکل (۱۱-۷۷) روی گوهی ثابتی با زاویهی شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک بین تخته و گوه $\mu = \tan\theta$ است. فرض کنید بین تخته و استوانه نیروی اصطکاک به اندازهای بزرگ است که از لغزیدن استوانه نسبت به تخته جلوگیری میکند.

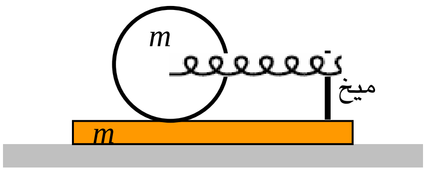


شکل ۱۱-۷۷

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به تخته و استوانه را رسم کنید. مطمئن باشید که همهی نیروها را بکشید.

(ب) : شتاب خطی استوانه را بیابید.

۱۱-۲۱ چرخی (با $I = mR^2/2$) برابر شکل (۱۱-۷۸) میتواند بدون لغزش روی یک تخته بغلتد. تخته روی سطح بدون اصطکاک میتواند بلغزد. محور چرخ با فنری با ثابت k به میخی در روی تخته وصل است. جرم چرخ و تخته، هر دو، m اند و میخ جرم ندارد. چرخ را از مکان ترازمندیش دور و سپس آن را از حالت سکون رها میکنیم.



شکل ۱۱-۷۸

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به چرخ و تخته را بکشید (نگران نیروهای قائم نباشید و فرض کنید میخ بخشی از تخته است).

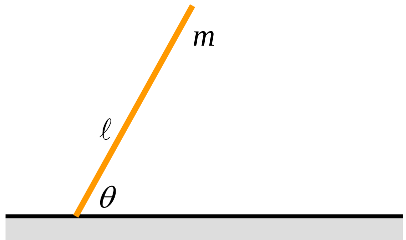
(ب): بسامد نوسانهای سامانه را بیابید (فرض کنید که طول حالت ترازمندی فنر دراز است و بنابراین، چرخ با میخ برخورد نمی کند).

۱۱-۲۲ میلهی همگنی به جرم m و طول ℓ (و $I = m\ell^2/12$ حول مرکز) را در نظر بگیرید.

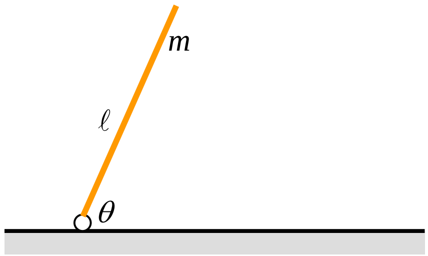
(الف): انتهای میله برابر شکل (۱۱-۷۹ الف) به روی میز افقی لولا شده است و میله میتواند حول آن بچرخد. میله را از وضعیتی که با افق زاویهی θ میسازد، رها میکنیم. شتاب زاویهای میله را درست پس از رها شدن حساب کنید.

(ب): مسئله را برای حالتی حل کنید که انتهای میله روی سطح افقی و بدون اصطکاک میز قرار دارد، اما به آن لولا **نشده** است (شکل ۱۱-۷۹ ب) و بنابراین، میتواند روی میز بلغزد.

۱۱-۲۳ میلهی همگنی به جرم m و طول ℓ (و $I = m\ell^2/12$ حول مرکز) روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد و حول

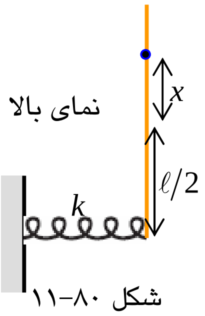


شکل ۷۹-۱۱ ب



شکل ۷۹-۱۱ الف

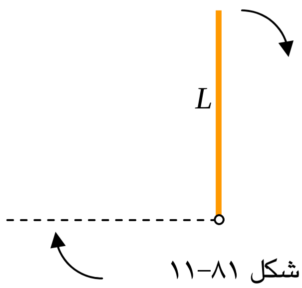
نقطه‌ای به فاصله‌ی x از مرکزش می‌چرخد. برابر شکل (۸۰-۱۱) فنری با ثابت k عمود بر انتهای میله به آن وصل است. به ازای چه مقدار x بسامد نوسان‌های کوچک میله بیشینه مقدار خود را دارد؟



شکل ۸۰-۱۱

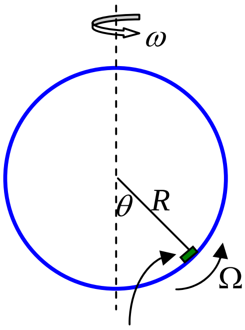
۲۴-۱۱ میله‌ی همگنی به طول L (و $I = mL^2/12$ حول مرکز) حول یک انتها می‌چرخد. میله را برابر شکل (۸۱-۱۱) در حالت عمودی نگه می‌داریم و سپس با تلنگر کوچکی رهایش می‌کنیم تا حول انتهایش تاب بخورد. وقتی میله سه چهارم یک دور چرخید و در وضعیت افقی قرار گرفت، محور چرخش را حذف می کنیم. میله در هوا معلق می‌شود و به سوی بالا حرکت می‌کند. بیشینه ارتفاعی را که مرکزجرم میله اوج می گیرد چقدر است؟ وقتی که مرکزجرم به این ارتفاع بیشینه می رسد، چه زاویه ای با افق می سازد؟

۲۵-۱۱ قرص کوچکی به جرم m و شعاع R (و $I = mR^۲/۲$) برابر شکل (۸۲-۱۱) روی سطح یخی بدون اصطکاک می لغزد. سرعت خطی قرص v و به سوی راست و سرعت زاویه‌ای آن ω و ساعتگرد است. قرص با انتهای میله‌ای به جرم m و به طول $۲R$ (و $I = m(۲R)^۲/۲$ نسبت به مرکزش) تماس پیدا می‌کند و به آن می‌چسبد و جسمی مثل آب نبات چوبی می‌سازد. سرعت زاویه‌ای آب نبات چوبی را حساب کنید و مقدار آن را برای حالت خاص $v = R\omega$ به دست آورید.

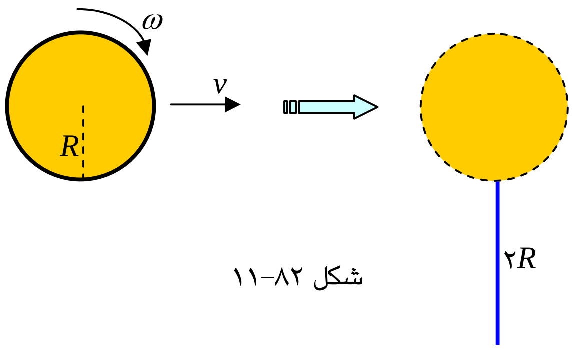


شکل ۸۱-۱۱

۲۶-۱۱ حلقه‌ی بدون جرم شکل (۸۳-۱۱) با سرعت زاویه‌ای *ثابت* ω حول قطرش می چرخد. حشره‌ای به جرم m با سرعت زاویه‌ای *ثابت* Ω در روی این حلقه راه می‌رود. وقتی حشره در زاویه‌ی θ است



شکل ۸۳-۱۱

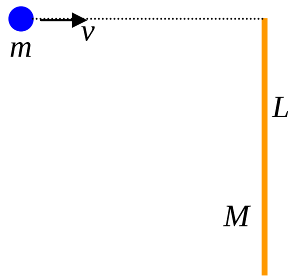


شکل ۸۲-۱۱

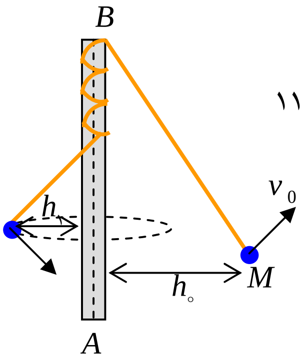
ازطرف حلقه به آن نیروی کل **N** وارد می‌شود. مولفه‌ی عمود بر صفحه‌ی حلقه‌ی **N** را $\mathbf{N}_\perp$ بنامید و آن را حساب کنید. (آهنگ تغییر **L** حشره را حول محور چرخش حساب کنید و از گشتاور وارد به حشره استفاده کنید.)

۱۱-۲۷ جرم M در شکل (۱۱-۸٤) به ریسمان MB وصل است. به جرم M سرعت اولیه‌ی مماسی v_0 (v_0 به صفحه‌ی ABM عمود است) داده می‌شود. در اثر حرکت جرم، ریسمان به دور میله‌ی نازک AB می‌پیچد. اگر فاصله‌ی اولیه‌ی جرم تا میله h_0 باشد، وقتی جرم در فاصله‌ی h_1 از میله است، سرعت جرم چقدر است؟

۱۱-۸ در شکل (۱۱-۸٥) میله‌ای به جرم M و به طول L روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v در راستای عمود بر میله حرکت و با یک انتهای میله برخورد کشسان می‌کند. برای این که پس از برخورد، گلوله ساکن بماند



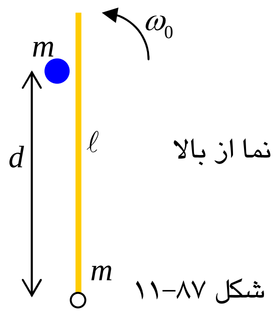
شکل ۱۱-۸٥



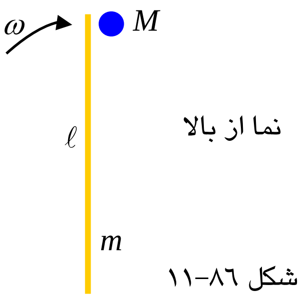
شکل ۱۱-۸٤

مقدار m برحسب M چقدر باید باشد؟

۱۱-۲۹ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ ($I = m\ell^2/12$ نسبت به مرکز) روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و برابر شکل (۱۱-۸٦) با سرعت زاویه‌ای ω حول مرکزش می‌چرخد. مرکز میله ساکن است (اما با میخ یا لولا به میز وصل نیست). ذره‌ای به جرم M روی میز قرار دارد و انتهای میله با آن برخورد کشسان می‌کند. برای این که میله پس از برخورد حرکت چرخشی نداشته باشد و فقط حرکت انتقالی داشته باشد، مقدار M چقدر باید باشد؟



شکل ۱۱-۸۷

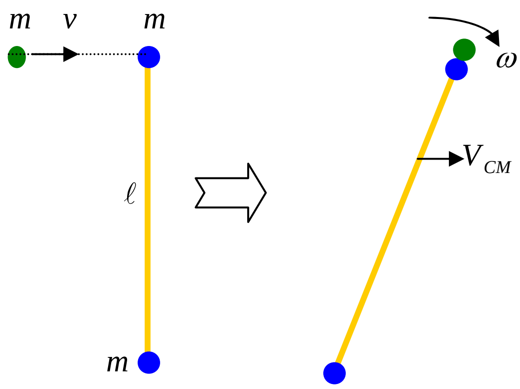


شکل ۱۱-۸٦

۱۱-۳۰ یک انتهای میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ (با $I = m\ell^2/3$ نسبت به یک انتها) برابر شکل (۱۱-۸۷) به میزی لولا شده است. میله در روی سطح بدون اصطکاک میز با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. توپی به جرم m در فاصله‌ی d از لولا قرار دارد و میله با آن برخورد کشسان می‌کند.

(الف): سرعت توپ را پس از برخورد به دست آورید.

(ب): به ازای چه مقدار d این سرعت بیشینه می‌شود؟



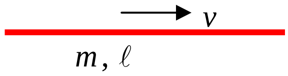
شکل ۱۱-۸۸

۱۱-۳۱ دمبلی از دو جرم m و میله‌ی بدون جرم به طول ℓ تشکیل شده است و روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد. جرم m برابر شکل (۱۱-۸۸) با سرعت v و عمود بر دمبل حرکت می‌کند و با جرم بالایی دمبل برخورد می کند و به آن می‌چسبد.

(الف): سرعت زاویه ای ω سامانه ی پس از برخورد را به دست آورید.

(ب): سرعت انتهای دوجرمی را پس از آنکه میله نیم دور چرخید، حساب کنید.

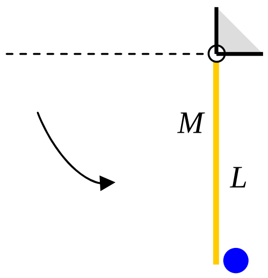
۱۱-۳۲ میله‌ای به جرم m و طول ℓ برابر شکل (۱۱-۸۹) در امتداد محور y روی سطح افقی میز بدون اصطکاک قرار دارد. میله‌ی یکسان دیگری با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند و با میله‌ی اولی برخورد می‌کند و به یک انتهای آن می‌چسبد و جسم سختی با زاویه‌ی 90° می‌سازد. سرعت زاویه‌ای جسم حاصل را پس از برخورد به دست آورید. در این برخورد چه مقدار انرژی به صورت گرما تلف می‌شود؟





شکل ۱۱-۸۹

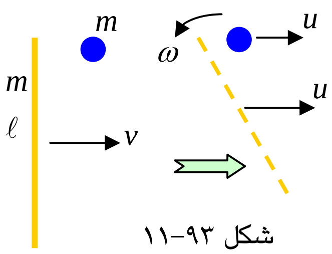
۱۱-۳۳ میله‌ای به جرم M و طول L (با $I = ML^2/2$ نسبت به مرکز و $I = ML^2/3$ نسبت به یک انتها) برابر شکل (۱۱-۹۰) از یک انتها آویزان است و می‌تواند حول این انتها تاب بخورد. میله را از حالت افقی رها می‌کنیم. میله تاب می‌خورد و وقتی به وضعیت قائم می‌رسد، انتهای آزادش با توپی برخورد کشسان می کند. اگر در اثر برخورد، میله نصف سرعت زاویه‌ای خود را از دست بدهد، جرم توپ چقدر است؟ سرعت توپ درست پس از برخورد چیست؟



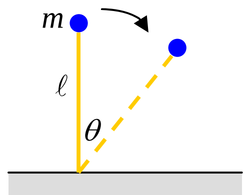
شکل ۱۱-۹۰

۱۱-۳۴ میله‌ای به جرم m وطول ℓ برابر شکل (۱۱-۹۱) به طور قائم قرار دارد و انتهای پایین آن به تکیه گاهی لولا شده است. به میله تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم تا حول لولا بچرخد. در لحظه‌ای که میله افقی قرار می‌گیرد (پس از یک چهارم دور چرخیدن) مولفه‌های افقی وعمودی نیرویی را که لولا به میله وارد می‌کند به دست آورید.

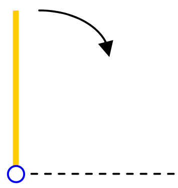
۱۱-۳۵ برابر شکل (۱۱-۹۲) میله‌ی بدون جرمی به طول ℓ روی میزی به طور قائم ایستاده است و جرم m به انتهای آن وصل



شکل ۱۱-۹۳



شکل ۱۱-۹۲

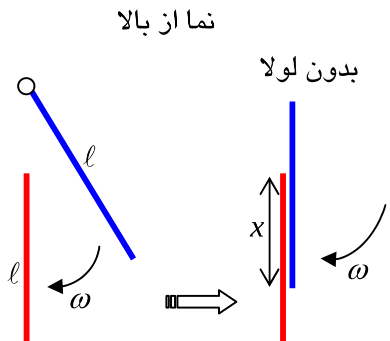


شکل ۱۱-۹۱

است. ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و سطح میز μ است. به جرم m تلنگرکوچکی می زنیم و سامانه‌ی میله بعلاوه‌ی جرم شروع به افتادن می‌کند. در چه زاویه‌ی θ نسبت به خط قائم، میله در روی میز شروع به لغزیدن می‌کند؟

۱۱-۳۶ میله‌ای برابر شکل (۱۱-۹۳) روی میز بدون اصطکاک سُر می‌خورد و یک انتهایش با توپی برخورد کشسان می‌کند. جرم‌های میله و توپ هر دو m اند؛ اما جرم میله چنان توزیع شده است که گشتاور لختی آن نسبت به مرکزجرمش که در وسط میله قرار دارد $I = Am\ell^2$ است. A یک ضریب عددی است. برای این که سرعت توپ با سرعت میله پس از برخورد برابر باشد، A چقدر باید باشد؟

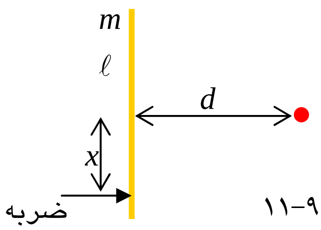
۱۱-۳۷ میله‌ای به جرم m و طول ℓ (و $I = m\ell^2/12$) روی میز بدون اصطکاک با سرعت زاویه‌ای ω حول یک انتها می‌چرخد. این انتها با لولا به میز وصل است. این میله با میله‌ی مشابهی برابر شکل (۱۱-۹٤) برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. طول هم پوشانی دو میله x است. درست پیش از برخورد میله‌ها، لولا را حذف می‌کنیم. برای این که سامانه‌ی "دومیله‌ای" حرکت چرخشی نداشته باشد و فقط حرکت انتقالی داشته باشد، مقدار x چقدر باید باشد؟



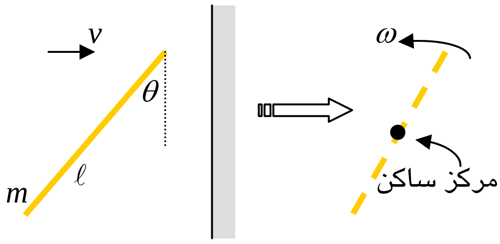
شکل ۱۱-۹٤

۱۱-۳۸ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ روی سطح بدون اصطکاک حرکت می‌کند. بردار سرعت $\mathbf{v}$ میله به دیواری عمود است. میله نمی‌چرخد و با جهت دیوار برابر شکل (۱۱-۹۵) زاویه‌ی θ می‌سازد. اگر میله به طور کشسان با دیوار برخورد کند، برای این که پس از برخورد سرعت مرکزجرم میله صفر شود، θ باید چقدر باشد؟

۱۱-۳۹ میله‌ای به طول ℓ (و $I = m\ell^{2}/12$) روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. در فاصله‌ی x از مرکز میله و عمود بر آن، به میله ضربه‌ای سریع وارد می‌کنیم (شکل ۱۱-۹٦ را ببینید). نقطه‌ای به فاصله‌ی d از مکان اولیه‌ی مرکزجرم میله در روی آن با رنگ سرخ مشخص شده است. برای این که در موقع رسیدن مرکز میله به این نقطه، میله یک دور کامل بچرخد،



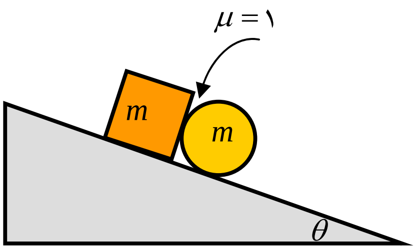
شکل ۱۱-۹٦



شکل ۱۱-۹۵

مقدار x (برحسب ℓ و d) چقدر باید باشد؟ برای این که چنین مقداری برای x وجود داشته باشد، کمینه مقدار d (برحسب ℓ) چقدر باید باشد؟

۱۱-۴۰ یک استوانه‌ی توپر (با $I = mR^{2}/2$) و یک قطعه‌ی مکعبی، هر دو با جرم m، روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ قرار دارند و برابر شکل (۱۱-۹۷) با هم درتماس اند. بین استوانه و سطح اصطکاک به اندازه‌ای است که از لغزش استوانه جلوگیری می کند؛ اما کف قطعه روغن کاری شده است و بین آن و سطح شیب‌دار اصطکاک وجود ندارد. بین سطح سمت راست قطعه و استوانه ضریب اصطکاک جنبشی $\mu = 1$ است.



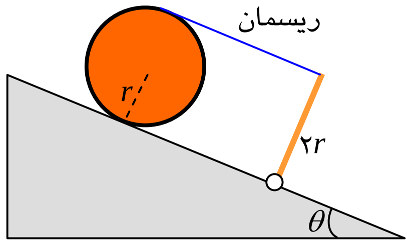
شکل ۱۱-۹۷

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به قطعه و استوانه را رسم کنید. همه‌ی نیروها را نشان دهید.

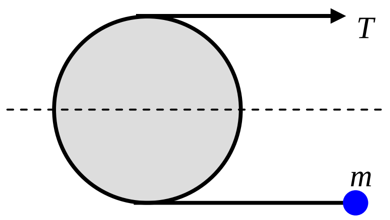
(ب): شتاب قطعه را بیابید (فرض کنید θ به اندازه‌ی کافی کوچک است و سطح قطعه همواره با سطح شیب‌دار در تماس باقی می‌ماند. چه شرطی برای θ باید وجود داشته باشد تا این وضعیت برقرار باشد؟)

۱۱-۴۱ استوانه‌ی توپری به جرم m و شعاع r (و با گشتاور لختی $I = mr^{2}/2$ نسبت به محورش) و میله‌ی همگنی به جرم m و طول $2r$ (و $I = m(2r)^{2}/12$ نسبت به مرکزش) روی سطح شیب‌دار ثابتی با زاویه‌ی شیب θ قرار دارند. میله برابر شکل (۱۱-۹۸) بر سطح شیب‌دار عمود است. استوانه بدون لغزیدن روی سطح می‌غلتد و میله با لولایی به سطح وصل است. ریسمان بدون جرمی انتهای بالایی میله را به "بالای" استوانه وصل می‌کند. اگر سامانه را از این وضعیت رها کنیم، درست پس از رها شدن، شتاب مرکز استوانه را به دست آورید.

۱۱-۴۲ استوانه‌ی توپری به شعاع R و به جرم m (و با $I = mR^{2}/2$) از قاعده روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد.



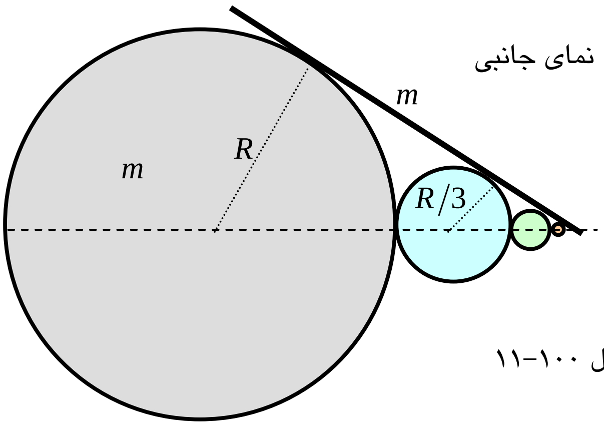
شکل ۹۸-۱۱



شکل ۹۹-۱۱

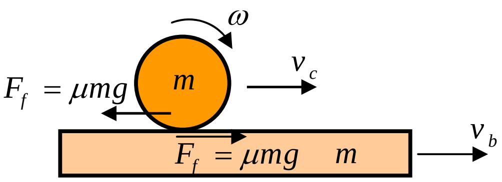
ریسمان بدون جرمی برابر شکل (۹۹-۱۱) از پشت استوانه می‌گذرد و نیم دور با بدنه‌ی استوانه در تماس است. جرم m به یک انتهای ریسمان وصل است. انتهای دیگر ریسمان با نیروی T کشیده می‌شود. سطح استوانه به اندازه‌ی کافی نا هموار است که از لغزش ریسمان نسبت به استوانه جلوگیری کند. فرض کنید مرکز استوانه مقید است روی خط راست حرکت کند (خط بریده در شکل). شتاب جرم m متصل به ریسمان را بیابید. (توجه: برای ساده‌تر شدن معادله‌ها $a_\circ \equiv T/m$ را تعریف کنید. با این کار m ها از رابطه‌ها حذف می‌شوند . پاسخ را بر حسب $a_\circ$ به دست آورید.)

۴۳-۱۱ از یک صفحه‌ی تخت فلزی بینهایت قرص می‌بریم (بنابراین، چگالی سطحی جرم همه‌ی قرص‌ها یکسان و برابر σ است). قرص‌ها را روی خط افقی می‌چینیم به طوری که مرکزشان روی خط راستی قرار گیرند (شکل ۱۰۰-۱۱ را ببینید.) قرص‌ها می‌توانند حول مرکز ثابتشان بچرخند. بین قرص‌ها اصطکاک وجود ندارد (می‌توانید فرض کنید که قرص‌ها با فاصله های بینهایت کوچک از هم قرار دارند.) شعاع بزرگ-ترین قرص R (و $I = mR^۲/۲$) است و شعاع هر قرص بعدی ۱/۳ شعاع قرص سمت چپ‌اش است. میله‌ای را که جرم m آن با جرم بزرگ‌ترین قرص برابر است مطابق شکل روی قرص‌ها قرار می‌دهیم تا با همه‌ی قرص‌ها در تماس باشد. سامانه را از این وضعیت رها می‌کنیم. می‌توان نشان داد (شما این را بپذیرید) که ضریب ۱/۳ بالا به این معنی است که میله با خط افق زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد. با فرض این که میله نسبت به هیچ یک از قرص‌ها نمی‌لغزد، شتاب میله را در امتداد خودش به دست آورید.



شکل ۱۰۰-۱۱

حل مثال‌های تکمیلی



شکل ۱۱-۱۰۱

ت-۱ در زمانی پس از آغاز حرکت استوانه وهنگامی که هنوز استوانه روی تخته می‌لغزد، نیروهای وارد به تخته و استوانه در شکل (۱۱-۱۰۱) نشان داده شده‌اند. نیروی اصطکاک $F_f = \mu mg$ است. بنابراین، شتاب تخته $a_b = \mu g$ و شتاب استوانه $a_c = -\mu g$ اند. بنابراین،

$$v_c = v_\circ - \mu gt \quad , \quad v_b = \mu gt \qquad (۱۱-۱۳۷)$$

گشتاور وارد به استوانه $F_f\, r$ است. پس:

$$F_f\, r = I\alpha \;\Rightarrow\; \mu mgr = \left(mr^{۲}/۲\right)\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = ۲\mu g/r \qquad (۱۱-۱۳۸)$$

و در نتیجه

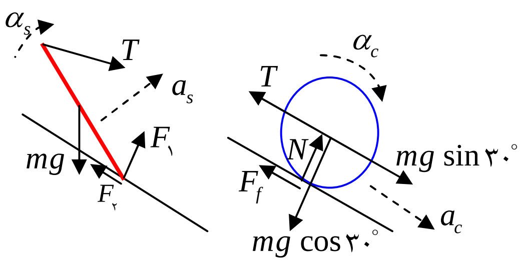
$$\omega = \alpha t = \frac{۲\mu gt}{r} \qquad (۱۱-۱۳۹)$$

هنگامی که سرانجام استوانه بدون لغزیدن بر روی تخته می‌لغزد، شرط غلتش بدون لغزش لازم می‌دارد که سرعت استوانه نسبت به زمین برابر $v_c = v_b + r\omega$ باشد. توجه کنید که سرعت استوانه نسبت به تخته $r\omega$ است که نتیجه‌ی چرخش رو به جلو استوانه است که با افزودن سرعت تخته، v_b ، به آن سرعت استوانه نسبت به زمین به دست می‌آید. حال اگر در $v_c = v_b + r\omega$ کمیت‌های بالا را جاگذاری کنیم ، به دست می‌آید

$$v_c = v_b + r\omega \;\Rightarrow\; v_\circ - \mu gt = \left(\mu gt\right) + r\left(\frac{۲\mu gt}{r}\right) \;\Rightarrow\; v_\circ = ۴\mu gt \;\Rightarrow\; t = \frac{v_\circ}{۴\mu g} \qquad (۱۱-۱۴۰)$$

این زمانی است که استوانه شروع به غلتش خالص می‌کند. سرعت استوانه نسبت به زمین در این لحظه برابر است با

$$v_c = v_\circ - \mu gt = v_\circ - \mu g\left(\frac{v_\circ}{۴\mu g}\right) = \frac{۳}{۴}v_\circ \qquad (۱۱-۱۴۱)$$



شکل ۱۱-۱۰۲

ت-۲ : **(الف)** شکل‌های (۱۱-۱۰۲). برای حل مسئله یافتن $F_۱$ ، $F_۲$ و a_s لازم نیست (یعنی نیازی به دو معادله‌ی $F = ma$ برای میله یا معادله‌ی $a = r\alpha$ میله یا $F = ma$ در راستای عمودی برای استوانه لازم نیست).

(ب): از معادله‌ی $F = ma$ برای استوانه در امتداد سطح داریم

$$mg\sin ۳۰^\circ - T - F_f = ma_c$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{۲} - T - F = ma_c \qquad (۱۱-۱۴۲)$$

از $G = I\alpha$ برای استوانه نسبت به مرکز آن به دست می‌آید

$$F_f R = \left(\frac{۱}{۲}mR^{۲}\right)\alpha_c \;\Rightarrow\; F_f = \frac{۱}{۲}mR\alpha_c \qquad (۱۱-۱۴۳)$$

از $G = I\alpha$ برای میله حول پیوندگاه آن داریم

$$T\left(۲R\sin ۳۰^{\circ}\right)-mg\left(R\sin ۳۰^{\circ}\right)=\left[\left(\frac{۱}{۳}\right)m\left(۲R\right)^{۲}\right]\alpha_s \quad\Rightarrow\quad T-\frac{mg}{۲}=\frac{٤}{۳}mR\alpha_s \qquad (۱۱-۱٤٤)$$

شرط نلغزیدن استوانه :

$$a_c=R\alpha_c \qquad (۱۱-۱٤٥)$$

رابطه‌ی بین a_c و a_s (این بخش پیچیده است) از پایستگی طول ریسمان داریم: اگر میله به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک θ_s بچرخد، انتهای بالایی آن به اندازه‌ی $(۲R)\theta_s$ حرکت می‌کند. مولفه‌ی این طول در امتداد ریسمان $(۲R\theta_s)\cos ٦۰^{\circ}=R\theta_s$ است. بنابراین، ریسمان و در نتیجه استوانه مسافت $x_c=R\theta_s$ را در امتداد سطح شیب‌دار می‌پیماید. اگر از این رابطه دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم به دست می‌آید

$$a_c=R\alpha_s \qquad (۱۱-۱٤٦)$$

(پ): نیروهای مجهول عبارتند از T و F_f و شتاب‌های مجهول α_c، α_s و a_c اند.

(ت): با استفاده از معادله‌های (۱۱-۱٤٥) و (۱۱-۱٤٦) می‌توان $R\alpha_c$ و $R\alpha_s$ را از رابطه‌های (۱۱-۱٤۳) و (۱۱-۱٤٤) حذف کرد. این دو معادله به صورت زیر درمی‌آیند.

$$F_f=\frac{۱}{۲}ma_c \quad ; \quad T-\frac{mg}{۲}=\frac{٤}{۳}ma_c \qquad (۱۱-۱٤۷)$$

حالا از این رابطه، T و F_f را در معادله‌ی (۱۱-۱٤۲) قرار دهید. به دست می‌آید

$$\frac{mg}{۲}-\left(\frac{mg}{۲}+\frac{٤}{۳}ma_c\right)-\left(\frac{۱}{۲}ma_c\right)=ma_c \quad\Rightarrow\quad ۰=\left(\frac{٤}{۳}+\frac{۱}{۲}+۱\right)ma_c \quad\Rightarrow\quad a_c=۰ \qquad (۱۱-۱٤۸)$$

بنابراین، سامانه اصلا حرکت نمی‌کند. این وضعیت را می‌توان به صورت زیر فهمید: گشتاور وارد به کل سامانه (توجه کنید که حالا کشش ریسمان نیروی داخلی است) نسبت به پیوندگاه میله را فقط نیروی گرانش mg میله و نیروی $mg\sin ۳۰^{\circ}$ استوانه فراهم می‌کنند (N با $mg\cos 30^{\circ}$ حذف می‌شود). پس داریم

$$G_c+G_s=\left(mg\sin ۳۰^{\circ}\right)R-mg\left(R\sin ۳۰^{\circ}\right)=۰$$

ت-۳ **(الف)** : با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی، نخست گشتاور لختی قطعه را نسبت به لولا حساب کنید. داریم

$$I=I_{CM}+md^{۲}=\frac{۱}{٦}m\ell^{۲}+m\left(\ell/\sqrt{۲}\right)^{۲}=\frac{۲}{۳}m\ell^{۲} \qquad (۱۱-۱٤۹)$$

وقتی توپ در گوشه‌ی مکعب قرار می‌گیرد، گشتاور لختی‌اش نسبت به لولا $m\left(\sqrt{۲}\ell\right)^{۲}=۲m\ell^{۲}$ است. بنابراین، گشتاور لختی کل سامانه نسبت به لولا عبارت است از

$$\frac{۲}{۳}m\ell^{۲}+۲m\ell^{۲}=\frac{۸}{۳}m\ell^{۲} \qquad (۱۱-۱٥۰)$$

از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به لولا به دست می‌آید

$$mv\ell=\left(\frac{۸}{۳}m\ell^{۲}\right)\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=\frac{۳v}{۸\ell} \qquad (۱۱-۱٥۱)$$

(ب): پس از برخورد انرژی کل سامانه تغییر نمی‌کند . پایسته باقی می‌ماند. از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم تا ببینیم آیا مرکزجرم سامانه می‌تواند به اندازه‌ای بلند شود که درست در بالای نقطه‌ی تعلیق (بالای لولا) قرار گیرد؟ این وضعیت، مقدار حدی سرعت v را به دست می‌دهد. اگر سرعت گلوله بیش‌تر از این مقدار حدی باشد، قطعه بر روی سطح سمت راست خود

روی میز واژگون می‌شود.

مرکزجرم مجموعه‌ی قطعه و توپ (پس از برخورد توپ به قطعه و چسبیدن به آن) در نیم‌راه بین مرکز قطعه و توپ (گوشه‌ی سمت چپ بالایی قطعه) قرار دارد. یعنی در فاصله‌ی $\left(\sqrt{۲}\ell\right)\left(۳/٤\right)$ از لولا. انرژی جنبشی اولیه $I\omega^{۲}/۲$ است. می‌خواهیم همه‌ی این انرژی به انرژی پتانسیل تبدیل شود. یعنی داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\left(۲m\right)g\left(\Delta h\right) \tag{۱۱-۱۵۲}$$

که در آن Δh مقدار جابه‌جایی عمودی مرکزجرم سامانه از مکان $\left(\sqrt{۲}\ell\right)\left(۳/٤\right)$ به بالای لولا است ، یعنی $۳\ell/٤$ است. پس، می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\left(۲m\right)g\left(\Delta h\right)\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۲}\left(\frac{۸}{۳}m\ell^{۲}\right)\left(\frac{۳v}{۸\ell}\right)^{۲}=\left(۲m\right)g\left(\frac{۳}{٤}\sqrt{۲}\ell-\frac{۳}{٤}\ell\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۱٦}mv^{۲}=\frac{۳\left(\sqrt{۲}-۱\right)}{۲}mg\ell\ \Rightarrow\ v=\sqrt{۸\left(\sqrt{۲}-۱\right)g\ell} \tag{۱۱-۱۵۳}$$

ت-۴ سرعت خطی نهایی را v و سرعت زاویه‌ای نهایی را ω بنامید (چرخش پادساعتگرد را جهت مثبت فرض کنید. از پایستگی انرژی داریم

$$\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱۲}m\ell^{۲}\right)\omega^{۲} \tag{۱۱-۱۵٤}$$

جمله‌ی اول سمت راست انرژی مرکزجرم میله و جمله‌ی دوم انرژی حول مرکزجرم است. از این رابطه داریم

$$v_{\circ}^{۲}=v^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\ell^{۲}\omega^{۲} \tag{۱۱-۱۵۵}$$

از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به گوشه‌ی مانع به دست می‌آید

$$mv_{\circ}\left(\frac{\ell}{۲}\right)=mv\frac{\ell}{۲}+\frac{۱}{۱۲}m\ell^{۲}\omega\ \Rightarrow\ v_{\circ}=v+\frac{۱}{٦}\ell\omega \tag{۱۱-۱۵٦}$$

بازهم جمله‌ی اول تکانه‌ی زاویه‌ای مرکزجرم و جمله‌ی دوم L نسبت به مرکزجرم است. اگر v را از رابطه‌ی (۱۵٦-۱۱) به دست بیاوریم و در رابطه‌ی (۱۵۵-۱۱) جاگذاری کنیم، خواهیم داشت

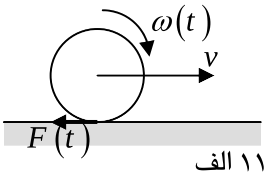
$$v_{\circ}^{۲}=\left(v_{\circ}-\frac{۱}{٦}\ell\omega\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\ell^{۲}\omega^{۲}\ \Rightarrow\ v_{\circ}^{۲}=v_{\circ}^{۲}-\frac{۱}{۳}v_{\circ}\ell\omega+\frac{۱}{۳٦}\ell^{۲}\omega^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\ell^{۲}\omega^{۲}$$

$$\Rightarrow\quad \omega=\frac{۳v_{\circ}}{\ell}\quad \Rightarrow\quad v=v_{\circ}-\frac{۱}{٦}\ell\omega=\frac{v_{\circ}}{۲} \tag{۱۱-۱۵۷}$$

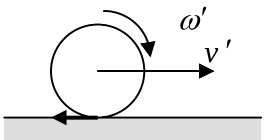
سرعت انتهای پایین میله، v'، جمع سرعت انتقالی مرکزجرم و سرعت چرخشی حول مرکزجرم (مربوط به دایره‌ای به شعاع $\ell/۲$) است:

$$v'=v+\omega\left(\ell/۲\right)=\frac{v_{\circ}}{۲}+\left(\frac{۳v_{\circ}}{\ell}\right)\left(\frac{\ell}{۲}\right)=۲v_{\circ} \tag{۱۱-۱۵۸}$$

سرعت انتهای بالای میله (انتهایی که با مانع برخورد می‌کند) برابر است با $v-\omega\left(\ell/۲\right)=-v_{\circ}$.



شکل ۱۰۳-۱۱ الف



شکل ۱۰۳-۱۱ ب

ت-۵ در این مسئله هیچ یک از کمیت‌های انرژی، تکانه‌ی خطی و تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته نیستند. بنابراین، برای حل آن باید از قانون‌های بنیادی به طور مستقیم استفاده کنیم. به سامانه نیروی خارجی اصطکاک وارد می‌شود و بنابراین $dp/dt \neq ۰$ و تکانه‌ی خطی پایسته نیست. در فاصله‌ی بین آغاز حرکت و رسیدن سکه به حالت غلتش خالص، نیروی اصطکاک سبب هدر رفتن انرژی به صورت گرما می‌شود و انرژی پایسته نمی‌ماند. هم‌چنین، نیروی اصطکاک نسبت به مرکز سکه گشتاور خارجی تولید می‌کند و در نتیجه، تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته نیست. در شکل (۱۰۳-۱۱ الف) وضعیت در فاصله‌ی بین آغاز حرکت و رسیدن به حالت غلتش بدون لغزش نشان داده شده است. در شکل (۱۰۳-۱۱ ب) حرکت غلتشی خالص دیده می‌شود. جهت‌های مثبت در این شکل‌ها نشان داده شده اند. سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای را وقتی سکه به حالت غلتش می‌رسد، به ترتیب، v' و ω' بنامید.

حل۱- نیروی اصطکاک $F(t)$ از سرعت خطی سکه می‌گاهد و سرعت زاویه‌ای را افزایش می‌دهد. تغییر سرعت زاویه‌ای به شتاب زاویه‌ای می‌انجامد: $\alpha = d\omega/dt$. عامل به وجود آمدن شتاب زاویه‌ای گشتاوری است که نیروی اصطکاک نسبت به مرکز سکه ایجاد می‌کند بنابراین، می‌توان نوشت

$$G = I\alpha \;\Rightarrow\; RF(t) = \frac{۱}{۲}MR^{۲}\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{۲F(t)}{MR} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (۱۱\text{-}۱۵۹)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم و توجه کنیم که $\omega(t=0) \equiv \omega_0 = 0$ است، خواهیم داشت

$$\int_{\omega_۰}^{\omega'} d\omega = \int_۰^t \frac{۲F(t')}{MR}dt' \;\Rightarrow\; \omega' - \not{\omega_۰} = \frac{۲}{MR}\int_۰^t F(t')\,dt' \;\Rightarrow\; \omega' = \frac{۲}{MR}\int_۰^t F(t')\,dt' \qquad (۱۱\text{-}۱۶۰)$$

هم‌چنین داریم

$$F = ma \Rightarrow\; -F(t) = Ma \;\Rightarrow\; -F(t) = M\,\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_v^{v'} dv = \int_۰^t -\frac{F(t')}{M}dt' \;\Rightarrow\; v' = v - \frac{1}{M}\int_۰^t F(t')dt' \qquad (۱۱\text{-}۱۶۱)$$

وقتی سکه به حالت غلتش بدون لغزش می‌رسد، شرط غلتش لازم می‌دارد که $v' = R\omega'$ شود. بنابراین، با استفاده از این شرط و رابطه‌های (۱۶۰-۱۱) و (۱۶۱-۱۱) می‌توان نوشت:

$$v' = v - \frac{۱}{M}\left(\frac{MR}{۲}\right)\omega' \;\Rightarrow\; v' = v - \frac{۱}{M}\left(\frac{MR}{۲}\right)\left(\frac{v'}{R}\right) = v - \frac{۱}{۲}v'$$

$$\Rightarrow \quad v' = v - -\frac{۱}{۲}v' \;\Rightarrow\; v' = \frac{۲}{۳}v \qquad (۱۱\text{-}۱۶۲)$$

حل ۲ با استفاده از رابطه‌ی (۱۳۵-۱۱)، $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{R} \times \Delta \mathbf{p}$. این رابطه وقتی برقرار است که بازوی L ثابت است. با توجه به قرارداد جهت‌ها در مسئله‌ی ما این رابطه به صورت $\Delta L = -R\,\Delta p$ در می‌آید. یعنی

$$\Delta L = \int G\,dt = \int RF\,dt = R\int F\,dt = -R\int(-F)dt = -r(\Delta p) \qquad (۱۱\text{-}۱۶۳)$$

بنابراین،

$$\Delta L=-R\,\Delta p\ \Rightarrow\ L_f-L_i=-R\left(p_f-p_i\right)\ \Rightarrow\ I\omega'-0=-R\left(Mv'-Mv\right) \qquad (۱۱-۱۶۴)$$

با اعمال شرط غلتش بدون لغزش، $v'=R\omega'$، رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$I\left(\frac{v'}{R}\right)=-RMv'+RMv\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v'}{R}\right)=-RMv'+RMv$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{2}v'=v\ \Rightarrow\ v'=\frac{2}{3}v \qquad (۱۱-۱۶۵)$$

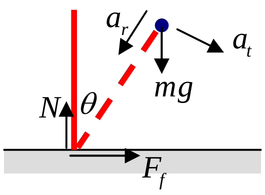
ت-۶ از پایستگی انرژی می‌توان سرعت v میله را وقتی که با خط قائم زاویه‌ی θ می‌سازد، به دست آورد. انرژی جنبشی اولیه‌ی میله صفر است. انرژی پتانسیل را هم در این حالت صفر در نظر بگیرید. داریم

$$E_0=E_1\ \Rightarrow\ 0+0=(1/2)mv^2-mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\ (1/2)mv^2=mg\ell(1-\cos\theta)\ \Rightarrow\ v^2=2g\ell(1-\cos\theta) \qquad (۱۱-۱۶۶)$$

بنابراین، شتاب مرکزگرا (شکل ۱۱-۱۰۴ را ببینید) برابر است با

$$a_r=\frac{v^2}{\ell}=2g\left(1-\cos\theta\right) \qquad (۱۱-۱۶۷)$$



شکل ۱۱-۱۰۴

از گشتاور نسبت به نقطه‌ی تماس میله با زمین و $G=I\alpha$ داریم

$$mg\ell\sin\theta=\left(m\ell^2\right)\alpha\ \Rightarrow\ \alpha=g\sin\theta/\ell \qquad (۱۱-۱۶۸)$$

و بنابراین، شتاب مماسی a_t عبارت است از

$$a_t=\alpha\ell=g\sin\theta \qquad (۱۱-۱۶۹)$$

حال می‌توانیم معادله‌های $F=ma$ را در راستاهای افقی و عمودی بنویسیم (از رابطه‌ای مماسی و شعاعی $F=ma$ هم می‌توان استفاده کرد، اما این رابطه‌ها اندکی زشت و پیچیده می‌شوند). داریم

$$F_x=ma_x\ \Rightarrow\ F_f=ma_t\cos\theta-ma_r\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ F_f=mg\left(\sin\theta\cos\theta-2(1-\cos\theta)\sin\theta\right) \qquad (۱۱-۱۷۰)$$

$$=mg\sin\theta(3\cos\theta-2)$$

$$F_y=ma_y\ \Rightarrow\ mg-N=ma_r\cos\theta+ma_t\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ N=mg\left(1-2(1-\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\right)$$

$$=mg\left(1-2\cos\theta+2\cos^2\theta-\left(1-\cos^2\theta\right)\right)=mg\cos\theta(3\cos\theta-2) \qquad (۱۱-۱۷۱)$$

با توجه به شرط $F_f\le\mu N$ به دست می‌آید

$$mg\sin\theta(3\cos\theta-2)\le\mu mg\cos\theta(3\cos\theta-2)\ \Rightarrow\ \tan\theta\le\mu \qquad (۱۱-۱۷۲)$$

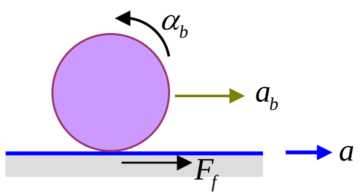
با وجود این، برقراری رابطه‌ی بالا براین پایه است که $(3\cos\theta-2)>0$ باشد. اما $\cos\theta=2/3$ یعنی $\tan\theta=\sqrt{5}/2$.
بنابراین، پاسخ مسئله عبارت است از این که در زاویه‌ی θ_s میله خواهد لغزید و θ_s برابر است با

$$\theta_s=\tan^{-1}(\mu) \qquad ;\quad \mu\le\sqrt{5}/2$$

$$\theta_s=\tan^{-1}\left(\sqrt{5}/2\right) \quad ;\quad \mu\ge\sqrt{5}/2 \qquad (۱۱-۱۷۳)$$

نکته در این است که به ازای $\tan\theta = \sqrt{۵}/۲ \Leftrightarrow \cos\theta = ۲/۳$ نیروی عمودی منفی می‌شود و بنابراین، اصطکاک وجود ندارد.

نکته: روشی که ما را به زودتر پاسخ بنیادی $\tan\theta \le \mu$ می‌رساند (هنوز هم باید شرط $\cos\theta \ge ۲/۳$ را دریابیم) این است که از $G = I\alpha$ نسبت به مکان جرم m استفاده کنیم. در این صورت $I = ۰$ و بنابراین $G = ۰$ می‌شود. این بدان معنی است که نیرویی که میز به میله وارد می‌کند در راستای میله است. از اینجا نتیجه می‌شود که $F_F = N\tan\theta$ و از شرط $F_f \le \mu N$ خواهیم داشت $N\tan\theta \le \mu N \Rightarrow \tan\theta \le \mu$. این پاسخ بنیادی است اما هنوز باید شرط $N > ۰$ را به آن اضافه کنیم.



شکل ۱۰۵-۱۱

ت-۷ شتاب مرکزکره را a_b و شتاب زاویه‌ای آن را α_b بنامید. نمودار نیروها و جهت‌های مثبت در شکل (۱۰۵-۱۱) نشان داده شده‌اند. از $F = ma$ برای کره داریم

$$F_f = Ma_b \qquad (۱۱-۱۷٤)$$

و از $G = I\alpha$ برای کره داریم

$$F_f R = (۲/۵)MR^۲\alpha \qquad (۱۱-۱۷۵)$$

شرط نلغزیدن (نسبت به **صفحه‌ی کاغذ**) عبارت است از $a - R\alpha_b = a_b$؛ چون کره نسبت به صفحه‌ی کاغذ شتاب عقب‌گردی برابر $R\alpha_b$ دارد که بر اثر غلتش به وجود می‌آید و شتاب صفحه‌ی کاغذ هم a است و در نتیجه، شتاب کره نسبت به زمین (a_b) = شتاب گره نسبت به صفحه‌ی کاغذ + شتاب کاغذ نسبت به زمین :

$$a_b = -R\alpha_b + a \qquad (۱۱-۱۷٦)$$

اگر رابطه‌ی (۱۷٤-۱۱) را به (۱۷۵-۱۱) تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{۱}{R} = \frac{۵}{۲}\left(\frac{a_b}{R^۲\alpha_b}\right) \Rightarrow R\alpha_b = \frac{۵}{۲}a_b \qquad (۱۱-۱۷۷)$$

که اگر در شرط نلغزیدن، رابطه‌ی (۱۷٦-۱۱) قرار دهیم به دست می‌آید

$$a - (۵/۲)a_b = a_b \quad \Rightarrow \quad a_b = ۲a/۷ \qquad (۱۱-۱۷۸)$$

فصل ۱۲

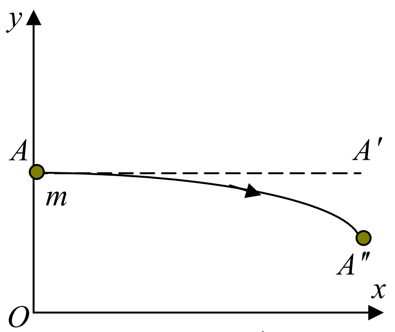
چارچوبهای شتاب دار و حرکت های مقید

تاکنون همواره از چارچوب‌های لخت برای حل مسئله‌های مکانیک استفاده کردیم. در این چارچوب‌ها قانون‌های حرکت ساده‌ترین شکل خود را دارند. با وجود این ، مسئله‌هایی وجود دارند که حل آنها در چارچوب‌های غیر لخت ساده‌ترند. برای نمونه، وقتی حرکت ذره‌ای را در نزدیکی‌های سطح زمین بررسی می‌کنیم بهتر است از چارچوبی استفاده کنیم که به زمین وصل است و با آن می‌چرخد. نمونه‌های دیگر عبارت اند از آسانسور، صفحه‌ی چرخان و غیره. آیا راهی وجود دارد که قانون های نیوتون را چنان تغییر دهیم تا در چارچوب‌های غیر لخت هم برقرار باشند یا این که در این چارچوب‌ها باید $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را به کلی فراموش کرد؟ در این فصل معادله‌های حرکت را نسبت به چنین چارچوب‌هایی خواهیم یافت و برخی کاربردهای آن را بررسی خواهیم کرد.

نخست، حرکت ذره‌ای را نسبت به چارچوب دلخواهی در نظر خواهیم گرفت که در حال حرکت است. توصیف حرکت نسبت به چارچوب متحرک، در مسئله‌هائی که شامل سطوح قیدی یا خم‌های شتاب دار اند سودمند است. دسته دیگر مسئله‌ها، توصیف حرکت آزاد ذره در دستگاه مختصاتی است که شتاب دارد. نمونه‌ای از مسئله‌های نوع نخست، حرکت ذره‌ای است که مقید به لغزیدن روی سطحی است که خود سطح شتاب دارد. نمونه‌ی گونه‌ی دوم، اثرهای ثانوی است که به نظریه‌ی ساده افزوده می‌شود . مانند حرکت پرتابه هنگامی که چرخش زمین را نیز در نظر بگیریم.

۱۲-۱ حرکت ذره در چارچوب شتابدار

سرشت مسئله چیست؟ خیلی وقت‌ها مجبوریم معادله‌های حرکت رادر مختصات غیر لخت بنویسیم. برای مثال، جسمی را در نظر بگیرید که مقید به حرکت روی سطح هموار میز است و میز به زمین چرخنده وصل است. در شکل (۱-۱۲) محورهای OX و OY را *سطح* میز فرض کنید. ذره در زمان $t_\circ$ در نقطه‌ی A روی میز در حال سکون است. نیروی ثابت F را موازی با محور xها به جسم وارد کنید (مثلا با دست جسم را هل دهید). بر پایه‌ی آموخته‌های خود شاید انتظار داریم که جسم روی خط راست AA' حرکت کند؛ چون معادله‌ی حرکت



شکل ۱-۱۲

$$m\ddot{x}=F \qquad (۱-۱۲)$$

این را می‌گوید. اما واقعیت این نیست. مسیر واقعی جسم خم AA'' است (اگر تحت اثر نیروی F جسم سرعت چشمگیری داشته باشد این را به آسانی می‌توان دید.) جسم اندکی به سمت راست مسیری که از رابط (۱-۱۲) انتظار داریم انحراف پیدا می‌کند. تازه مسیر AA'' در نیمکره‌ی شمالی رخ می‌دهد. در نیمکره‌ی جنوبی این انحراف به سمت چپ خواهد بود. دشواری در این است که سامانه‌ی مختصات انتخابی (زمین) سامانه‌ی شتاب‌دار است. در زیر خواهیم دید که معادله‌های حرکت یک ذره نسبت به چارچوب شتاب‌دار شامل جمله‌هایی است که در اثر شتاب دستگاه مختصات نمایان می‌شوند. به بیان دیگر، اگر برخی

نیروهای *پنداری* را شناسایی کنیم هنوز هم می توانیم از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ در چارچوب‌های شتاب‌دار استفاده کنیم. نیروهای *پنداری*، نیروهایی هستند که ناظر نشسته در چارچوب شتاب‌دار *گمان* می‌کند که وجود دارند. اگر این ناظر نیروهای پنداری را هم در نظر بگیرد و در چارچوب خودش از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کند، آنگاه برای شتاب $\mathbf{a}$ که در چارچوب وی اندازه‌گیری می شود، پاسخ درست به دست می آورد.

برای این که موضوع این فصل را بتوانیم به طور کیفی بپرورانیم باید بدانیم که مختصات (و مشتق‌های آن) چارچوب شتاب‌دار چگونه به مختصات و مشتق آنها در چارچوب لخت مربوط می‌شوند. پیش از این که خود را درگیر این ریاضیات بکنیم بهتر است به مثال ساده‌ای بپردازیم که اندیشه‌ی نیروی پنداری را به نمایش می گذارد.

مثال ۱-۱۲ (قطار): فرض کنید در قطاری سرپا ایستاده‌اید و قطار با شتاب a به سمت راست شتابیده می‌شود. اگر بخواهید در همان نقطه در درون قطار باقی بمانید باید نیروی اصطکاکی به اندازه‌ی $F_f=ma$ و به سوی راست بین کف قطار و کف پاهای شما وجود داشته باشد. کسی که در چارچوبی لخت در روی زمین است وضعیت شما را این گونه توصیف خواهد کرد: "نیروی اصطکاک $F_f=ma$ سبب می شود که شتاب شما a باشد." توصیف شما در چارچوب قطار از وضعیت چگونه خواهد بود؟ (فرض کنید قطار پنجره ندارد و شما فقط درون قطار را می بینید.) همانگونه که در زیر نشان خواهیم داد، شما یک نیروی پنداری انتقالی، $F_{trans}=-ma$، به سمت چپ احساس خواهید کرد. بنابراین، توصیف شما از وضعیت، این گونه خواهد بود: "شتاب من صفر است. پس در چارچوب من- چارچوب قطار- نیروی اصطکاک $F_f=ma$ که به سمت راست است نیروی رازآمیز $F_{trans}=-ma$ را که به سوی چپ است باید دقیقا حذف کند و در نتیجه در چارچوب من شتاب من صفر است". البته اگر کف قطار اصطکاک نداشته باشد و نیرویی به کف پاهای شما وارد نشود خواهید گفت که نیروی خالص $F_{trans}=-ma$ به سمت چپ به شما وارد می‌شود است و بنابراین، با شتاب a نسبت به چارچوب خودتان (قطار) به سمت چپ شتابیده می‌شوید. به بیان دیگر، نسبت به چارچوب لخت در روی زمین بی حرکت باقی خواهید ماند که البته برای کسی که روی زمین ایستاده است کاملا بدیهی است. اگر اصطکاک کف قطار غیر صفر اما به اندازه ای نباشد که از عهده‌ی حذف همه‌ی نیرو $F_{trans}=-ma$ برآید، آنگاه شما به سوی انتهای قطار رانده خواهید شد مگر این که با دست به جایی بچسبید تا بقیه‌ی F_{trans} را هم حذف کنید.

نخست ساده‌ترین حالت شتاب انتقالی (خطی) رابررسی می‌کنیم وسپس به حالت دستگاه مختصات چرخان می‌پردازیم.

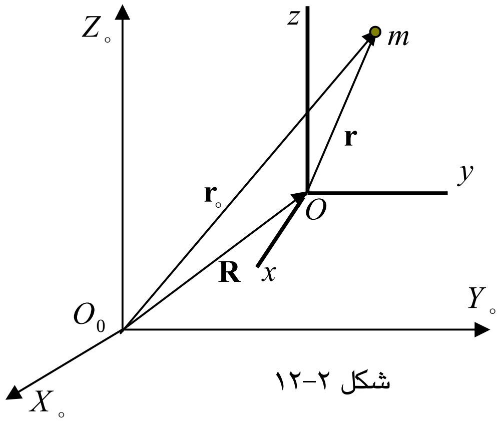
۲- ۱۲ چارچوب‌های شتاب‌دار و درستی قانون‌های نیوتون

در شکل (۲-۱۲) فرض کنید $O_\circ X_\circ Y_\circ Z_\circ$ سامانه‌ای است که در آن قانون‌های نیوتون درست‌اند (چارچوب لخت). بنا بر این، در این چارچوب رابطه‌ی

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}})=\mathbf{F} \qquad (۱۲-۲)$$

توصیف دقیقی از حرکت ذره‌ای را فراهم می‌کند که به آن نیروی F وارد می‌شود. $Oxyz$ چارچوب دیگری است که نسبت به

اولی حرکت می‌کند. برای سادگی فرض می‌کنیم ox همواره موازی $O_{\circ}X_{\circ}$ و Oy موازی $O_{\circ}Y_{\circ}$ و Oz موازی $O_{\circ}Z_{\circ}$ باشند.



شکل ۲-۱۲

مکان O نسبت به $O_{\circ}$ با بردار $\boldsymbol{R}$ نشان داده شده است. یعنی از دید ناظر نشسته در مبداء $O_{\circ}$، مختصات $\boldsymbol{R}$ عبارتند از $X_{\circ}$ و $Y_{\circ}$ و $Z_{\circ}$. چون نقطه‌ی O نسبت به $O_{\circ}$ حرکت می‌کند، مؤلفه‌های $\boldsymbol{R}$ تغییر می‌کنند. بردار مکان ذره‌ای به جرم m در چارچوب $O_{\circ}$ با بردار $\mathbf{r}_{\circ}$ توصیف می‌شود. شکل (۲-۱۲) را ببینید. همین مکان در چارچوب O با بردار $\mathbf{r}$ داده شده است.

مؤلفه‌های معادله‌ی حرکت ذره در چارچوب $O_{\circ}$ عبارتند از:

$$m\ddot{x}_{\circ}=F_1 \quad \text{و} \quad m\ddot{y}_{\circ}=F_2 \quad \text{و} \quad m\ddot{z}_{\circ}=F_3 \qquad (۱۲-۳)$$

که $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ مؤلفه‌های $\ddot{\mathbf{r}}_{\circ}$ در مختصات $O_{\circ}$ است و $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ در مختصات $O_{\circ}$ اند. در اینجا فرض می‌کنیم که $\mathbf{F}$ تنها تابعی از مکان است. اینک مؤلفه‌های $\mathbf{r}$ را در مختصات O در نظر بگیرید که عبارتند از: x و y و z. چون این مؤلفه‌های $\mathbf{r}$ با $X_{\circ}$ و $Y_{\circ}$ و $Z_{\circ}$ موازی اند، پس می‌توان نوشت:

$$z_{\circ}=Z_{\circ}+z \quad \text{و} \quad y_{\circ}=Y_{\circ}+y \quad ، \quad x_{\circ}=X_{\circ}+x \qquad (۱۲-۴)$$

و از اینجا داریم:

$$\ddot{z}_{\circ}=\ddot{Z}+\ddot{z} \quad \text{و} \quad \ddot{y}_{\circ}=\ddot{Y}+\ddot{y} \quad ، \quad \ddot{x}_{\circ}=\ddot{X}+\ddot{x} \qquad (۱۲-۵)$$

که با جایگزینی در رابطه‌ی (۳-۱۲) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{\circ} &= m(\ddot{x}+\ddot{X}_{\circ})=F_۱ \\ m\ddot{y}_{\circ} &= m(\ddot{y}+\ddot{Y}_{\circ})=F_۲ \\ m\ddot{z}_{\circ} &= m(\ddot{z}+\ddot{Z}_{\circ})=F_۳ \end{aligned} \qquad (۱۲-٦)$$

پس:

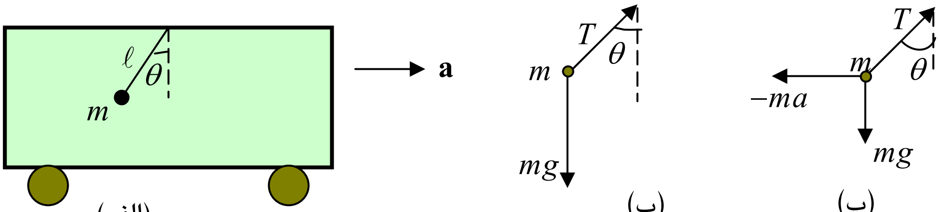
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_۱-m\ddot{X}_{\circ} \\ m\ddot{y} &= F_۲-m\ddot{Y}_{\circ} \\ m\ddot{z} &= F_۳-m\ddot{Z}_{\circ} \end{aligned} \qquad (۱۲-۷)$$

رابطه‌ی (۷-۱۲) حرکت ذره را در چارچوب $Oxyz$ توصیف می کند که تحت اثر نیروی $\mathbf{F}$ با مؤلفه‌های $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ است و با معادله‌های حرکت ساده‌ی (۳-۱۲) فرق دارد. در سمت راست رابطه‌ی (۷-۱۲) جمله‌های اضافی $-m\ddot{X}_{\circ}$ و $-m\ddot{Y}_{\circ}$ و $-m\ddot{Z}_{\circ}$ نمایان شده‌اند که در رابطه‌ی (۳-۱۲) وجود ندارند. این جمله‌ها به خاطر شتاب‌دار بودن $Oxyz$ نسبت به $O_{\circ}X_{\circ}Y_{\circ}Z_{\circ}$ ظاهر شده‌اند. این جمله‌های اضافی وقتی صفرند که: (۱) O نسبت به $O_{\circ}$ با سرعت ثابت حرکت بکند (یعنی $dX_{\circ}/dt=\circ$ و غیره). (۲) اگر O نسبت به $O_{\circ}$ در حال سکون باشد. در هر دو حالت مشتق دوم زمانی $\mathbf{R}$ صفر می‌شود و رابطه‌ی (۷-۱۲) به رابطه‌ی (۳-۱۲) کاهش می‌یابد. در بخش بعدی خواهیم دید که اگر $Oxyz$ نسبت به $O_{\circ}X_{\circ}Y_{\circ}Z_{\circ}$ می‌چرخید باز هم جمله‌های اضافی در معادله‌های حرکت نمایان می‌شدند.

سامانه‌ی $O_{\circ}X_{\circ}Y_{\circ}Z_{\circ}$ که در آن قانون‌های نیوتون برقرار است *سامانه‌ی لخت* نام دارند. $m\ddot{X}_{\circ}$ و $m\ddot{Y}_{\circ}$ و $m\ddot{Z}_{\circ}$ بعد نیرو

دارند. آن ها را *نیروهای پنداری* می‌نامند. به ذره‌ی m تنها یک نیرو $\mathbf{F}$ وارد می‌شود. نیروهای پنداری نتیجه‌ی شتاب‌دار بودن چارچوب مرجع است. با وارد کردن این نیروهای پنداری در واقع از سامانه‌ی مختصات شتاب دار چارچوبی هم ارز با چارچوب لخت می‌سازیم که بتوانیم در آن قانون‌های نیوتون را به کار ببریم.

مثال ۲-۱۲ (آونگ در واگن شتاب‌دار) : آونگ ساده‌ای با جرم m و طول ℓ را در نظر بگیرید که از سقف واگنی آویخته است.



شکل ۳-۱۲

واگن با شتاب $\mathbf{a}$ به سمت راست در حرکت است، شکل (۳-۱۲). به ازای کدام زاویه ی θ آونگ نسبت به واگن (شتاب‌دار) در حالت سکون باقی خواهد ماند؟

حل: نخست مسأله را از دید ناظر لخت (ناظری که کنار خط آهن بر روی زمین قرار دارد) نگاه کنید. از دید ناظر لخت نیروهایی که به آونگ وارد می شوند عبارتند از نیروی کشش ریسمان، T، و نیروی وزن mg. بنابراین معادله‌ی حرکت آونگ برای ناظر لخت عبارت است از:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \qquad (۱۲-۸)$$

بر حسب مؤلفه‌های x, y خواهیم داشت:

$$\sum F_X = T\sin\theta = ma \quad , \quad \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (۱۲-۹)$$

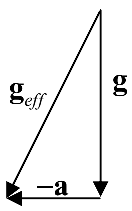
از حل همزمان این دو معادله، ناظر لخت نتیجه می‌گیرد که:

$$a = g\tan\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(a/g) \qquad (۱۲-۱۰)$$

اینک از نگاه ناظر غیر لخت (ناظری که در درون واگن نشسته و به آونگ می‌نگرد) مسئله را بررسی می‌کنیم. از دید این ناظر آونگ در حال سکون و شتاب آن صفر است. بنابراین، ناظر غیر لخت برای این که در حال سکون بودن آونگ را توصیف کند نتیجه می‌گیرد که نیروی *پنداری* $m\mathbf{a}$، همانند شکل (۳-۱۲ پ) به آونگ وارد می شود. او معادله‌ی حرکت آونگ را به صورت زیر می نویسد

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - m\mathbf{a} = \mathbf{T} + m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = \mathbf{T} + m\mathbf{g}_{eff} \qquad (۱۲-۱۱)$$

که $\mathbf{g}_{eff} \equiv \mathbf{g} - \mathbf{a}$. می بینیم که معادله‌ی حرکت آونگ در چارچوب شتاب‌دار مانند معادله ی حرکت در چارچوب لخت است که به جای $\mathbf{g}$ اینک g_{eff} قرار دارد. روشن است که اگر آونگ بخواهد (در چارچوب قطار) در حال سکون بماند $\ddot{\mathbf{r}}$ باید صفر و $\mathbf{T} = -m\mathbf{g}_{eff}$ باشد. اگر نیروها را برحسب مؤلفه‌های x' , y' بنویسیم، آنگاه در مختصات غیر لخت خواهیم داشت:



شکل ٤-۱۲

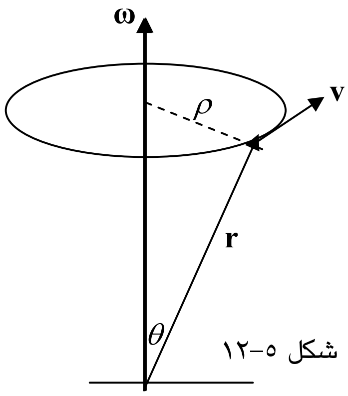
$$\sum F'_x = T\sin\theta - ma = 0 \quad , \quad \sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (۱۲-۱۲)$$

از تقسیم این دو رابطه داریم:

$$\tan\theta = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(a/g\right) \tag{۱۲-۱۳}$$

۱۲-۳ چارچوب‌های چرخان - سرعت زاویه‌ای، آهنگ تغییر بردار

جسمی را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی می‌چرخد. فرض کنید $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه در راستای محور چرخش است و جهت آن با قانون انگشت‌های دست راست تعریف می‌شود. بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ را برداری تعریف می‌کنیم که اندازه‌ی آن ω و جهت آن در جهت $\hat{\mathbf{n}}$ باشد: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{n}}$. روشن است که سرعت زاویه‌ای همانند تکانه‌ی زاویه‌ای بردار محوری است. اگر مبدأ مختصات را روی محور چرخش در نظر بگیریم آنگاه سرعت یک نقطه در روی جسم به فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از مبداءمختصات، (شکل ۵-۱۲)، عبارت ست از:



شکل ۵-۱۲

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{۱۲-۱۴}$$

برای اثبات این رابطه، توجه کنید که نقطه‌ی روی جسم، روی دایره‌ای به شعاع $\rho = r\sin\theta$ با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. بنابراین سرعت ذره برابر است با

$$|\mathbf{v}| = \frac{2\pi\rho}{t} = \omega\rho = \omega r\sin\theta = |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| \tag{۱۲-۱۵}$$

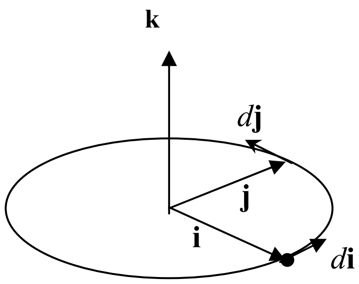
افزون بر این، جهت $\mathbf{v}$ همانا جهت $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ است؛ یعنی $\mathbf{v}$ بر صفحه‌ی $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}$ عمود است و جهت آن به درستی با قانون انگشت های دست راست سازگار است. پس رابطه‌ی (۱۴-۱۲) هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت درست است. لازم نیست که $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه‌ای روی جسم گردنده باشد. اگر $\boldsymbol{\alpha}$ هر بردار ثابتی در روی جسم گردنده باشد، آنگاه همواره داریم

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha} \tag{۱۲-۱۶}$$

این رابطه‌ی بسیار مهمی است و به حرکت دایره‌ای حول یک محور مربوط است. به طور کلی، مشتق نسبت به زمان هر بردار $\boldsymbol{\alpha}(t)$ که در صفحه‌ی $x-y$ حول محور z حرکت دایره‌ای انجام دهد، با ضرب خارجی $d\boldsymbol{\alpha}(t)/dt = \omega\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\alpha}(t)$ داده می‌شود به ویژه اگر $\hat{\mathbf{i}}$و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ بردارهای یکه باشند که بر روی جسم گردنده استوارند، (شکل ۶-۱۲)، آنگاه داریم

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{i}} \;,\quad \frac{d\,\hat{\mathbf{j}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{j}} \;,\quad \frac{d\,\hat{\mathbf{k}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۲-۱۷}$$

برای نمونه، اگر $\boldsymbol{\omega}$ در جهت $\hat{\mathbf{k}}$ باشد، $\left(d\,\hat{\mathbf{i}}/dt\right) = \omega\hat{\mathbf{j}}$، $\left(d\,\hat{\mathbf{k}}/dt\right) = 0$ و $\left(d\,\hat{\mathbf{j}}/dt\right) = 0$ اند. حال برداری مانند $\mathbf{a}$ را نسبت به محورهای چرخان $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ در نظر بگیرید. در این سامانه‌ی مختصات، مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ عبارتند از a_x و a_y و a_z و داریم



شکل ۶-۱۲

$$\mathbf{a} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۲-۱۸}$$

(اگر چه گفتار ما کاملاً کلی است، شاید اگر به $\mathbf{a}$ همانند بردار مکان یک نقطه نسبت به زمین بیندیشیم در روشن شدن موضوع یاری کند. فرض کنید زمین حول محور گذرنده از مرکز آن می‌چرخد. در روی سطح زمین دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که بردارهای یکه‌ی آن $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ اند. در این مختصات بردار مکان نقطه‌ای را در روی زمین $\mathbf{a}$ بنامید. روشن است که چون زمین می‌چرخد، پس دستگاه مختصات $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ هم به همراه آن می‌چرخند و $\mathbf{a}$ در این دستگاه چرخان نوشته شده است).

حال باید دو گونه‌ی" آهنگ تغییر" را از یکدیگر متمایز کنیم. ما آهنگ تغییر بردار $\mathbf{a}$ را از دیدگاه ناظر لخت (مثلا ناظری که در مرکز زمین نشسته است)با $[\dot{\mathbf{a}}]_\circ$ نشان خواهیم داد و آهنگ تغییر بردار از دیدگاه ناظری که در دستگاه چرخان قرار دارد، با $\dot{\mathbf{a}}$ نشان خواهیم داد. اگر چه این دو ناظر در آهنگ تغییر بردار با هم اختلاف خواهند داشت، اما در آهنگ تغییر هر کمیت اسکالر با یکدیگر موافق خواهند بود. به ویژه، آنها در آهنگ تغییر مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ یعنی $a_z\,, a_y\,, a_x$ با یکدیگر توافق خواهند داشت (توجه کنید که برای ناظر لخت $a_z\,, a_y\,, a_x$ مؤلفه‌های بردار $\mathbf{a}$ در دستگاه مختصات لخت **نیستند**؛ با این حال، ناظری که روی سطح زمین قرار دارد (مختصات چرخان) و ناظری که بیرون از سطح زمین (یا در مرکز زمین ـ اگر فرض کنیم مرکز زمین نمی‌چرخد) قرار دارد همواره در عرض و طول جغرافیایی جسمی که روی سطح زمین حرکت می کند توافق خواهند داشت؛ اگر چه a_x، a_y و a_z مختصاتی نیستند که ناظر لخت برای توصیف مکان ذره به کار خواهد برد. پس می‌توان نوشت

$$[\dot{a}_z]_\circ = \dot{a}_z \quad \text{و} \quad [\dot{a}_y]_\circ = \dot{a}_y \quad ، \quad [\dot{a}_x]_\circ = \dot{a}_x \qquad (۱۲-۱۹)$$

برای ناظر نشسته بر روی جسم چرخان آهنگ تغییر $\mathbf{a}$کاملا با آهنگ تغییر مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ داده می شود و بنابراین

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \dot{a}_y\,\hat{\mathbf{j}} + \dot{a}_z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۲-۲۰)$$

اما برای ناظر لخت، محورهای $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ نیز با زمان می‌چرخند و بنا به رابطه‌ی (۱۷-۱۲) داریم:

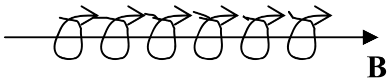
$$\begin{aligned}\left[\dot{\mathbf{a}}\right]_\circ &= \left(\frac{da_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(a_x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + a_y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + a_z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}\right) \\ &= (\dot{a}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \dot{a}_y\,\hat{\mathbf{j}} + \dot{a}_z\,\hat{\mathbf{k}}) + \boldsymbol{\omega}\times(a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}})\end{aligned} \qquad (۱۲-۲۱)$$

پس داریم:

$$[\dot{\mathbf{a}}]_\circ = \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a} \qquad (۱۲-۲۲)$$

حال اگر این رابطه را برای بردار مکان $\mathbf{r}$ بکار ببریم، نتیجه روشن است، زیرا رابطه‌ی (۲۲-۱۲) برای $\mathbf{a}=\mathbf{r}$ می‌گوید که سرعت نسبت به ناظر لخت با جمع سرعت $\dot{\mathbf{r}}$ نسبت به ناظر چرخان و سرعت $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ ذره ای که در $\mathbf{r}$ با جسم می‌چرخد برابر است. این پیش گفتار را در بخش ۷-۱۲ به حالتی که مختصات چرخان، افزون بر چرخش، حرکت انتقالی هم نسبت به مختصات لخت داشته باشد، گسترش خواهیم داد. پیش از آن؛ یک مثال

مثال ۳-۱۲ ذره‌ای با بار الکتریکی q با سرعت $\mathbf{v}$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند. نیروی مغناطیسی وارد به این ذره $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ است. معادله‌ی حرکت عبارت ست از: $m[\dot{\mathbf{v}}]_\circ = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ اما این رابطه همان شکل رابطه‌ی (۱٦-۱۲) را دارد که بجای ω مقدار $q\mathbf{B}/m$ نشسته است. بنابراین، بردار سرعت حول جهت $\mathbf{B}$ با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد و مسیر



شکل ۷-۱۲

حرکت ذره مارپیچی است که محور آن راستای میدان **B** است. اگر جهت **B** را جهت محور Z ها فرض کنیم آنگاه بردار **v** یک مؤلفه در راستای محور Z ها خواهد داشت و یک مؤلفه هم در صفحه‌ی XY که برابر شکل (۷-۱۲) با سرعت زاویه‌ای ω روی دایره‌ای می‌چرخد. اگر **v** از آغاز با **B** موازی باشد، ذره با سرعت یکنواخت در راستای **B** حرکت خواهد کرد ($\mathbf{v}\times\mathbf{B}=0$). اگر **v** بر **B** عمود باشد، ذره روی دایره‌ای به شعاع $r=v/\omega=mv/qB$ حرکت می‌کند. این پدیده در شتاب دهنده‌ی ذرات ، *سیکلوترون*، به کار می‌رود. برای جلوگیری از گریز ذره؛ میدان مغناطیسی قوی به کار می‌برند که ذره را وادار به حرکت روی دایره بکند. کمیت $\omega_c\equiv qB/m$ بسامد سیکلوترون نام دارد.

۴-۱۲ شتاب؛ گرانش ظاهری

می‌توان رابطه‌ی (۲۲-۱۲) را دوباره به کار برد و رابطه‌ای میان شتاب ذره در سامانه‌ی لخت (شتاب مطلق) $[\ddot{\mathbf{r}}]_\circ$ و شتاب ذره در چارچوب چرخان به دست آورد. سرعت ذره در سامانه‌ی لخت عبارت است از

$$[\mathbf{v}]_\circ=[\dot{\mathbf{r}}]_\circ=\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (۱۰-۲۳)$$

اگر همین رابطه را برای آهنگ تغییر سرعت در چارچوب لخت به کار ببریم خواهیم داشت

$$[\ddot{\mathbf{r}}]_0=[\dot{\mathbf{v}}]_\circ=\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]_\circ=\left[\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\right]_\circ=[\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}]_\circ+[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]_\circ \qquad (۱۲-۲٤)$$

اگر $\boldsymbol{\omega}$ ثابت باشد، رابطه‌ی (۲٤-۱۲)به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}[\ddot{\mathbf{r}}]_\circ&=\left[\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}\right]+\boldsymbol{\omega}\times[\frac{d}{dt}\mathbf{r}]_\circ=\ddot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\\&=\ddot{\mathbf{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\end{aligned} \qquad (۱۲-۲٥)$$

جمله‌ی آخر در سمت راست رابطه‌ی (۲٥-۱۲) شتاب *مرکزگرا* است. جمله دوم *شتاب کوریولیس* نام دارد. شتاب مرکزگرا به سمت درون و بسوی محور دوران و عمود بر آن است. با توجه به اتحاد برداری

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{(b}\times\boldsymbol{c)}=\boldsymbol{(a.c)b}-\boldsymbol{(a.b)c}$ شتاب مرکزگرا را می‌توان بصورت $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}=(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}$ نوشت که مرکزگرا بودن آن را نمایان می‌کند. چون بردار شتاب مرکزگرا به بردار $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ عمود است بنابراین باید در صفحه‌ی $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{r}$ باشد و در نتیجه ترکیب خطی از $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{r}$ است.

مهمترین کاربرد رابطه‌ی (۲٥-۱۲)مربوط به حرکت ذره‌ای در نزدیکی‌های سطح زمین است. برای ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانش و نیروی مکانیکی دیگر **F** حرکت می‌کند، معادله‌های حرکت عبارتند از $m\,d^2\mathbf{r}/dt^2=m\mathbf{g}+\mathbf{F}$ که در آن **g** برداری است به سوی پائین (مرکز زمین) و اندازه‌ی آن g است. با استفاده از رابطه‌ی (۲٥-۱۲) داریم

$$m[\ddot{\mathbf{r}}]_\circ=m\ddot{\mathbf{r}}+2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=m\mathbf{g}+\mathbf{F}$$ یا

$$m\ddot{\mathbf{r}}=m\mathbf{g}+\mathbf{F}-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (۱۲-۲٦)$$

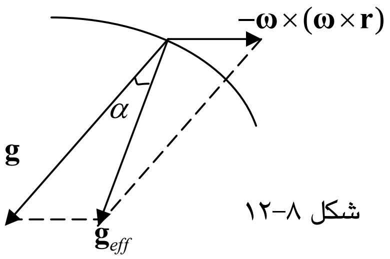
دو جمله‌ی آخری سمت راست نیروهای *پنداری* (یا *مجازی*) هستند که به خاطر سرشت غیرلختی چارچوب مرجع نمایان

می‌شوند. در این جا، نخست از جمله‌ی سوم سمت راست رابطه‌ی (۲۶-۱۲) یعنی نیروی کوریولیس چشم پوشی می کنیم و بررسی تأثیر آن را به بخش بعدی واگذار می کنیم. و به نقش جمله‌ی آخری را که همان نیروی آشنای مرکز گریز است می پردازیم. این نیرو تابعی است که به آهستگی با مکان تغییر می‌کند و همانند گرانش با جرم ذره متناسب است. هنگامی که در آزمایشگاه شتاب گرانشی را اندازه گیری می‌کنیم آنچه که واقعاً اندازه‌گیری می‌شود $\mathbf{g}$ نیست بلکه مقدار موثری است که به صورت

$$\mathbf{g}_{eff} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (۱۲-۲۷)$$

تعریف می کنیم. به ویژه؛ خط شاغولی کاملاً به سوی مرکز زمین نیست، بلکه به سبب نیروی مرکز گریز به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی بیرون از آن قرار دارد (شکل ۸-۱۲ را ببینید).

ذره‌ای را در نظر بگیرید که درمتمم عرض جغرافیایی θ (یعنی: عرض جغرافیایی $\pi/2-\theta$) قرار دارد، آنگاه



شکل ۸-۱۲

$$|\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})| = \omega\,|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| = \omega^2 r\sin\theta \qquad (۱۲-۲۸)$$

بنابراین مؤلفه‌های افقی و عمودی شتاب مؤثر گرانش، $\mathbf{g}_{eff}$، عبارتند از: (عمودی یعنی بسوی مرکز زمین)

$$g_{v,eff} = g - \omega^2 r\sin^2\theta$$
$$g_{h,eff} = \omega^2 r\sin\theta\cos\theta \qquad (۱۲-۲۹)$$

(تصحیح‌های دیگری برای g وجود دارد که براثر کاملاً کروی نبودن زمین نتیجه می‌شود و ما به آن خواهیم پرداخت.)

اندازه‌ی نیروی مرکز گریز را می‌توان با جایگزینی $\omega = ۷,۲۹۲\times۱۰^{-۵}s^{-۱}$ و شعاع میانگین زمین $r = ۶۳۷۱\,\text{km}$ حساب کرد.

$$\omega^{۲} r = ۳۴\,\text{mms}^{-۱} \qquad (۱۲-۳۰)$$

چون $\omega^2 r << g$ است؛ زاویه‌ی بین خط عمود واقعی (راستای g_{eff}) و راستای ظاهری (g) به تقریب برابر است با

$$\alpha \approx \frac{g_{h,eff}}{g_{v,eff}} \cong \frac{\omega^{۲} r}{g}\sin\theta\cos\theta \qquad (۱۲-۳۱)$$

بیشینه ی آن در $\theta = ۴۵^\circ$ است. برای این مقدار θ زاویه $\alpha \approx ۰,۶'$ است. در قطب، نیروی مرکزگریز صفر است و $g_{eff} = g$. در استوا $(\theta = \pi/۲)$ داریم $g_{eff} = g - \omega^{۲} r$. پس می‌توان گفت که اندازه‌گیری مقدار شتاب گرانش در قطب به اندازه‌ی $۳۴\ \text{mm}\,s^{-2}$ بیشتر از مقدار آن در استوا است. اندازه‌گیری تجربی، این اختلاف را در واقع اندکی بیشتر نشان می دهد

$$\Delta g_{eff} = g_{eff,pole} - g_{eff,equator} = ۵۲\,\text{mms}^{-۲} \qquad (۱۲-۳۲)$$

تفاوت بین مقدار اندازه‌گیری شده و مقدار حساب شده به خاطر اینست که زمین کره ی کامل نیست بلکه در قطب، کره وار است (مسطح). بنابراین شتاب گرانش حتی بدون در نظر گرفتن جمله‌ی مربوط به مرکزگریزی ، در قطب بزرگتر از استوا است. این دو اثر به واقع مستقل از یکدیگر نیستند، زیرا مسطح بودن زمین درقطب نتیجه‌ی چرخش زمین است.

مثال دیگری از اثر نیرو ی مرکزگریز سطح مایع در ظرف چرخان است.

مثال ۴-۱۲ سطح مایع چرخان

ظرفی با سرعت زاویه ای ω می چرخد و مایع درون آن هم با همان سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. معادله‌ی سطح مایع را بیابید.

حل: از چارچوبی که با ظرف می‌چرخد استفاده کنیم. بنابراین در این چارچوب چرخان، مایع ساکن ولی تحت تأثیر نیروی مرکزگریز است. این نیرو پایستار و متناظر با یک انرژی پتانسیل است.

$$V_{cent.} = m\omega^۲\rho^۲ = -\frac{۱}{۲}m\omega^۲(x^۲+y^۲) \qquad (۱۲-۳۳)$$

ذره‌ای را در سطح مایع در نظر بگیرید. اگر انرژی پتانسیل در سطح مایع مقدار ثابتی نباشد و از نقطه ای تا نقطه ی دیگر تغییر کند ، آنگاه ذره به ناحیه‌ایکه انرژی پتانسیل در آن جا کمترین است حرکت خواهد کرد. بنابراین اگر مایع تحت تأثیر نیروهای گرانش و مرکزگریز در حال تعادل باشد آنگاه سطح آن باید یک سطح هم پتانسیل باشد. بنابراین باید داشته باشیم $gz+(-۱/۲)\omega^۲(x^۲+y^۲)=\text{const.}$ که معادله‌ی یک سهموی چرخان حول محور z است. این اثر درساختن تلسکوپ های نوری پرتوان به کار می‌رود. زیرا سهموی شکل دلخواه برای کانونی کردن نوری است که درست از بالا می‌تابد. آیینه با چرخاندن لایه‌ی نازک مایع، مانند جیوه، ساخته می‌شود . این ارزانتر از ساختن آیینه‌های شیشه‌ای با شکل دقیق است. اگر چه کاستی آن اینست که با اینگونه تلسکوپها تنهامی‌توان به اشیاء نزدیک سمت الراس نگاه کرد

۵-۱۲ نیروی کوریولیس

نیروی کوریولیس، $-۲m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}$، نیروی پنداری (مجازی) وابسته به سرعت است که در اثر چرخش زمین ظاهر می‌شود. برای اینکه ریشه‌ی فیزیکی آن را بهتربفهمیم ، یک صفحه‌ی تخت چرخان را در نظر بگیرید. فرض کنید ذره‌ای قطر صفحه را تحت تأثیر *هیچ نیرویی* می‌پیماید. بنابراین ناظر لخت حرکت ذره را روی خط راستی در امتداد قطر صفحه خواهد دید (شکل۹-۱۲ الف) و ناظری که روی صفحه قرار دارد، مسیر ذره را به صورت خم (شکل۹-۱۲ ب) می بیند. اگر این ناظر نمی‌دانست که صفحه می‌چرخد، آنگاه خم را نتیجه ی اثر نیرویی که عمود بر سرعت ذره به آن وارد می‌شود کی پنداشت. این نیروی کوریولیس است



شکل ۹-۱۲

.

شکل (۹-۱۲) را می‌توان همانند زمین دانست که از قطب شمال به آن نگریسته می شود. بنابراین ، اثر نیروی کوریولیس در نیمکره‌ی شمالی این است که ذره را به راست و در نیمکره‌ی جنوبی آن را به سوی چپ منحرف می‌کند. نیروی کوریولیس در حرکت هوا در هواشناسی اهمیت زیاد دارد و ما به آنها خواهیم پرداخت. نخست به برخی اثرهای نیروی کوریولیس که در آزمایشگاه قابل دیدن هستند می‌پردازیم.

ذره‌ای را در نظر بگیرید که نزدیک سطح زمین در متمم عرض جغرافیایی θ حرکت می‌کند. فرض کنید مسافتی را که ذره می‌پیماید به اندازه‌ای کوتاه باشد که بتوان اثر نیروهای گرانش و مرکز گریز را در این فاصله ثابت انگاشت و آنها را با هم و با شتاب گرانش موثر $\mathbf{g}_{eff}$ نشان داد. معادله‌ی حرکت عبارت است از

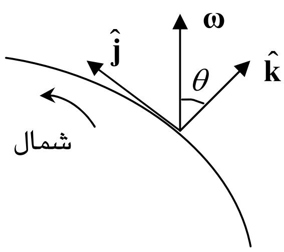
$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}_{eff} + \mathbf{F} - ۲m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} \qquad (۱۲-۳٤)$$

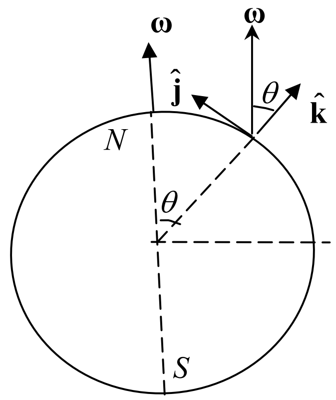
مثال ۵-۱۰ سقوط آزاد یک جسم

از ارتفاع h بالای زمین، ذره ای از حالت سکون رها می‌شود. در چه فاصله‌ای از راستای عمودی سقوط، به زمین خواهد نشست؟

حل: برای بررسی این مسئله، نخست باید دستگاه مختصات راست گردی را انتخاب کرد. برای این کار، $\hat{i}$ را به سوی شرق، $\hat{j}$ را بسوی شمال و $\hat{k}$ را رو به بالا (یعنی در خلاف جهت g_{eff}) در نظر بگیرید.

در شکل (۱۰-۱۲) این چارچوب نشان داده شد است. زاویه‌ی θ زاویه‌ی بین $\hat{\mathbf{k}}$ و محور زمین است.





شکل ۱۰-۱۲

مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = (\circ, \omega\sin\theta, \omega\cos\theta)$ است و نیز داریم $\dot{r} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}$ نیروی کوریولیس را اینک می‌توان حساب کرد. چون

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{i}}\omega_x + \hat{\mathbf{j}}\omega_y + \hat{\mathbf{k}}\omega_z = \circ\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\omega\sin\theta + \hat{\mathbf{k}}\omega\cos\theta \qquad (۱۲-۳۵)$$

پس

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 0 & \omega\sin\theta & \omega\cos\theta\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\mathbf{i}}(\dot{z}\,\omega\sin\theta-\dot{y}\,\omega\cos\theta)-\hat{\mathbf{j}}(-\dot{x}\,\omega\cos\theta)+\hat{\mathbf{k}}(-\dot{x}\,\omega\sin\theta) \qquad (۱۲-۳۶)$$

$$\Rightarrow\quad -2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}=2m\,\omega(\dot{y}\,\cos\theta-\dot{z}\,\sin\theta)\,\hat{\mathbf{i}}-2m\,\omega\dot{x}\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}+2m\,\omega\dot{x}\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

بنابراین، اگر از نیروی کوریولیس چشم پوشی می‌کردیم، حرکت با رابطه های زیر توصیف می‌شد

$$x=0\ ,\qquad y=0\ ,\qquad z=h-\frac{1}{2}gt^2$$

حال اگر در رابطه‌ی (۱۲-۳۴) به جای $\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ مقدارش را از رابطه (۱۲-۳۶) قرار دهیم و نیروی $\boldsymbol{F}$ را برابر صفر در نظر بگیریم، داریم

$$m\ddot{\mathbf{r}}=m\mathbf{g}_{eff}+2m\,\omega[(\dot{y}\,\cos\theta-\dot{z}\,\sin\theta)\,\hat{\mathbf{i}}-\dot{x}\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}+\dot{x}\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}] \qquad (۱۲-۳۷)$$

یا برحسب مولفه ها خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=-2\omega(\dot{z}\,\sin\theta-\dot{y}\,\cos\theta)\\ \ddot{y}&=-2\omega(\dot{x}\,\cos\theta)\\ \ddot{z}&=-g+2\omega\dot{x}\,\sin\theta\end{aligned} \qquad (۱-۳۸)$$

اگر از این رابطه ها نسبت به t انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-2\omega(z\,\sin\theta-y\,\cos\theta)+\dot{x}_0\\ \dot{y}&=-2\omega x\,\cos\theta+\dot{y}_0\\ \dot{z}&=-gt+2\omega x\,\sin\theta+\dot{z}_0\end{aligned} \qquad (۱۲-۳۹)$$

ثابت های انتگرال‌گیری $\dot{x}_0$ ، $\dot{y}_0$ و $\dot{z}_0$ مؤلفه‌های سرعت اولیه اند. از دو معادله‌ی آخری در رابطه‌ی (۱۲-۳۹) مقدارهای $\dot{y}_0$ و $\dot{z}_0$ را می‌توان به دست آورد و در معادله‌ی نخست رابطه‌ی (۱۲-۳۸) جایگزین کرد . خواهیم داشت

$$\ddot{x}=-2\omega(-gt+2\omega x\,\sin\theta+\dot{z}_0)\sin\theta-2\omega(2\omega x\,\cos\theta-\dot{y}_0)\cos\theta+\dot{x}_0 \qquad (۱۲-۴۰)$$

با چشم پوشی از جمله‌های مرتبه‌های ω^2 به دست می آید

$$\ddot{x}=2\omega gt\,\sin\theta-2\omega(\dot{z}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)+\dot{x}_0 \qquad (۱۲-۴۱)$$

اگر یکبار دیگر نسبت به t انتگرال بگیریم آنگاه خواهیم داشت

$$\dot{x}=\omega gt^2\sin\theta-2\omega t\,(\dot{z}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)+\dot{x}_0 \qquad (۱۲-۴۲)$$

و بنابراین

$$x=\frac{1}{3}\omega gt^3\sin\theta-\omega t^2(\dot{z}_0\sin\theta-\dot{y}_0\cos\theta)+\dot{x}_0 t+\dot{x}_0 \qquad (۱۲-۴۳)$$

اگر این مقدار x را در معادله‌های دوم و سوم رابطه‌ی (۱۲۰-۳۹) قرار دهیم و نسبت به t انتگرال بگیریم و دوباره از جمله‌های ω^2 چشم پوشی کنیم به دست می آید

$$y = \dot{y}_{\circ}t - \omega \dot{x} t^{۲} \cos\theta + y_{\circ}$$
$$z = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + \dot{z}_{\circ} t + \omega \dot{x}_{\circ} t^{۲} \sin\theta + z_{\circ} \qquad (۱۲-٤٤)$$

اینک دو حالت خاص را بررسی می‌کنیم.

حالت نخست: ذره از حالت سکون و از ارتفاع h رها شده است یعنی $\dot{x}_{\circ} = \dot{y}_{\circ} = \dot{z}_{\circ} = ۰$. در این صورت داریم

$$x = \frac{۱}{۳} \omega g t^{۳} \sin\theta$$
$$z = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + z_{\circ} = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + h \qquad (۱۲-٤٥)$$

پس، ذره به سمت *شرق* سوق پیدا می‌کند وتا رسیدن به زمین $(z = 0)$ زمان $t^2 \approx 2h/g$ را در هوا سپری می کند. بنابراین، در هنگام رسیدن به زمین، فاصله‌ی ذره از فاصله‌ی عمودی، عبارتست از

$$x = \frac{۱}{۳} \omega g (\frac{۲h}{g}) \sin\theta = \frac{\omega}{۳} g (\frac{۲h}{g})^{\frac{۳}{۲}} \sin\theta = \frac{\omega}{۳} (\frac{۸h^{۳}}{g})^{\frac{۱}{۲}} \sin\theta \qquad (۱۲-٤٦)$$

برای مثال، اگر ذره از بلندی $۱۰۰\ m$ در عرض جغرافیایی $\theta = ٤٥^{\circ}$رها شود هنگام رسیدن به زمین به اندازه‌ی ١٦ mm انحراف پیدا می‌کند.

حالت دوم : پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت بسیار زیاد تقریبا بطور افقی پرتاب می شود. جهت پرتاب را در راستای شرق در نظر بگیرید یعنی $\dot{x}_{\circ} = v_{\circ}$ ، $\dot{y}_{\circ} = \dot{z}_{\circ} = ۰$. ازرابطه‌ی (٤٤-١٢) داریم

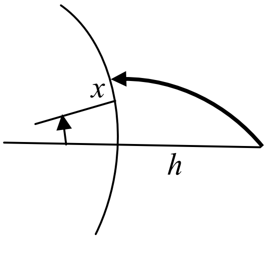
$$y = -\omega v_{\circ} t^{۲} \cos\theta \qquad (۱۲-٤٧)$$

یعنی پرتابه به سمت راست منحرف می‌شود. اگر H برد افقی باشد، آنگاه $H \approx v_{\circ} t_{۱}$ که $t_{۱}$ زمان پرواز است. انحراف پرتابه به سمت راست (عمود بر مسافت شرقی H) به تقریب برابر است با:

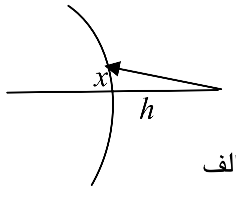
$$\frac{\omega H^{۲}}{v_{\circ}} \cos\theta \qquad (۱۲-٤٨)$$

و می‌توان نشان داد که اگر مسیر افقی باشد ، این مقدار انحراف ،مستقل از جهت اولیه‌ی پرتاب است.

بررسی سقوط جسم از دیدگاه ناظر لخت آموزنده است. چون ذره نسبت به زمین از حالت سکون رها شده است و چون چرخش زمین به سمت شرق است، ذره درچارچوب لخت دارای مؤلفه‌ی سرعت در سوی شرق خواهد بود. با سقوط ذره، تکانه‌ی زاویه‌ای آن ثابت می‌ماند و بنابراین سرعت زاویه‌ای آن افزایش پیدا می کند و از سرعت زاویه‌ای زمین زیر پایش



شکل ١١-١٠ ب

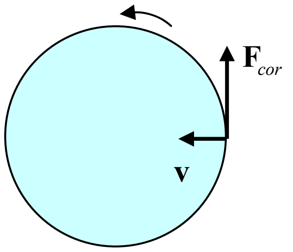


شکل ١١-١٠ الف

جلوتر می‌افتد. شکل های (۱۱-۱۲ الف) و (۱۱- ۱۲ ب) به ترتیب وضعیت را از دید ناظر نشسته روی زمین (چرخان) و ناظر لختی نشان می‌دهند.

در حالیکه نیروی مرکزگریز مفهومی بسیار شهودی است (هر کسی که در درون اتوموبیل از پیچ جاده گذشته است آن را می شناسد) ، اما چنین چیزی را نمی توان در باره ی نیروی کوریولیس گفت. این نیرو به سرعتی، $\mathbf{v}$، غیر صفر نسبت به چارچوب شتاب دار نیاز دارد و معمولا مردم هنگام پیمودن پیچ جاده با سرعت چشم گیری (در مقایسه با اتوموبیل) حرکت نمی کنند. برای این که احساسی نسبت به این نیرو پیدا بکنید، دو حالت خاص را بررسی می کنیم.

حالت ۱ (حرکت شعاعی روی صفحه ی چرخان): شکل (۱۱-۱۲) صفحه ی چرخانی را نشان می دهد که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می چرخد . شخصی را در نظر بگیرید که در امتداد شعاع با سرعت ثابت v (نسبت به صفحه ی چرخان) در فاصله‌ی r از مرکز به سوی مرکز حرکت می کند. ω به سمت بیرون از صفحه است. بنابراین، نیروی کوریولیس، $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ ، در راستای مماسی و در جهت چرخش صفحه است (در شکل ما، در جهت سمت راست شخص). اندازه ی آن $F_{cor}=2m\omega v$ است. فرض کنید که شخص این نیرو را با یک نیروی اصطکاک به اندازه ی $2mv\omega$ (در جهت سمت چپ او) که به پاهایش وارد می شود خنثی می کند و بنابراین به حرکت شعاعی خود ادامه می دهد. (البته نیروی مرکزگریز ی هم وجود دارد که با نیروی اصطکاک شعاعی وارد به کف پاهای شخص خنثی می شود، اما این اثر در اینجا اهمیت ندارد.) چرا نیروی کوریولیس (و در نتیجه نیروی اصطکاک مماسی) وجود دارد؟ برای این که نیروی اصطکاک حاصل (از دید چارچوب آزمایشگاهی) تکانه‌ی زاویه‌ای شخص را تغییر می دهد. برای دیدن این، آهنگ تغییر $L=mr\omega^2$ را حساب کنید که در آن ω سرعت زاویه ای شخص نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا همان سرعت زاویه ای صفحه ی چرخان است. با استفاده از $dr/dt=-v$ داریم



شکل ۱۲-۱۲

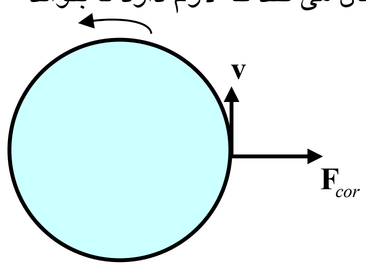
$$\frac{dL}{dt}=-2mr\omega v+mr^2(d\omega/dt) \qquad (۱۲-۴۹)$$

اما $d\omega/dt=0$ است؛ چون شخص درروی یک راستای شعاعی باقی می ماند و ما فرض کردیم که صفحه چنان ساخته شده است که سرعت زاویه ای ω خود را ثابت نگه دارد. پس ، از رابطه ی (۱۲-۴۹) خواهیم داشت $dL/dt=-2mr\omega v$. بنابراین ، L شخص با آهنگ $-(2m\omega v)r$ تغییر می کند که حاصل ضرب شعاع و نیروی اصطکاک مماسی است که صفحه به شخص وارد می کند. به بیان دیگر، این گشتاوری است که صفحه ی چرخان به شخص وارد می کند.

نکته: اگر شخص نیروی اصطکاک مماسی به کف پای خود وارد نکند چه پیش می آید؟ در این صورت نیروی کوریولیس، $2m\omega v$، شتاب مماسی $2\omega v$ را در چارچوب شخص ایجاد می کند و هم چنین است در چارچوب آزمایشگاهی. وجود این شتاب اساسا به این خاطر است که تکانه ی شخص را (نسبت به چارچوب آزمایشگاه) ثابت نگه دارد. در این سناریو تکانه ی زاویه ای شخص ثابت است زیرا در چارچوب آزمایشگاه نیروهای مماسی وجود ندارند). برای این که ببینید شتاب مماسی با پایستگی تکانه ی زاویه ای سازگار است،در رابطه ی (۱۲-۴۹) قرار دهید $dL/dt=0$ ، خواهیم داشت $2\omega v=r(d\omega/dt)$. بنا به تعریف، سمت راست شتاب مماسی است. پس ، گفتن این که L پایسته است با گفتن این که $2\omega v$ شتاب مماسی است (

برای این وضعیت که سرعت شعاعی درون سو است) یکی است. ♣

حالت ۲ (حرکت مماسی روی صفحه ی چرخان): حالا فرض کنید کسی در شعاع ثابت r روی صفحه‌ی چرخان شکل (۱۳-۱۲) با سرعت v (نسبت به صفحه) به طور مماسی و در جهت حرکت صفحه راه می رود. نیروی کوریولیس $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ برون سوست و اندازه ی آن $2m\omega v$ است. فرض کنید این شخص نیروی اصطکاکی را اعمال می کند که لازم دارد تا بتواند در شعاع r به حرکت خود ادامه دهد. برای دیدن این که چرا این نیروی برون سوی $2m\omega v$ باید وجود داشته باشد، راه ساده ای وجود دارد: از دید ناظر بیرونی، سرعت نقطه‌ای در روی صفحه ی چرخان واقع در شعاع r برابر است با $V\equiv\omega r$. اگر شخص با سرعت v نسبت به صفحه، مماسی (در همان جهت چرخش) حرکت بکند، آنگاه سرعت او از دید ناظر بیرونی V+v است. پس، ناظر بیرونی شخصی را می بیند که در دایره‌ای به شعاع r با سرعت V+v حرکت می کند. بنابراین ، شتاب این شخص در چارچوب زمین $(V+v)^2/r$ است. این شتاب باید به وسیله ی نیروی اصطکاک درون سویی تولید شود که به کف پای شخص وارد می شود. پس



شکل ۱۳-۱۰

$$F_{friction}=\frac{m(V+v)^2}{r}=\frac{mV^2}{r}+\frac{2mVv}{r}+\frac{mv^2}{r} \qquad (۱۲-۵۰)$$

این نیروی اصطکاک البته در هر چارچوبی همان است. در این صورت، فرد روی صفحه ی چرخان چگونه این سه جزء نیروی اصطکاک درون سو را در رابطه ی (۵۰-۱۲) باید تفسیر کند؟ جمله ی نخست نیروی برون سوی مرکزگریز را که شخص همواره حس می کند و نتیجه ی چرخش چارچوب است، خنثی می کند. جمله ی سوم نیروی درون سویی است که پاهای شخص اعمال می کند تا بتواند روی دایره ای به شعاع r و سرعت v حرکت کند – کاری که او به آن مشغول است. جمله ی میانی نیروی اصطکاک درون سوی دیگری است که شخص باید وارد کند تا نیروی کوریولیس برون سوی $2m\omega v$ (با استفاده از $V\equiv\omega r$) را حذف کند.

در بیانی هم ارز، شخص روی صفحه‌ی چرخان معادله‌ی $F=ma$ را به صورت (راستای شعاعی درون سو را مثبت فرض کنید) زیر خواهد نوشت

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{m(V+v)^2}{r}-\frac{mV^2}{r}-\frac{2mVv}{r}$$

یا

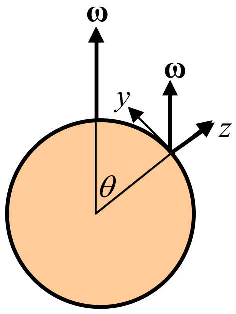
$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}_{friction}+\mathbf{F}_{centrifugal}+\mathbf{F}_{coriolis} \qquad (۱۲-۵۱)$$

می بینیم که نیرویی را که شخص احساس می کند در حقیقت در چارچوب او با ma (که a در چارچوب او اندازه گیری می شود) برابر است.

برای حالت های بینابین این دو حالت خاص، وضعیت چندان روشن نیست، اما همین است که هست. توجه کنید که در هر جهتی که روی صفحه ی چرخان حرکت بکنید، نیروی کوریولیس همیشه در همان جهت و عمود برجهت حرکت شماست. به سمت راست یا به سمت چپ بودن آن بستگی به جهت چرخش دارد. برای ω داده شده ای جهت نسبی نیرو همیشه با شما همراه است.

بگذارید چند مثال دیگر هم حل بکنیم.

مثال ۶-۱۰ (آونگ فوکو) : این مثال کلاسیکی اثر نیروی کوریولیس است و نشان می دهد که بی شک زمین می چرخد.
آونگ فوکو یک آونگ معمولی است که در هر جهتی می تواند تاب بخورد و با دقت زیادی ساخته شده است تا از تقارن کامل برخوردار باشد. به این ترتیب دوره‌ی نوسان آن در هر جهتی دقیقاً یکسان است. (این آونگ باید دراز و بسیار سنگین باشد تا با وجود مقاومت هوا بتواند بطور آزادانه برای چندین ساعت تاب بخورد.)
در حالت خاصی که آونگ در یکی از قطب ها ی زمین قرار دارد، فهمیدن این چرخش آسان است. قطب شمال را در نظر بگیرید. ناظر بیرونی که در بالای قطب شمال معلق است و چرخش زمین را تماشا می کند، صفحه ی آونگ را (نسبت به ستاره های دوردست) ثابت می بیند، اما زمین زیر پای آن، پادساعتگرد می چرخد (فرض می کنیم که نقطه ی آویز آونگ بدون اصطکاک است و بنابراین نمی تواند گشتاوری ایجاد کند که سبب پیچاندن صفحه ی آونگ بشود.) پس، برای ناظری در روی زمین ، صفحه ی آونگ ساعتگرد می چرخد (اگر به آن از بالا نگاه کند). بسامد این چرخش البته همان بسامد چرخش زمین است. بنابراین ، ناظر زمینی می بیند که صفحه ی آونگ در هر روز یک دور می چرخد.
اگر آونگ در قطب نباشد چه؟ بسامد حرکت تقدیمی چیست؟ فرض کنید آونگ در زاویه ی قطبی θ باشد. این محاسبه را ما در تقریبی انجام می دهیم که سرعت وزنه ی آونگ افقی است. اگر ریسمان آونگ بسیار دراز باشد این تقریب اساسا درست است و تصحیح هایی که به خاطر بالا رفتن و پایین آمدن وزنه لازم اند، قابل چشم پوشی است. جهت نیروی کوریولیس، $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ ، اینک پیچیده است. مولفه عمودی آن نیروی ظاهری گرانش را تغییر می دهد و بنابراین ، قابل چشم پوشی است (اگر چه بسامد آونگ به g بستگی دارد، اما تغییر حاصل در آن بسیار کوچک است.)



شکل ۱۴-۱۲

با این یادآوری، بگذارید $\boldsymbol{\omega}$ را در چارچوب مختصاتی که روی آونگ است به مولفه های افقی و عمودی تجزیه کنیم. از شکل ۱۴-۱۲ می بینیم که

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}+\omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (۱۲-۵۲)$$

ما از مولفه‌ی y چشم پوشی خواهیم کرد، چون این مولفه در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ نیروی کوریولیس ایجاد می کند (چون $\mathbf{v}$ در صفحه‌ی $x-y$ است) . بنابراین ، برای منظور ما ، ω اساسا برابر $\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$ است. از این نقطه به بعد مسئله ی یافتن بسامد تقدیمی به چند روش امکان پذیر است. ما دو شیوه ی حل ارائه خواهیم کرد.

حل نخست (راه میان بر) : اندازه ی مولفه ی افقی نیروی کوریولیس عبارت است از

$F_{cor}^{horiz}=\left\|-2m(\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{v}\right\|=2m(\omega\cos\theta)v$	(۱۲-۵۳)

و بر $\mathbf{v}(t)$ عمود است. پس تا جایی که به آونگ مربوط می شود، انگار آونگ در قطب شمال ستاره ای فرضی قرار دارد که با بسامد $\omega\cos\theta$ می چرخد. اما همان گونه که در بالا دیدیم ، بسامد تقدیمی آونگ فوکو در قطب شمال یک چنین ستاره‌ای

$$\omega_F=\omega\cos\theta \qquad (۱۲-۵۴)$$

و ساعتگرد است. پس این پاسخ ماست.

حل دوم (در چارچوب آونگ): بگذارید درچارچوب صفحه ی عمودی نوسان آونگ فوکو کار بکنیم. هدف ما یافتن آهنگ حرکت تقدیمی این چارچوب است. نسبت به چارچوب ثابتی در روی زمین (با محورهای $\hat{\mathbf{x}}$ ، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$) می دانیم که اگر در قطب شمال باشیم $(\theta=0)$ این صفحه با بسامد $\omega_F=-\omega\hat{\mathbf{z}}$ می چرخد و اگر در استوا باشیم $(\theta=\pi/2)$ بسامد صفحه $\omega_F=0$ است.

بنابراین اگر واقعیتی در جهان باشد، پاسخ باید به صورت $\omega_F = -\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$ باشد. این چیزی است که حالا می خواهیم نشان بدهیم.

کار کردن در چارچوب صفحه سودمند است زیرا می توان از این واقعیت استفاده کرد که *آونگ نیروهایی را که در بیرون از صفحه باشند احساس نمی کند*، اگر احساس می کرد می بایست حرکت آونگ در بیرون از صفحه قرار می داشت (که بنابه تعریف این چنین نیست)

نسبت به چارچوب لخت، چارچوب ثابتی در روی زمین با بسامد $\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$ می چرخد. فرض کنید صفحه ی آونگ با بسامد $\boldsymbol{\omega}_F = \omega_F\hat{\mathbf{z}}$ نسبت به چارچوب زمین می چرخد. آنگاه سرعت زاویه ای چارچوب آونگ نسبت به چارچوب لخت عبارت است از

$$\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_F = (\omega\cos\theta + \omega_F)\,\hat{\mathbf{z}} + \omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (۱۲-۵۵)$$

در این چارچوب چرخان ، برای یافتن مولفه ی افقی نیروی کوریولیس تنها مولفه ی $\hat{\mathbf{z}}$ این بسامد برای ما مهم است. بنابراین اندازه ی نیروی کوریولیس افقی عبارت است از $2m(\omega\cos\theta + \omega_F)v$. اما در چارچوب آونگ، نیروی افقی وجود ندارد. پس این مقدار باید برابر صفر باشد. در نتیجه داریم:

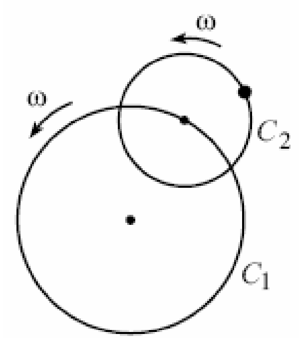
$$\omega_F = -\omega\cos\theta \qquad (۱۲-۵٦)$$

که با رابطه ی (۵٤-۱۲) سازگار است.

مسئله ها

۱-۱۲ (**$\mathbf{g}_{eff}$ در مقابل $\mathbf{g}$**): برای چه مقدار θ ، زاویه ی میان $\mathbf{g}_{eff}$ و $\mathbf{g}$ بیشینه است؟

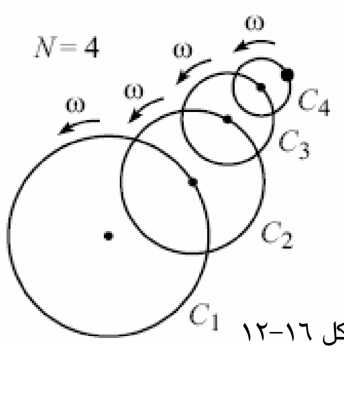
۲-۱۲ (**پرش طول در $\mathbf{g}_{\mathrm{eff}}$**) : اگر شخصی در قطب شمال می تواند ۸ متر پرش طول انجام دهد در استوا چه طولی را می تواند بپرد؟ (از اثر های مقاومت باد، دما واینکه در قطب زمین یخی است چشم پوشی کنید و فرض کنید که پرش در استوا در راستای شمال- جنوب انجام می گیرد و در نتیجه نیروی کوریولیس وجود ندارد.)



شکل ۱۵-۱۲

۳-۱۲ (**دایره های زیاد**): **(الف)** دو دایره ی C_1 و C_2 در یک صفحه هر کدام با سرعت زاویه ای ω نسبت به یک چارچوب لخت می چرخند (شکل ۱۵-۱۰ را ببینید.) مرکز C_1 در یک چارچوب لخت ثابت شده است و مرکز C_2 در دایره ی C_1 ثابت است . جرمی روی دایره ی C_2 ثابت شده است. مکان این جرم نسبت به مرکز C_1 عبارت است از $\mathbf{R}(t)$. چه نیروهای پنداری را این جرم احساس می کند؟

(ب) Nدایره ی C_i در یک صفحه، هر کدام با سرعت زاویه ای ω نسبت به یک چارچوب لخت می چرخند (شکل ١٦-۱۰) مرکز C_1 در یک چارچوب لخت ثابت شده است. مرکز دایره ی C_i (برای $i = 2,\ldots,N$) روی دایره ی C_{i-1} قرار دارد. جرمی روی دایره ی C_N است و مکان آن نسبت به مرکز C_1 عبارت است از $\mathbf{R}(t)$. نیروهای پنداری را که جرم احساس می کند بیابید.



شکل ١٦-۱۲

۱۲-۴ (**کدام سو به پایین؟**): شما در بالونی در هوا غوطه ورید.بالون نسبت به زمین ساکن است. سه تعریف نیمه پـذیرفتنی برای اینکه کدام نقطه در روی زمین درست "زیر" شماست ارایه کنید.

۱۲-۵ (**جرمی روی صفحه ی چرخان**): جرمی نسبت به چارچوب آزمایـشگاه بـدون حرکـت اسـت در حالیکـه در زیـر آن یـک صفحه ی چرخان بدون اصطکاک می چرخد. بسامد چرخش صفحه ω است و جرم در شعاع r قرار دارد. در چارچوب صفحه چه نیروهایی به جرم وارد می شوند؟

۱۲-۶ (**جرم آزاد شده**): جرمی را به یک صفحه ی چرخان بدون اصطکاک پیچ کرده ایم. بسامد چرخش صفحه ω است و جرم در شعاع a از مرکز صفحه قراردارد. جرم را آزاد می کنیم (یعنی پیچ و مهره را باز می کنـیم). از دیـد چـارچوب لخـت ، جـرم روی یک خط راست حرکت می کند. مسیر جرم در چارچوب چرخان چگونه خواهد بـود؟ $r(t)$ و $\theta(t)$ را مـشخص کنیـد. θ زاویه نسبت به شعاع اولیه است.

۱۲-۷ (**دایره های کوریولیس**): قطعه ی کوچک استوانه ای با ارتفاع کم با سرعت v روی یخ می لغزد. سطح افقی است یعنی در هر نقطه به g_{eff} عمود است. نشان دهید که در چارچوب چرخان زمین، قطعه روی یک دایره حرکت می کند. شعاع دایـره را بیابید. بسامد حرکت چیست؟ فرض کنید در مقایسه با شعاع زمین، شعاع دایره کوچک است.

۱۲-۸ (**شکل زمین**): زمین در استوا به خاطرنیروی مرکزگریز در چارچوب چرخان زمین، اندکی پف کرده است (حالت کروی ندارد). نشان دهید که ارتفاع نقطه ای در روی زمین (نسبت به زمین کروی) عبارت است از

$$h = R\left(\frac{R\,\omega^{۲}}{۶g}\right)(۳\sin^{۲}\theta - ۲) \qquad (۱۲-۵۷)$$

که در آن θزاویه ی قطبی (از قطب شمال) و R شعاع زمین است.

۱۲-۹ (**تصحیح شتاب گرانش**): جرمی از نقطه ای در بالای استوا رها می شود. فاصله ی اولیه ی آن را از مرکز زمین R و مسافتی را که فرو می افتد b بنامید. اگر تنها نیروی مرکزگریز را در نظر بگیریم انگاه تصحیح g برابر است با $\omega^2(R-b)$. اما نصحیح مرتبه دومی نیز وجود دارد که در اثر نیروی کوریولیس به وجود می آید. جمع این دو تصحیح چقدر است؟ (g با ارتفاع هم تغییر می کند اما در این جا به آن نمی پردازیم.)

۱۲-۱۰ (**انحراف به جنوب**): توپی را در زاویه ی قطبی θ از ارتفاع h (کوچک در مقایسه با شعاع زمین) رها می کنیم. هنگام برخورد با زمین چقدر از جهت g_{eff} به سوی جنوب (در نیم کره ی شمالی) منحرف می شود؟ (این یک اثر مرتبه دو به خاطر نیروی کوریولیس است.)

۱۲-۱۱ (**نوسان در استوا**) : سیم بدون اصطکاکی به شکل کمانی از یک دایره در استوا از شمال به جنوب خوابانیده شده است و دانه ی تسبیحی روی آن قرار دارد. همه ی نقاط سیم از مرکز زمین به یک فاصله اند. دابه ی تسبیح را از فاصله ی کوتاهی تا استوا رها می کنیم. به خاطر این که g_{eff} درست به سوی مرکز زمین نیست، دانه ی تسبیح به سوی استوا حرکت خواهد کرد و یک حرکت نوسانی خواهد داشت. بسامد این نوسان را بیابید.